$\boxed{\textbf{DEF}}$ $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell, x_0 \in \mathbb{R}^*$ x_0 pto di accum per X

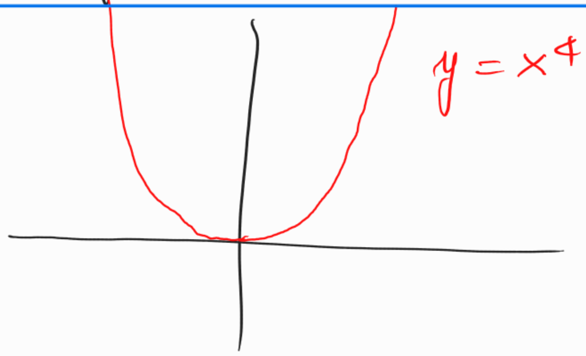
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall V$ intorno di ℓ $f(x) \in V$ def^{te} per $x \to x_0$

$\iff \forall V$ " " " $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$.

Per es (Caso 4: $x_0 = -\infty$, $\ell = +\infty$).

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) > M \ \forall x \in X \text{ verificante } x < k$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty}$$



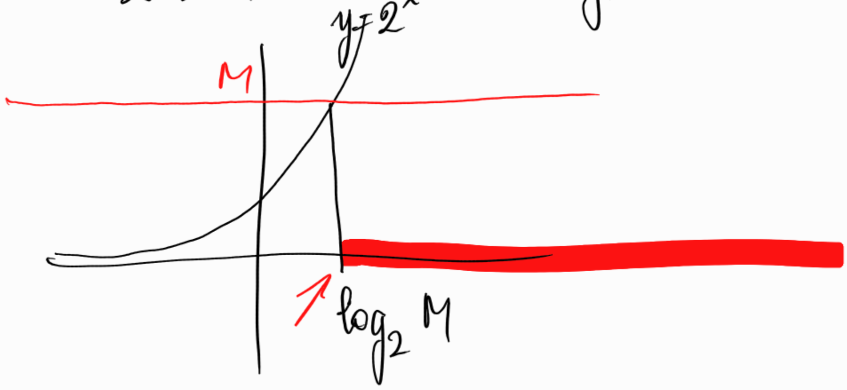
Fisso $M > 0$ arbitrario, cerco k t.c. $x^4 > M$ $\forall x$ verificante $x < k$.

$$x^4 > M \iff \left(x < -\sqrt[4]{M}\right) \vee \left(x > \sqrt[4]{M}\right) \Longleftarrow x < \underbrace{-\sqrt[4]{M}}_{=:k}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty}$$

Devo provare: $\forall M > 0 \ \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $2^x > M$ $\forall x$ verificante $x > k$.

$$2^x > M \iff x > \log_2 M =: k$$



$$\boxed{\lim_{x\to 3} \frac{x}{x+1} = \frac{3}{4}}$$

Verifica: $\forall \varepsilon > 0$ cerco $\delta > 0$ t.c. $\left|\frac{x}{x+1} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon \quad \forall x \neq -1$

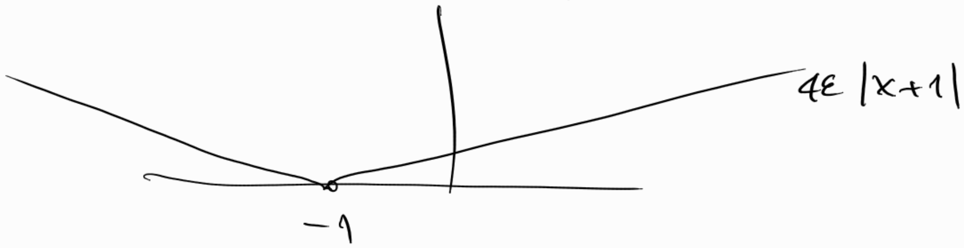
verificante $0 < |x-3| < \delta$

$$\left|\frac{x}{x+1} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{4x-3x-3}{4(x+1)}\right| = \frac{|x-3|}{4|x+1|} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$|x-3| < 4\varepsilon|x+1|$$

Basterebbe risolvere la diseq^{ne} e controllare che le soluzioni contengono un intorno di 3.



