Confronto di infinitesimi.

$f(x), g(x)$ infinitesimi per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$, def^{te} $\neq 0$ per $x \to x_0$

$f(x)$ è **infinitesimo di ordine superiore** rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ovvero $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

$f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi dello stesso ordine** per $x \to x_0$

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ossia $f(x) \sim l\, g(x)$ per $x \to x_0$

Esempi

x^3 è infinitesimo di ordine superiore risp. a x^2 $x \to 0$

$1/x^3$ è infinitesimo " superiore " " $\frac{1}{x^2}$ $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1/x^3}{1/x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$$

$\sin(5x)$ è infinitesimo di ordine uguale risp. a x per $x \to 0$

infatti $\sin(5x) \sim 5x$ per $x \to 0$

OSS Se $f(x)$ è infinito di ordine superiore risp. a $g(x)$ per $x \to x_0$

allora $f(x) + g(x) \sim f(x)$ $x \to x_0$

Infatti $f(x) + g(x) = f(x)\left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right) \sim f(x)$ "

$\searrow 0$

Se $f(x)$ è infinitesimo di ordine sup. rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$

$f(x) + g(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$

Infatti $f(x) + g(x) = g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} + 1\right) \sim g(x)$

$\to 0$

In ogni caso se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, allora

$$f(x) + g(x) \sim g(x) \qquad \text{per } x \to x_0$$

Esercizio Ordinare in ordine crescente di infinitesimo per $x \to 0^+$

$$f(x) = x \log_2 x \qquad g(x) = -\frac{x^{1/3}}{\log_3 x}$$

$$h(x) = \underbrace{x^{-10}}_{\downarrow \atop +\infty} \underbrace{2^{-1/x}}_{\downarrow \atop 0} \qquad k(x) = \sin x \sim x$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-10} 2^{-1/x} = \lim_{y \to +\infty} y^{10} 2^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^{10}}{2^y} = 0$$

$$y = \frac{1}{x} \to +\infty$$

$$\frac{f(x)}{k(x)} = \frac{\cancel{x} \log_2 x}{\sin x} \sim \log_2 x \to -\infty \qquad \sin x \sim \cancel{x}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è infinitesimo di ordine inferiore risp. a $k(x)$ per $x \to 0^+$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x \log_2 x}{\left(-\frac{x^{1/3}}{\log_3 x}\right)} = -x^{2/3} \log_2 x \log_3 x \to 0$$

$f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$

Confrontiamo $k(x)$ con $h(x)$

$$\frac{k(x)}{h(x)} = \frac{\sin x}{\underbrace{x^{-10} 2^{-1/x}}} \sim \frac{x^{11}}{\underbrace{2^{-1/x}}} = \frac{2^y}{y^{11}} \to +\infty \qquad x \to 0^+$$

$\sin x \sim x$

$$\boxed{1/x = y \to +\infty}$$

$\Rightarrow$ $h(x)$ è infinitesimo di ordine superiore risp. a $k(x)$ per $x \to 0^+$

In conclusione, l'ordinamento "crescente" degli infinitesimi è

$$g(x),\ f(x),\ k(x),\ h(x)$$

Infiniti e infinitesimi "campione" per $x \to x_0$ $\quad$ $x_0 \in \mathbb{R}$

	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$	$x \to x_0^+$	$x \to x_0^-$
infinito	x	$-x$	$\frac{1}{x-x_0}$	$\frac{1}{x_0-x}$
infinitesimo	$1/x$	$-\frac{1}{x}$	$x-x_0$	x_0-x.

