Oggi alle 14:00 Esercitazione in Aula 7.

Teorema di Bolzano-Weierstrass

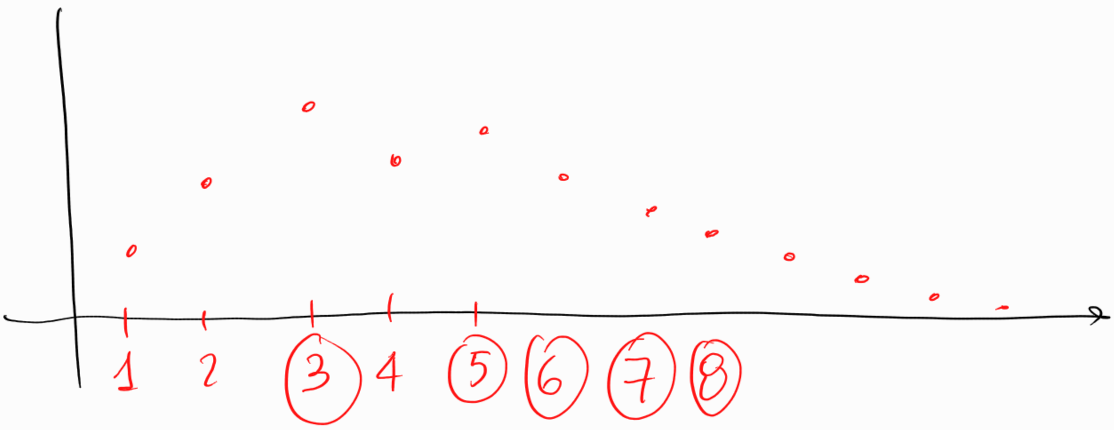
Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.

La dim. si basa sulla seguente proposizione

PROP. Ogni successione ammette una sottosuccessione monotòna.

Dim. Sia $\{a_n\}$ una successione.

Diremo che n è un picco della successione se $a_n \geq a_k \; \forall k > n$.



Ci sono due casi:
- o i picchi sono infiniti
- oppure i picchi sono in numero finito o nullo.

1) se i picchi sono infiniti, sia $\{k_n\}$ la succ^{ne} crescente dei picchi e considero la sottosucc^{ne} $\{a_{k_n}\}$

Questa sottosucc^{ne} è decrescente. Infatti

$a_{k_n} \overset{?}{\geq} a_{k_{n+1}}$ questo è vero perché k_n è un picco e $k_{n+1} > k_n$

2) se i picchi sono in numero finito, sia n_0 un numero più grande di tutti i picchi.

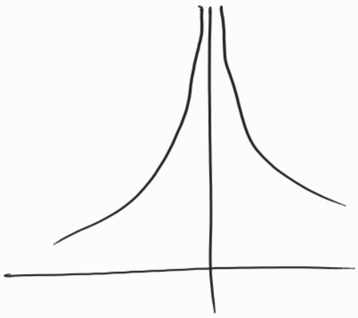
considero a_{n_0}: poiché n_0 non è un picco esiste un $n_1 > n_0$ t.c. $a_{n_1} > a_{n_0}$.

Neanche n_1 è un picco $\Rightarrow \exists\, n_2 > n_1$ t.c. $a_{n_2} > a_{n_1}$

... e così via.

Così facendo abbiamo costruito una sottosucc^{ne} (strettamente) crescente. $\square$

LIMITI DI FUNZIONI



Vogliamo definire espressioni del tipo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \,, \quad \lim_{x\to 5} (3x^2+x) = 80$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

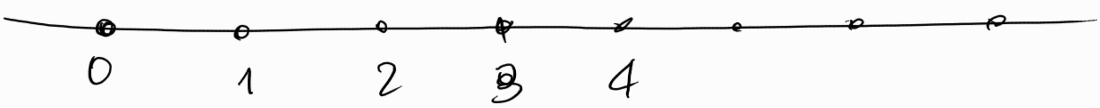
Consideriamo $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vogliamo definire $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Chi può essere x_0? dipende da X.

se $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, posso considerare $x \to x_0$ per x_0. Ha senso considerare $x_0 = 1/2$, $x_0 = 1$, $x_0 = 0$ perché mi posso avvicinare a tali punti con punti di $(0,1)$.
Non avrebbe senso considerare $x_0 = 2$ oppure $x_0 = -\infty$

se $f : (-\infty, 2) \to \mathbb{R}$. Posso considerare $x_0 \in [-\infty, 2]$.