In alternativa

$$|x-3| < 12\varepsilon$$

$$\frac{|x-3|}{4|x+1|} \overset{\boxed{|x-3|<1}}{\leq} \frac{|x-3|}{12} < \varepsilon$$

Basta prendere

$$\delta = \min\{1, 12\varepsilon\}$$

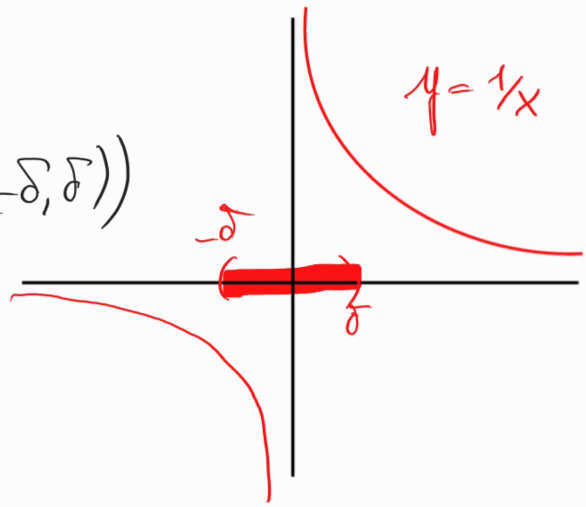
se $|x-3| < \delta \Rightarrow (|x-3| < 1) \wedge (|x-3| < 12\varepsilon)$

<u>OSS</u> se $|x-3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow 3 < x+1 < 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x+1| > 3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists$$

Infatti ogni intorno di 0 (della forma $(-\delta, \delta)$) contiene sia punti dove $\frac{1}{x} > 1$, sia punti dove $\frac{1}{x} < -1$.



Però se prendiamo la funzione $\frac{1}{x}$ "ristretta" a $(0,+\infty)$

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{x}\Big|_{(0,+\infty)} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1/x$$

Si vede che $\lim_{x\to 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\Big|_{(0,+\infty)} = +\infty$

Analogamente
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\Big|_{(-\infty,0)} = -\infty.$$

DEF Siano $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\ell \in \mathbb{R}^*$. $x_0 \in \mathbb{R}$.

Diremo che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ (limite da destra)

se la restrizione $f(x)\Big|_{X\cap(x_0,+\infty)}$ di f all'intervallo $(x_0,+\infty)$

verifica $\lim_{x\to x_0} f(x)\Big|_{X\cap(x_0,+\infty)} = \ell$, cioè:

$\forall\, V$ intorno di ℓ $\exists\, \delta>0$ t.c. $f(x)\in V$

$\forall x \in X \cancel{\cap(x_0,+\infty)}$ verificante $\cancel{0<|x-x_0|<\delta}$

$0 < x - x_0 < \delta$,

$x_0 < x < x_0 + \delta$

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ significa

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\Big|_{X\cap(-\infty,x_0)} = \ell. \quad \text{(limite da sinistra)}$$

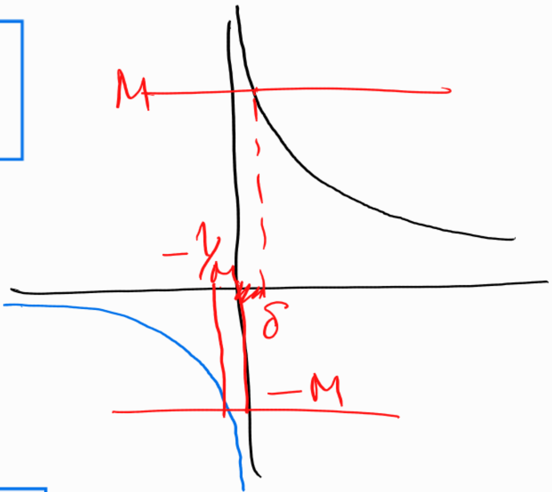
cioè:

