$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-5x+12}{2x-\sqrt{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^{3}}^{2}}{\cancel{x}} \boxed{\frac{(1+o(1))}{(2+o(1))}} = +\infty$$

$= \frac{1}{2}+o(1)$

<u>Num</u> $\quad x^3-5x+12 = x^3\left(1 \boxed{-\frac{5}{x^2}+\frac{12}{x^3}}\right) = x^3(1+o(1))$ per $x\to-\infty$

una funzione che tende a zero per $x\to-\infty$

dove

$$-\frac{5}{x^2}+\frac{12}{x^3} = o(1) \quad \text{per } x\to-\infty \quad \text{significa}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{5}{x^2}+\frac{12}{x^3}\right)=0$$

<u>denom</u> $\quad 2x-\underbrace{\sqrt{|x|}}_{\substack{\| \\ \sqrt{-x}}}$ per $x\to-\infty$ $= x\left(2-\frac{\sqrt{|x|}}{x}\right) = x\left(2-\frac{\sqrt{-x}}{x}\right) =$

$$= x\left(2+\frac{\cancel{\sqrt{-x}}}{\cancel{-x}}\right) = x\left(2+o(1)\right)$$

$\sqrt{-x}$

Lo stesso esercizio con una notazione diversa:

$$x^3-5x+12 \sim x^3 \quad \text{per} \quad x\to-\infty$$

<u>Questo significa:</u>

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-5x+12}{x^3}=1$ oppure, equivalentemente

$$x^3-5x+12 = x^3(1+o(1)) \qquad \text{per } x\to-\infty$$

- $2x-\sqrt{|x|} = 2x(1+o(1))$ per $x\to-\infty$
- o, equivalentemente, $2x-\sqrt{|x|} \sim 2x$ per $x\to-\infty$

Risoluzione sintetica: $x^3-5x+12 \sim x^3$ per $x \to -\infty$

$2x-\sqrt{|x|} \sim 2x$ "

$$\frac{x^3-5x+12}{2x-\sqrt{|x|}} \sim \frac{x^3}{2x} = \frac{x^2}{2} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } x \to -\infty$$

Questo stesso metodo si applica a limiti per $x \to \pm\infty$ di rapporti di polinomi.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5-2x^4+x}{x^5+7x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cancel{x^5}(1+o(1))}{\cancel{x^5}(1+o(1))} = 3$$

$$\frac{\overbrace{3x^5-2x^4+x}^{\sim 3x^5}}{\underbrace{x^5+7x^2+1}_{x^5}} \sim \frac{3x^5}{x^5} = 3$$

E' lecito sostituire funzioni asintoticamente equivalenti al posto di numeratore/denominatore in una frazione, fattori in un prodotto

NON in somme, non all'interno di funzioni

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{2^x+4^{-x}}^{\sim 2^x}}{\underbrace{7+3^x}_{\sim 3^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x\left(1+\overbrace{\frac{4^{-x}}{2^x}}^{o(1)}\right)}{3^x\left(1+\underbrace{\frac{7}{3^x}}_{o(1)}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x (1+o(1)) = 0$$

perché $0<\frac{2}{3}<1$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\to 0}{2^x} + \overset{\to +\infty}{4^{-x}}}{\underset{\to 7}{7+3^x}} = \left(\frac{+\infty}{7}\right) = +\infty.$$

Limiti di funzioni elementari:

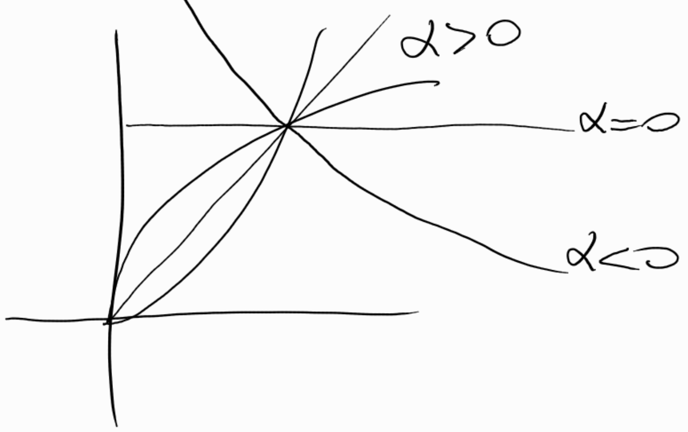
Limiti di potenze

$f(x) = x^\alpha$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$.
(quindi prendo $x>0$)

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \alpha=0 \\ 0 & \alpha<0. \end{cases}$$

Basta usare il teorema ponte. Abbiamo provato che se $a_n \to +\infty \Rightarrow (a_n)^\alpha \to \begin{cases} +\infty & \alpha>0 \\ 1 & \alpha=0 \\ 0 & \alpha<0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha>0. \\ 1 & \alpha=0 \\ +\infty & \alpha<0 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \qquad \forall x_0 \in (0,+\infty)$$

Limiti di esponenziali $(b>0)$

$$\lim_{x\to+\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b>1 \\ 1 & \text{se } b=1 \\ 0 & 0<b<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} b^x = \begin{cases} 0 & \text{se } b>1 \\ 1 & b=1 \\ +\infty & 0<b<1. \end{cases}$$

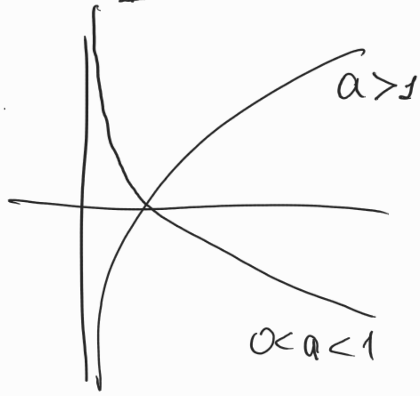
$$\lim_{x\to x_0} b^x = b^{x_0} \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Limiti di logaritmi.

$\log_a x \qquad a>0 \qquad a\neq 1.$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ -\infty & 0<a<1 \end{cases}$$

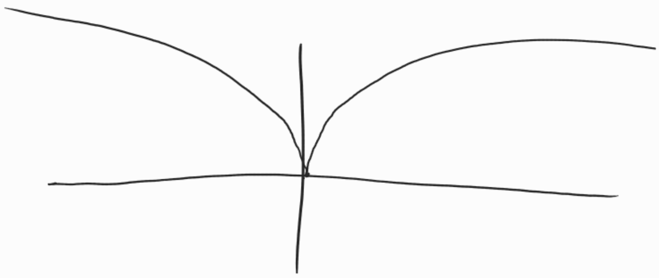
$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & a>1. \\ +\infty & 0<a<1 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\frac{4}{5}} = +\infty$$