$f : \underset{X}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{N}}} \to \mathbb{R}$ (è una successione e l'abbiamo chiamata $\{a_n\}$)

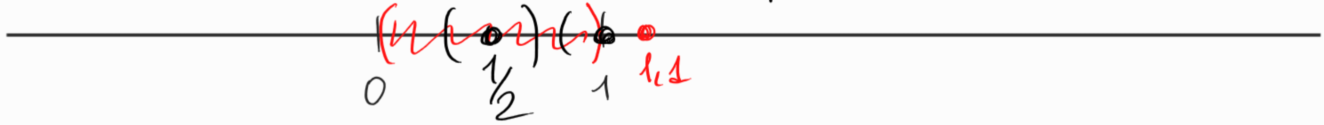


Non posso fare il limite per $x = n \to 4$ perché in un intorno piccolo di 4 non ci sono altri punti di $\mathbb{N}$. Posso solo fare il limite per $x \to +\infty$.

DEF Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. $x_0 \in \mathbb{R}^*$ si dice **punto di accumulazione** di X se <u>ogni</u> intorno di x_0 contiene infiniti punti di X. Se un punto di X non è punto di accumulazione di X, si dice **punto isolato di X**.

$X = (0,1)$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$ è punto di accum.? sì

1 è punto di accum? sì



$1{,}1$ è punto di accum? No

perché se prendo un intorno centrato in $1{,}1$ e di raggio $r \leq 0{,}1$, esso non contiene punti di $(0,1)$

L'insieme dei punti di accum di $X = (0,1)$ è $[0,1]$.

'' '' $X = [0,1]$ è $[0,1]$

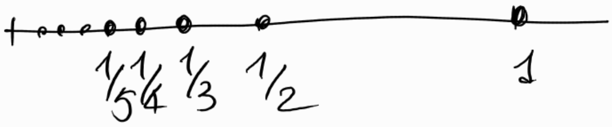
'' $X = (0,+\infty)$ è $[0,+\infty]$

'' '' '' $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è $\mathbb{R}^*$

'' '' '' $\mathbb{N}$ è $\{+\infty\}$

$\mathbb{N}$ è fatto tutto di punti isolati.

se $X = \left\{ \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}_+ \right\}$



è fatto da soli punti isolati, e l'unico punto di accumulazione è 0

Se $X = \mathbb{Q}$, l'insieme dei suoi punti di accumulazione è $\mathbb{R}^*$

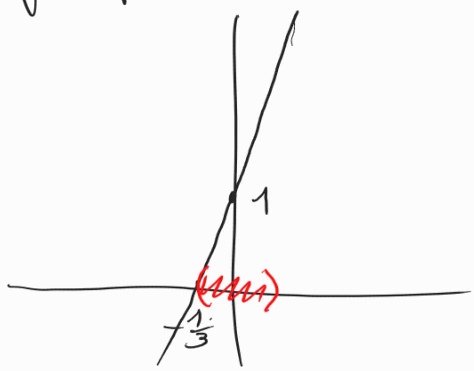
Proprietà verificate definitivamente

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, e $P(x)$ una proprietà dipendente da $x \in X$.
Diremo che $P(x)$ è vera definitivamente per $x \to x_0$ se
1) $x_0 \in \mathbb{R}^*$ è punto di accumulazione di X.
2) $\exists$ intorno $\mathcal{U}$ di x_0 t.c. $P(x)$ è vera $\forall x \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{x_0\}$

Esempio: (di solito, se non è specificato, si prende X l'insieme in cui ha senso la scrittura)

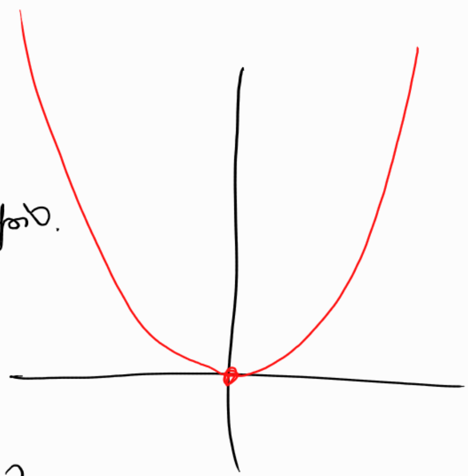
1) $3x+1>0$ def^{te} per $x \to 0$?
in questo caso $X = \mathbb{R}$

$3x+1>0 \iff x > -1/3$



Prendo l'intorno di centro 0 e raggio $\frac{1}{3}$
$\forall x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \setminus \{0\}$ si ha $3x+1>0$.

