Proprietà dei logaritmi (continua)

5) $\log_a(x^r) = r\log_a x$ $\quad \boxed{\forall x>0}$, $\forall a>0,\ a\neq 1$, $\forall r\in\mathbb{R}$.

(già dimostrata).

Attenzione: deve essere $x>0$.

Esempio:

$$\cancel{\underbrace{\log(x^2)}_{\text{definito } \forall x\neq 0} = \underbrace{2\log x}_{\text{definita solo per } x>0}}$$

$\boxed{\text{falso se } x<0.}$

Versione corretta

$$\log(x^2) = \log(|x|^2) \overset{5)}{=} 2\log|x| = \begin{cases} 2\log x & (x>0) \\ 2\log(-x) & (x<0) \end{cases}$$

6) Cambio di base del logaritmo.

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad \forall a,b>0\ ;\ a,b\neq 1.\quad \forall x>0.}$$

N.B è diverso da 0 perché $a\neq 1$.

Dim.

La 6) equivale a $\overbrace{\log_a x \log_b a}^{t} = \underbrace{\log_b x}$

questo a sua volta equivale a provare $(b^t = x)$

$$b^{\log_a x \log_b a} \overset{?}{=} x$$

$$\left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x \qquad \square$$

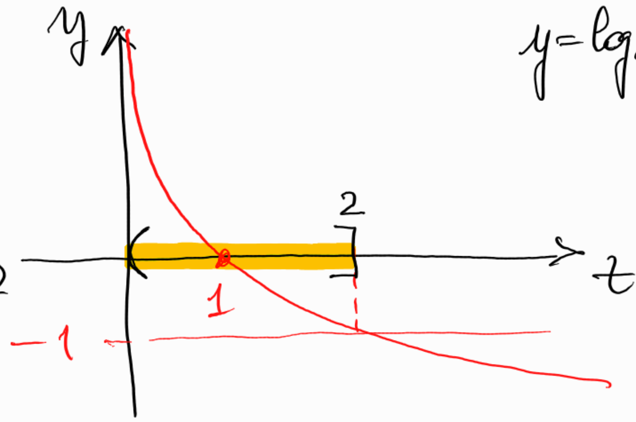
Conseguenza di 6):

Le funzioni $\log_a x$ sono ottenute una dall'altra moltiplicando per una costante (positiva o negativa)

Risolvere la diseq^{ne} $\log_{1/2}(\underbrace{8-2x^2}_{t}) \geq -1$.

$\log_{1/2} t \geq -1$.

$\log_{1/2} t_0 = -1 \iff t_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$



$\log_{1/2} t \geq -1 \iff 0 < t \leq 2$.

La diseq^{ne} corrisponde a

$$0 < 8 - 2x^2 \leq 2.$$

$$-8 < -2x^2 \leq -6$$

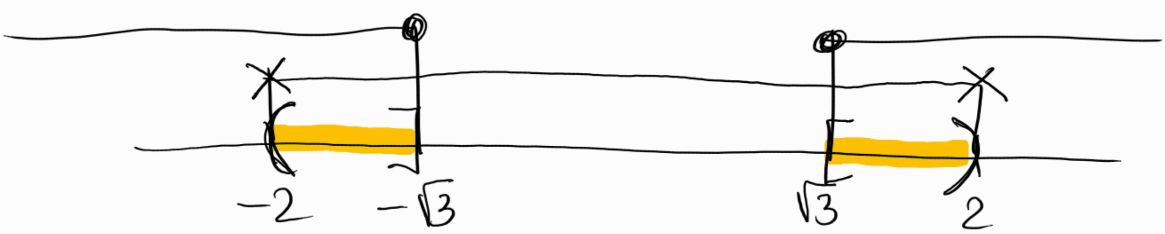
$$6 \leq 2x^2 < 8$$

$$3 \leq x^2 < 4$$

$$(-2 < x \leq -\sqrt{3}) \vee (\sqrt{3} \leq x < 2)$$

$x^2 < 4 \iff -2 < x < 2$.