$$x^{\frac{4}{5}} = (x^4)^{1/5}$$



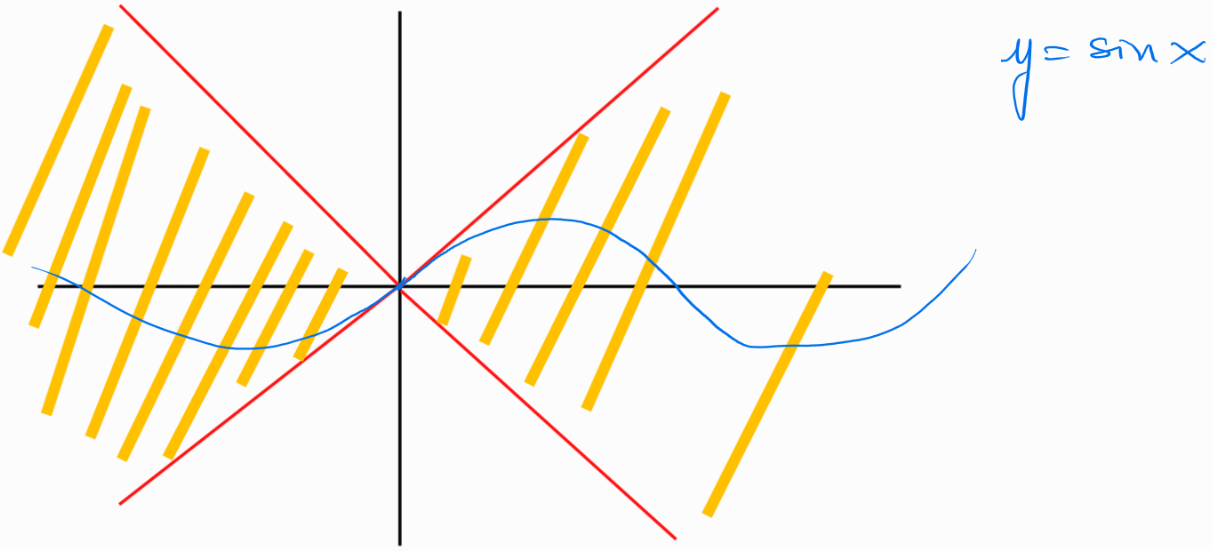
Funzioni trigonometriche.

$$\lim_{\underline{x\to+\infty}} \begin{matrix}\sin x \\ \cos x\end{matrix} \quad \nexists$$

Abbiamo provato che $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

L'abbiamo fatto mostrando che $|\sin x| \le |x|$

graficamente significa $\quad -|x| \le \sin x \le |x|$



$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

Si usano le formule di prostaferesi. $\quad x \to x_0$

$$0 \le |\sin x - \sin x_0| = 2 \, \boxed{\left|\sin \frac{x-x_0}{2}\right|} \, \boxed{\left|\cos \frac{x+x_0}{2}\right|} \le$$

$|\sin t| \le |t|$

$$\left|\sin \frac{x-x_0}{2}\right| \le \frac{|x-x_0|}{2} \qquad \left|\cos \frac{x+x_0}{2}\right| \le 1$$

$$\le \cancel{2} \, \frac{|x-x_0|}{\cancel{2}} \cdot 1 \longrightarrow 0$$

Teor. dei carabinieri $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

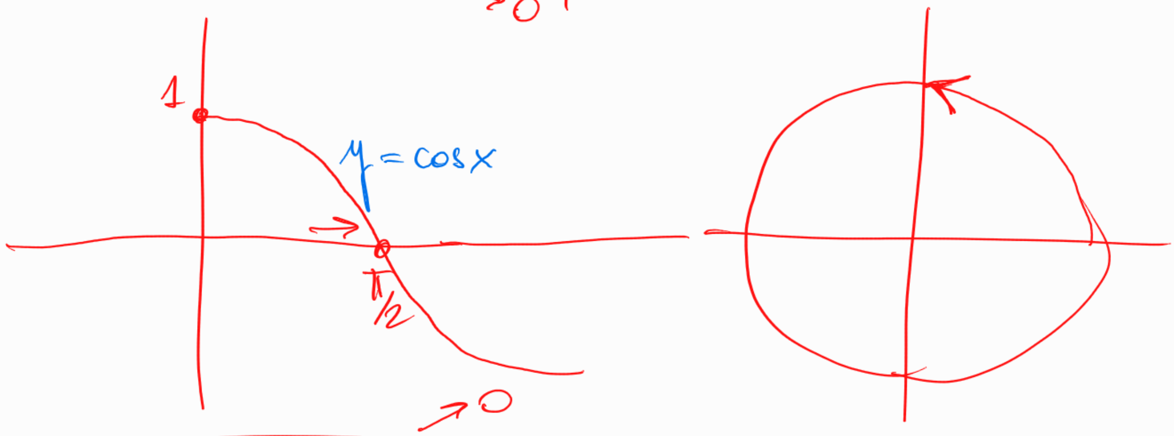
$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