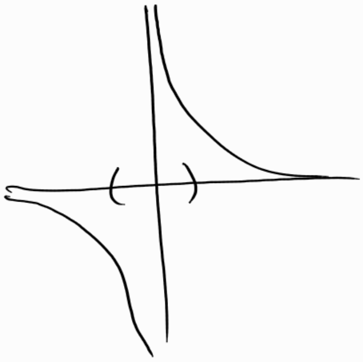
2) $x^2>0$ def^{te} per $x \to 0$. ?
Infatti prendo $\mathcal{U} = (-1,1)$ per esempio.
Allora $x^2>0$ $\forall x \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$



3) $x^2 > 1000$ def^{te} per $x \to +\infty$?
Sì, basta prendere l'intorno $\mathcal{U} = (\sqrt{1000}, +\infty]$
$\forall x \in \mathcal{U} \cap \mathbb{R}$ si ha $x^2 > 1000$

4) $\frac{1}{x} > 0$ def^{te} per $x \to 0$? $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

NO, perché ogni intorno di $x_0 = 0$ contiene punti in cui $\frac{1}{x} < 0$.



Se $X = \mathbb{N}$, la def^{ne} di definitivamente (per $n \to +\infty$) coincide con quella già vista

$P(n)$ è vera def^{te} per $n \to +\infty$ se $\exists k$ t.c. $P(n)$ è vera $\forall n > k$

equivale a dire che $\exists\, \mathcal{U} = (k, +\infty]$ t.c. $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathcal{U}$

DEF. Limite di funzioni.

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siano $x_0, \ell \in \mathbb{R}^*$ t.c. x_0 sia punto di accum. di X. Diremo che $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$, in simboli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{se}$$

per ogni intorno V di ℓ si ha

$f(x) \in V$ definitivamente per $x \to x_0$

cioè $\forall V$ intorno di ℓ $\exists\, \mathcal{U}$ intorno di x_0 t.c.

$$f(x) \in V \qquad \forall x \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{x_0\}$$

OSS Se f è definita in x_0, il suo valore in x_0 è irrilevante per la def^{ne} di limite.

1°) $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

x_0 punto di accum di $X = \mathrm{dom} f$

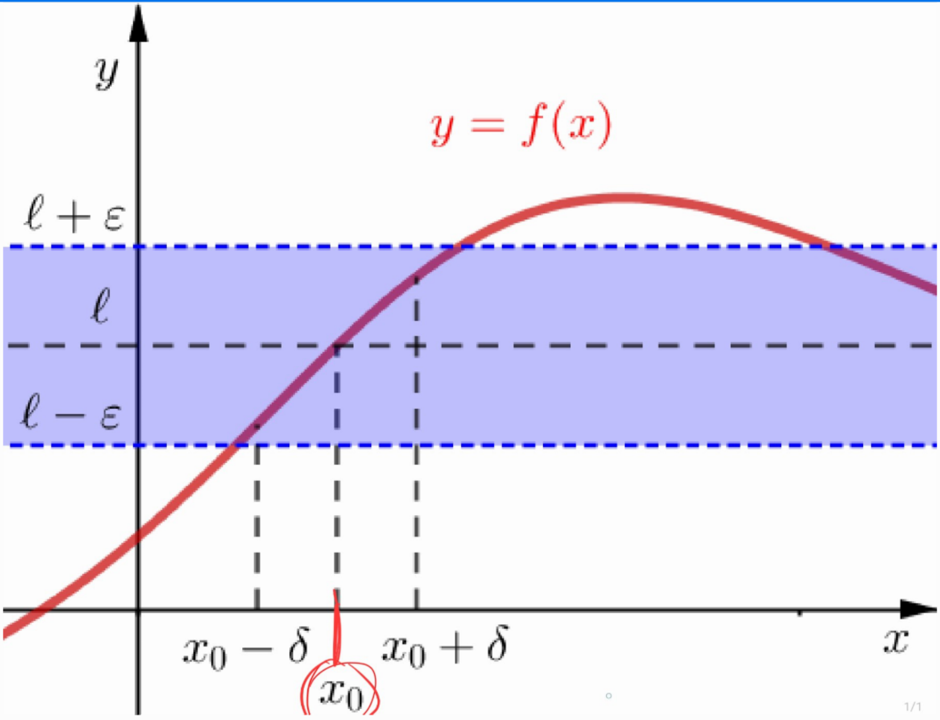
In questo caso gli intorni V sono del tipo

$$V = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) = \{y : |y - \ell| < \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0)$$