$\forall\, V$ intorno di ℓ $\exists\, \delta>0$ t.c. $f(x)\in V$

$\forall x \in X$ $\cancel{(0<|x-x_0|<\delta)\wedge(x<x_0)}$

$x_0 - \delta < x < x_0$

Mostriamo che $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}$



$\forall M>0$, cerco δ t.c. $\frac{1}{x} > M$

$\forall x$ verificante $0<x<\delta$

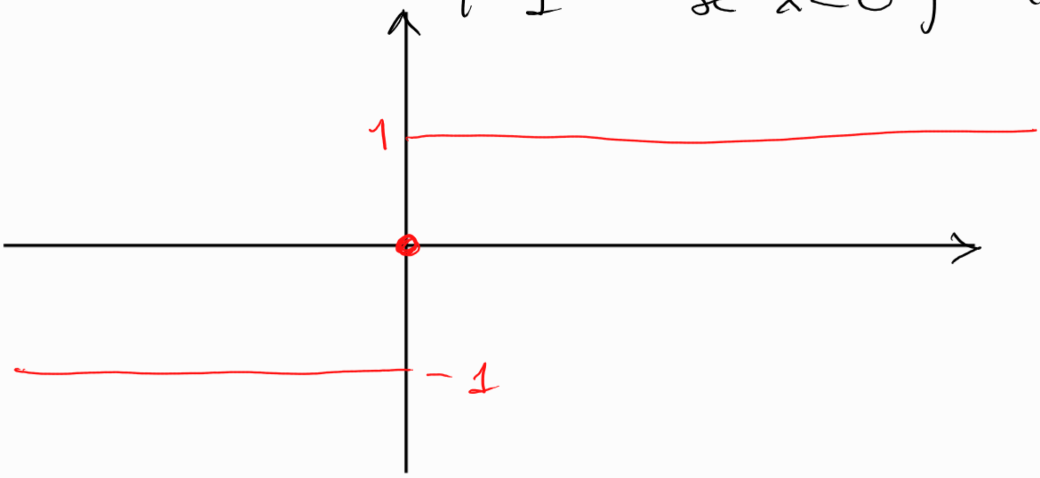
$\frac{1}{x} > M \iff 0<x<\frac{1}{M} =: \delta$

Verifichiamo che $\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.}$

$\forall M>0 \quad \exists \delta>0$ t.c. $\frac{1}{x} < -M$ $\forall x$ verificante $-\delta<x<0$

$\frac{1}{x} < -M \iff$ (vedi grafico) $-\frac{1}{M} < x < 0$ Prendiamo $\delta = \frac{1}{M}$

Sia $f(x) = \text{sign } x = \left.\begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}\right\} = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$



$\nexists \lim_{x\to 0} \text{sign } x$ ma $\exists \lim_{x\to 0^+} \text{sign } x = 1$

$\exists \lim_{x\to 0^-} \text{sign } x = -1$

OSS

Affinché si possa parlare di $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ $\left(\text{e } \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right)$

x_0 deve essere pto di accum. per $X \cap (x_0, +\infty)$, ossia:

in ogni intorno destro di x_0 esistono infiniti punti di X

$(x_0, x_0+\delta)$

risp. intorno sinistro di x_0

$(x_0-\delta, x_0)$

OSS. Se x_0 è punto di accum^{ne} sia sinistro che destro di x_0.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$$

DEF limiti per eccesso e per difetto.

$x_0\in\mathbb{R}^*$

$\ell\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell^+ \quad (\ell^-) \quad \text{se} \begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \ \text{ e} \\ f(x)\geq \ell \ (\leq) \ \text{def}^{te} \text{ per } x\to x_0 \end{cases}$$

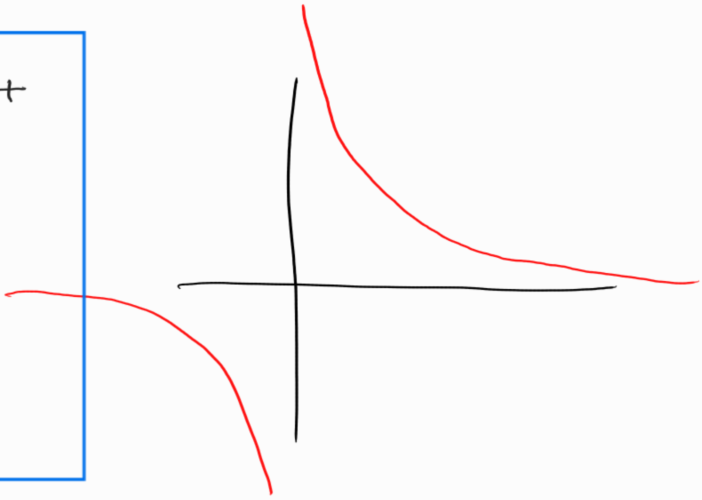
cioè: (se $x_0\in\mathbb{R}$) $\qquad \ell-\varepsilon<f(x)<\ell$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t.c. $\ell<f(x)<\ell+\varepsilon\ \forall x\in X$ verificante $0<|x-x_0|<\delta$.

Esempio $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2=0^+$

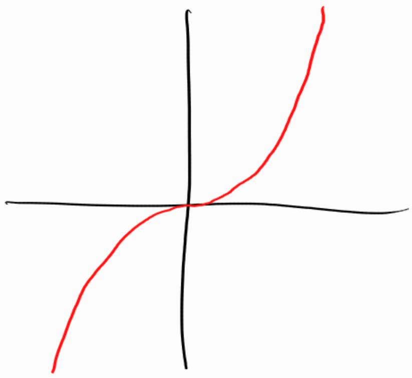
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$$



Si può mescolare con i limiti da destra e da sinistra

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} x^3=0^{\pm}$$



OSS se $\ell \in \mathbb{R}$.