DEF Diremo che $f(x)$ è un infinito/infinitesimo di ordine $\alpha > 0$ per $x \to +\infty / x \to -\infty / x \to x_0^+ / x \to x_0^-$ se $f(x) \sim l\,(g(x))^\alpha$ per $x \to +\infty / -\infty / x_0^+ / x_0^-$ dove $g(x)$ è l'infinito/infinitesimo corrispondente della tabella, e $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ è un infinitesimo di ordine 2 per $x \to 0^\pm$

$\operatorname{sen} x \sim x$ " " " " " 1 per $x \to 0^\pm$

$\frac{1}{x+1} \sim \frac{1}{x}$ è un infinitesimo di ordine 1. per $x \to +\infty$

$2x^5-3x^2$ è un infinito di ordine $\underline{5}$ per $x \to -\infty$

$2x^5-3x^2$ è un infinitesimo di ordine $\underline{2}$. per $x \to 0^\pm$

x^3-2x^2 è un infinito di ordine 3 per $x \to +\infty$

" " infinitesimo di ordine 2 per $x \to 0^\pm$

x^3-2x^2 " infinitesimo di ordine 1 per $x \to 2^\pm$

" $x^2(x-2) \sim 4(x-2)$

$\log x$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x \to 1^{\pm}$

$\underset{\log(1+(x-1)) \sim x-1}{\overset{\shortparallel}{}}$

<u>OSS</u> Non tutti gli infiniti/infinitesimi hanno un ordine

$\log x$ è infinito di ordine inferiore risp. a x^α $\forall \alpha > 0$ per $x \to +\infty$

e^x è infinito di " superiore risp. a x^α $\forall \alpha > 0$ $x \to +\infty$

e^x è infinitesimo " superiore " $\frac{1}{(-x)^\alpha}$ $\forall \alpha > 0$ $x \to -\infty$

$\log x$ è infinito " inferiore " $\frac{1}{x^\alpha}$ $\forall \alpha > 0$ $x \to 0^+$

$x \log x$ è infinito di ordine superiore risp. a x $x \to +\infty$

ma di ordine inferiore risp a x^α $\forall \alpha > 1$

Infatti

$$\frac{x \log x}{x^\alpha} = \frac{\log x}{x^{\alpha-1}} \xrightarrow{x \to +\infty} 0 \qquad (\alpha > 1) \qquad x \to +\infty$$

$\underbrace{1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\sim \frac{1}{2n^4}}$ è un infinitesimo di ordine 4 per $n \to +\infty$

$\sqrt{n^4+n^3} - n^2 = n^2 \Big(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1}_{\sim \frac{1}{2n}}\Big) \sim \frac{n}{2}$ è infinito di ordine 1 per $n \to +\infty$

$(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$ per $t \to 0$

$$\frac{\overbrace{(1+x+3x^2)}^{\sim 3x^2}}{(\log x)^2} \sim \frac{3x^2}{(\log x)^2}$$ è un infinito di ordine inferiore risp. a x^2 ma superiore risp. a x^α $\forall \alpha < 2$

$x \to +\infty$

$0<\alpha<2$

$$\frac{\left(\frac{3x^2}{(\log x)^2}\right)}{x^\alpha} = \frac{3\ \overbrace{x^{2-\alpha}}^{\to\infty}}{(\log x)^2} \to +\infty.$$

$$\log(\underbrace{5x^2-19}_{\to 1}) = \log(1+(\underbrace{5x^2-20}_{\to 0})) \sim 5x^2-20 = 5(x^2-4) = \qquad \boxed{x\to 2}$$

$$= 5(x-2)\underbrace{(x+2)}_{\to 4} \sim 20(x-2)$$

è infinitesimo di ordine 1 per $x\to 2$.

$$f(x) = x^{1+\frac{1}{\sqrt{\log x}}} \to +\infty \qquad \text{per } x\to+\infty$$

L'esponente $1+\frac{1}{\sqrt{\log x}} \to 1$. Confrontiamo con $x^1 = x$

$$\frac{f(x)}{x} = x^{\frac{1}{\sqrt{\log x}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{\log x}}\log x} = e^{\sqrt{\log x}} \to +\infty.$$

$\Rightarrow f(x)$ è infinito di ordine superiore risp. a x per $\boxed{x\to+\infty}$
ma di ordine inferiore risp. a x^α $\forall\alpha>1$

$$\frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{x^{1+\frac{1}{\sqrt{\log x}}}}{x^\alpha} = x^{(1-\alpha)+\frac{1}{\sqrt{\log x}}} \to 0 \qquad \alpha>1$$

Funzioni continue.

DEF Sia $f: X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, e sia $x_0\in X$.