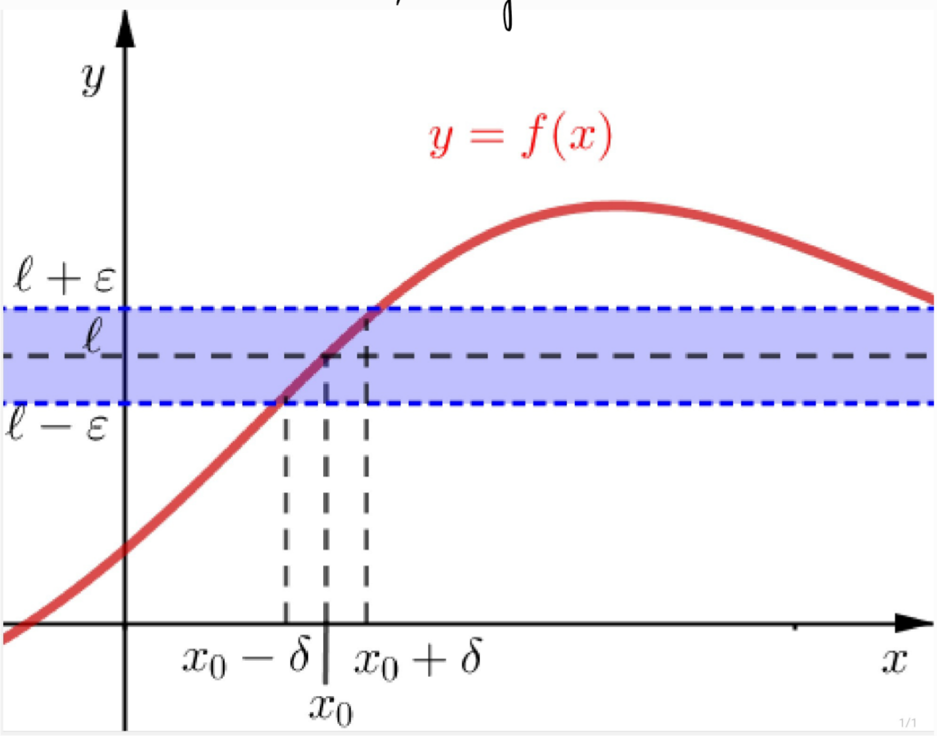
Gli intorni $\mathcal{U}$ di x_0 sono del tipo

$$\mathcal{U} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x : |x - x_0| < \delta\} \qquad (\delta > 0)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \text{t.c.} \ \overbrace{|f(x)-\ell|<\varepsilon}^{f(x)\in V} \quad \forall x\in X \ \text{t.c.} \ \underbrace{0<|x-x_0|<\delta}_{x\in U\setminus\{x_0\}}$$



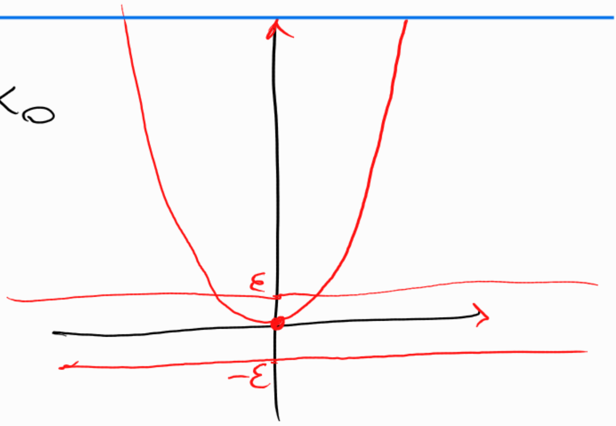
Se diminuisco ε, in generale dovrò diminuire δ



Ma se aumento ε, lo stesso δ di prima va bene.