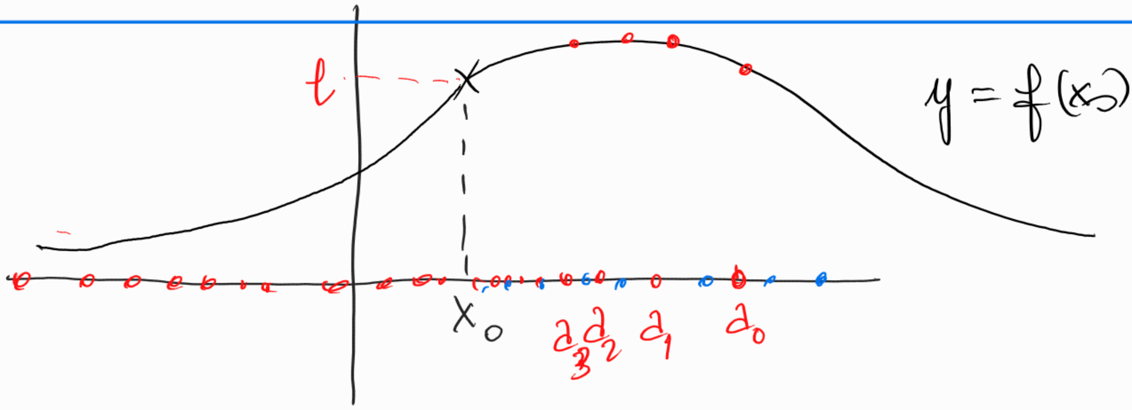
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \lim_{x\to x_0} (f(x)-\ell)=0 \iff \lim_{x\to x_0} |f(x)-\ell|=0$$

TEOREMA "PONTE" (tra limiti di succ^{ni} e limiti di funzioni)

Siano $f: X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\ell, x_0\in\mathbb{R}^*$, x_0 pto di accum. di X

Si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \forall \text{ succ}^{ne}\ \{a_n\}\subseteq X\setminus\{x_0\} \text{ t.c. } \lim_{n\to+\infty} a_n = x_0 \text{ si ha } \lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\ell.$$



Esempio di utilizzo.

Voglio provare che

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty.$$ usando il teorema ponte.

Sia $\{a_n\}$ una qualunque successione t.c. $a_n\to 0$, $a_n\neq 0$

$$f(a_n)=\frac{1}{a_n^2}\longrightarrow+\infty. \overset{\text{Teor. Ponte }(\Leftarrow)}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty.$$

$$\left.\begin{matrix} a_n\to 0\\ a_n\neq 0\end{matrix}\right| \Rightarrow a_n^2\to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{a_n^2}\to+\infty$$

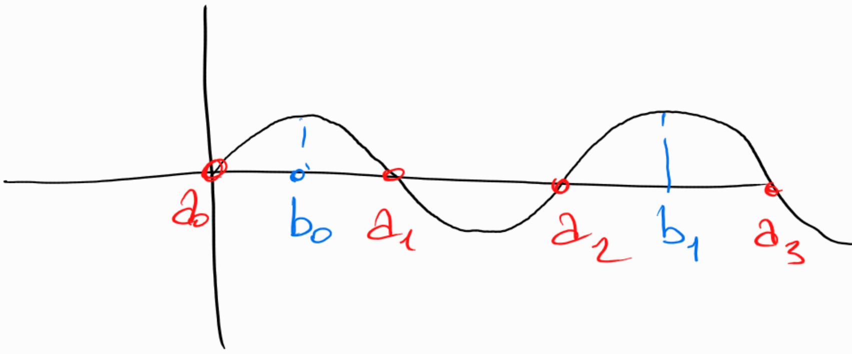
$$\lim_{x\to+\infty} b^x=\begin{cases}0 & \text{se } 0<b<1\\ 1 & b=1\\ +\infty & b>1\end{cases}$$

Dim con il teor. ponte.

Sia $a_n \to +\infty$, $0 < b < 1$ $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = 0 \overset{\text{Teor. ponte}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} b^x = 0$

Questo teorema ci permette anche di verificare la non esistenza dei limiti.

$$\boxed{\text{Proviamo che } \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x \ \nexists}$$



Se esistesse $\lim_{x\to+\infty} \sin x = \ell$,

allora $\forall \{a_n\}$ succ^ne^ t.c. $a_n \to +\infty$ dovrei avere $\sin a_n \to \ell$.

Esibiremo due succ^ni^ $\{a_n\}, \{b_n\}$ t.c. $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \sin a_n \neq \lim_{n\to+\infty} \sin b_n$$

$a_n = \pi n \to +\infty$ $\qquad \sin a_n = \sin(\pi n) = 0 \to 0$

$b_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \to +\infty$ $\qquad \sin b_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \to 1$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} \sin x \ \nexists$.