(Se x_0 è pto isolato di X, diremo che f è continua in x_0).

Se x_0 è pto di accum. per X, diremo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \text{ cioè}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\forall x \in X$ verificante $\cancel{0 <} |x - x_0| < \delta$

non c'è bisogno di imporre $x \neq x_0$ perché in tal caso $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

ossia. se (teorema ponte)

$\forall$ succ^{ne} $\{a_n\}$ a valori in X t.c. $a_n \to x_0$ si ha

$f(a_n) \to f(x_0)$

Se $f: X \to \mathbb{R}$ è continua in ogni punto di X, diremo che f è continua in X, e scriveremo $f \in C(X) = C^0(X)$

Esempi Quasi tutte le funzioni elementari viste sono continue nel loro dominio.

Potenze: se $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ è continua nel suo dominio

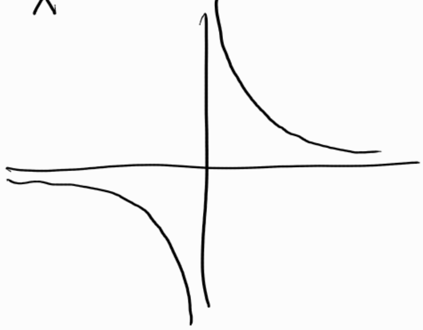
$f(x) = x^3$ è continua in $\mathbb{R}$? Sì $\lim_{x \to x_0} x^3 = x_0^3 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^{4/3}$ è continua in $\mathbb{R}$? Sì $\lim_{x \to x_0} x^{4/3} = x_0^{4/3} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^\pi$ è continua in $[0, +\infty)$? sì $\lim_{x \to x_0} x^\pi = x_0^\pi \quad \forall x_0 \geq 0$

$f(x) = \frac{1}{x}$ è continua nel suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} \quad \forall x_0 \neq 0$$



Gli esponenziali sono funzioni continue.

$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbb{R}$ $\forall a > 0$

$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

$\forall a > 0, \ a \neq 1$ $f(x) = \log_a x$ è continua in $(0, +\infty)$

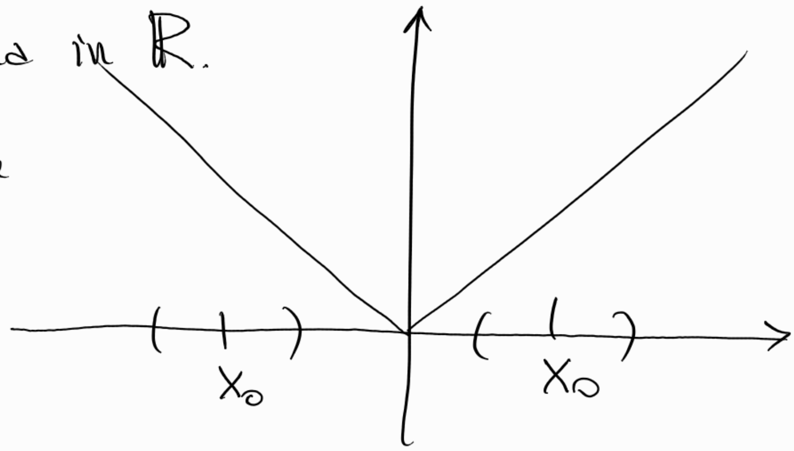
$f(x) = \sin x$ è continua in $\mathbb{R}$

$\cos x$ " " "

$\operatorname{tg} x$ è continua nel suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$ $\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$f(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$.



Verifica: devo controllare che

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$.

ovvio se $x_0 > 0$. Infatti in un conveniente intorno di x_0

$|x| = x$

$\lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = |x_0|$

Analogamente se $x_0 < 0$

Se $x_0 = 0$ $\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$

Dim. sintetica uso la dis. triangolare per la differenza.

$$\underset{\downarrow \, 0}{0} \leq \underbrace{||x| - |x_0||}_{\downarrow \, 0} \leq \underbrace{|x - x_0|}_{\to 0} \qquad x \to x_0$$

Quindi $\lim_{x \to x_0} \big||x| - |x_0|\big| = 0$, cioe $\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$