<u>OSS</u> $\quad \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \lim_{x \to x_0} \sin \underbrace{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{\downarrow \; x_0 + \frac{\pi}{2}} = \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0 \quad \forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^{\mp}} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^{\mp}} \frac{\overset{\to 1}{\sin x}}{\underset{\to 0^{+}}{\cos x}} = \pm\infty$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\underset{\to 0}{x}} \overset{\to 0}{\boxed{\sqrt{x^2+2x^3\sin x}}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|\,\overset{\to 1}{\sqrt{1+2x\sin x}}}{x} \quad \nexists$$

$$\lim_{x\to 0^+} ---- = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x}\sqrt{1+2x\sin x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} ---- = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)}{x}\sqrt{\quad} = -1$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} e^{\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}} = \lim_{y\to 0} e^y = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\overset{\to +\infty}{\frac{1}{x}}} = \lim_{y\to +\infty} e^y = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x \to -\infty} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0 \qquad \lim_{x\to 0} e^{1/x} \nexists$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x^4 - 3x^3}{x^3 \log(1+e^{2x})}\right)\right| = \lim_{y\to \frac{\pi}{2}} |\operatorname{tg} y| = +\infty.$$

$x \to +\infty$

$$\frac{\pi x^4 - 3x^3}{x^3\log(1+e^{2x})} = \frac{x^4(\pi + o(1))}{2x^4(1+o(1))} \to \frac{\pi}{2}$$

N. $\pi x^4 - 3x^3 = x^4(\pi + o(1)) \sim \pi x^4$

D. $x^3 \log(1+e^{2x}) = 2x^4(1+o(1)) \sim 2x^4$

$$\log(1+e^{2x}) = \log\left(e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right) = \underbrace{\log(e^{2x})}_{= 2x} + \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)}_{= o(1)} =$$

$$= 2x\left(1 + \underbrace{\frac{o(1)}{2x}}_{= o(1)}\right) \sim 2x$$

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}} |\operatorname{tg} y| = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tg} \boxed{\frac{\pi x^4 - 3x^3}{x^3\log(1+e^{2x})}} \to \frac{\pi}{2}.$$

Vediamo se tende a $\frac{\pi}{2}^+$ o a $\frac{\pi}{2}^-$

N. $\pi x^4 - 3x^3 = x^4\left(\pi - \frac{3}{x}\right)$

D. $x^3 \log(1+e^{2x}) = x^3\left(2x + \log\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right) =$

$= x^4\left(2 + \frac{\log(1+1/e^{2x})}{x}\right)$

$$\underbrace{\frac{\pi x^4 - 3x^3}{x^3\log(1+e^{2x})}}_{\downarrow \; \frac{\pi}{2}^-} = \frac{\cancel{x^4}\overbrace{\left(\pi - 3/x\right)}^{<\pi}}{\cancel{x^4}\underbrace{\left(2 + \frac{\log(1+1/e^{2x})}{x}\right)}_{\vee \; 2}} < \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tg}\left(\underbrace{\frac{\pi x^4 - 3x^3}{x^3\log(1+e^{2x})}}_{\downarrow \; \pi/2^-}\right) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} y = +\infty$$

Confronto tra infiniti

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{b^x} = 0 \qquad \forall b>1,\ \forall \alpha\in\mathbb{R}$

E' interessante solo quando $\alpha>0$, perché è una forma ind.

Si dimostra con il teorema ponte

si prende $\{a_n\}\to+\infty$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(a_n)^\alpha}{b^{a_n}} = 0$

Questo vale $\forall \{a_n\}$

$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{b^x} = 0$

Se $b>1$, $\alpha>0$, l'esponenziale b^x è un infinito di ordine superiore rispetto a x^α per $x \to +\infty$.