$x^2 \geq 3 \iff (x \leq -\sqrt{3}) \vee (x \geq \sqrt{3})$



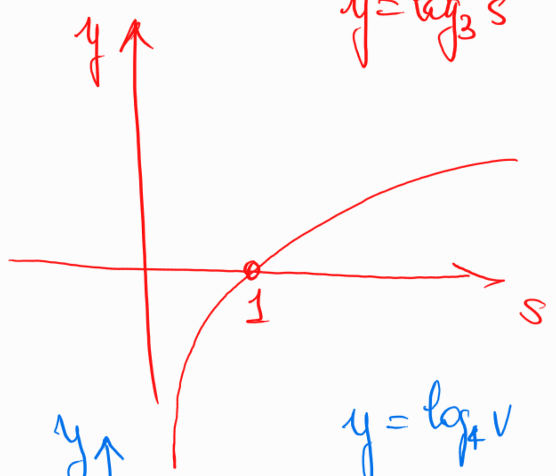
Trovare il dominio naturale di

$$f(x)=\Big(\overbrace{\log_3\big(\log_4(x^2-5)\big)}^{t}\Big)^{-1/4}$$

Cominciamo dalle funzioni più "esterne" nella composizione

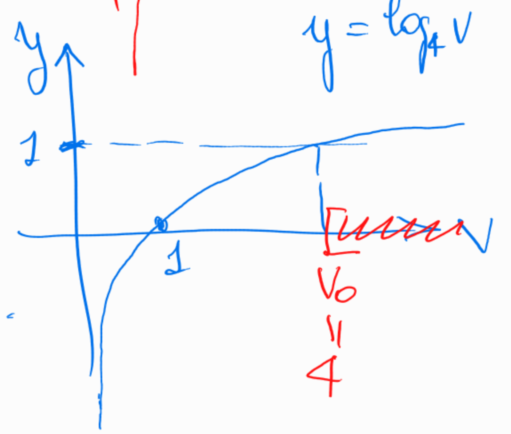
$t^{-1/4}$ ha senso se e solo se $t>0$.

$$\log_3\big(\underbrace{\log_4(x^2-5)}_{s}\big)>0$$



$\log_3 s>0 \iff s>1$

$$\log_4(\underbrace{x^2-5}_{v})>1.$$



$[\log_4 v>1 \iff v>4]$

$$x^2-5>4$$

$$x^2>9 \iff (x<-3)\vee(x>3)$$

$$\text{dom } f=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty).$$

$$f(x)=\log_{1/2}x+\log_{1/2}(|x|-1)\geq 0$$

Attenzione: sarebbe errato porre subito (senza altre considerazioni)

$f(x)=\log_{1/2}\big(x(|x|-1)\big)$ è scorretto perché il dominio di questa nuova f è diverso. (ho aggiunto intervalli).

Metodo corretto: Imponiamo $x>0$, $|x|-1>0$

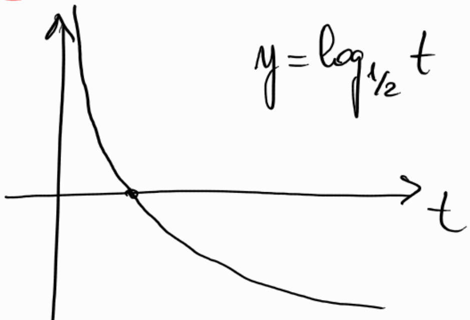
La disequazione diventa.

$$\begin{cases} x > 0 \\ |x| > 1 \iff (x<-1) \vee (x>1) \\ \underbrace{\log_{1/2}\big(\underbrace{x(|x|-1)}_{t}\big) \geq 0} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < x(|x|-1) \leq 1$$

già considerata



$\log_{1/2} t \geq 0 \iff 0 < t < 1$

$$x(x-1) \leq 1$$

$$x^2 - x - 1 \leq 0 \iff \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} \cancel{x > 0} \\ x > 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{cases} \iff \boxed{1 < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$