<u>OSS</u> Se ho verificato la condizione del limite per un certo $\varepsilon_0 > 0$, essa è automaticamente verificata $\forall \varepsilon \geq \varepsilon_0$ (con la stessa scelta di δ), quindi basta verificarla $\forall \varepsilon$ t.c. $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ con ε_0 fissato da noi.

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ $\qquad \ell = 0 = x_0$



$\forall \varepsilon > 0$, cerco $\delta > 0$ t.c.

$$|x^2 - 0| < \varepsilon \quad \forall x \text{ t.c. } 0 < \underbrace{|x - 0|}_{|x|} < \delta$$

$$\Updownarrow$$

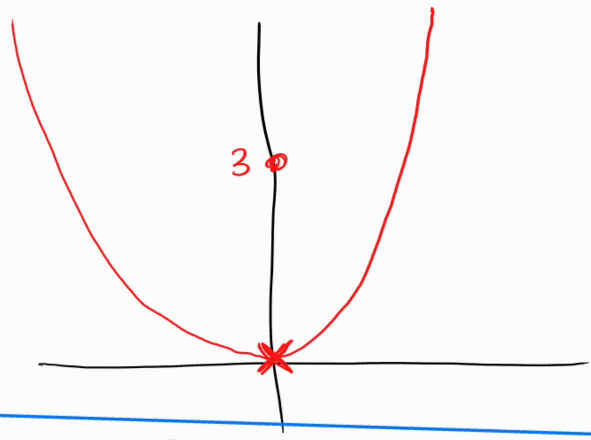
$$x^2 < \varepsilon \iff -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon} \iff |x| < \sqrt{\varepsilon} =: \delta$$

Quindi

se $0 < |x| < \delta = \sqrt{\varepsilon} \implies x^2 < \varepsilon$

<u>OSS</u> se avessi posto $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

potrei sempre dire che $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$



$\boxed{\underline{2^\circ \text{ caso}} \qquad x_0 = +\infty \qquad \ell \in \mathbb{R}}$

$V = \{|y - \ell| < \varepsilon\}$

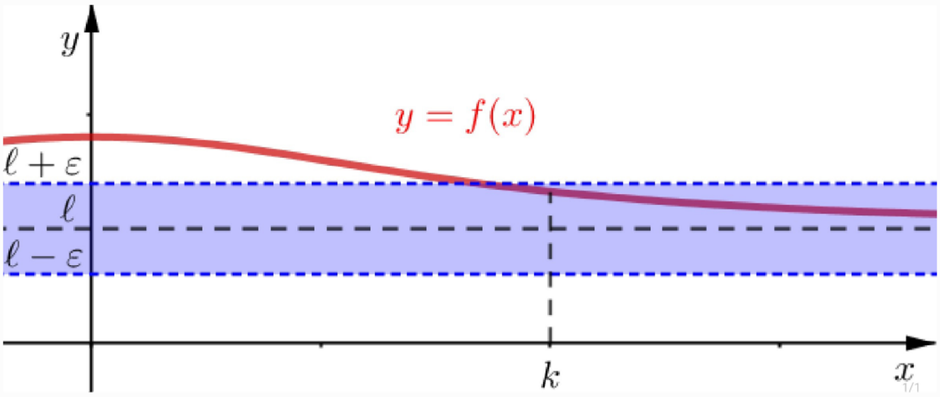
$U = (k, +\infty)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in X$ verificante $x > k$.

<u>Esempio</u> $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x - 6}} = 0$ $\qquad X = (6, +\infty)$

$\forall \varepsilon > 0$ cerco $k > 6$ t.c. $\frac{1}{\sqrt{x-6}} < \varepsilon \quad \forall x > k$


$y = f(x)$
y
$\ell + \varepsilon$
ℓ
$\ell - \varepsilon$
k
x

$$\frac{1}{\sqrt{x-6}} < \varepsilon \iff \sqrt{x-6} > \frac{1}{\varepsilon} \iff x-6 > \frac{1}{\varepsilon^2} \iff x > \underbrace{6+\frac{1}{\varepsilon^2}}_{=K}$$

3° caso $\quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad \ell = -\infty.$

$V = (-\infty, M)$

$U = \{ |x-x_0| < \delta \}$

La def^{ne} diventa

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) < M \quad \forall x \in X \text{ verificante } 0 < |x - x_0| < \delta$$

<u>OSS</u> Basta verificarlo $\forall M < 0$, quindi la def^{ne} diventa

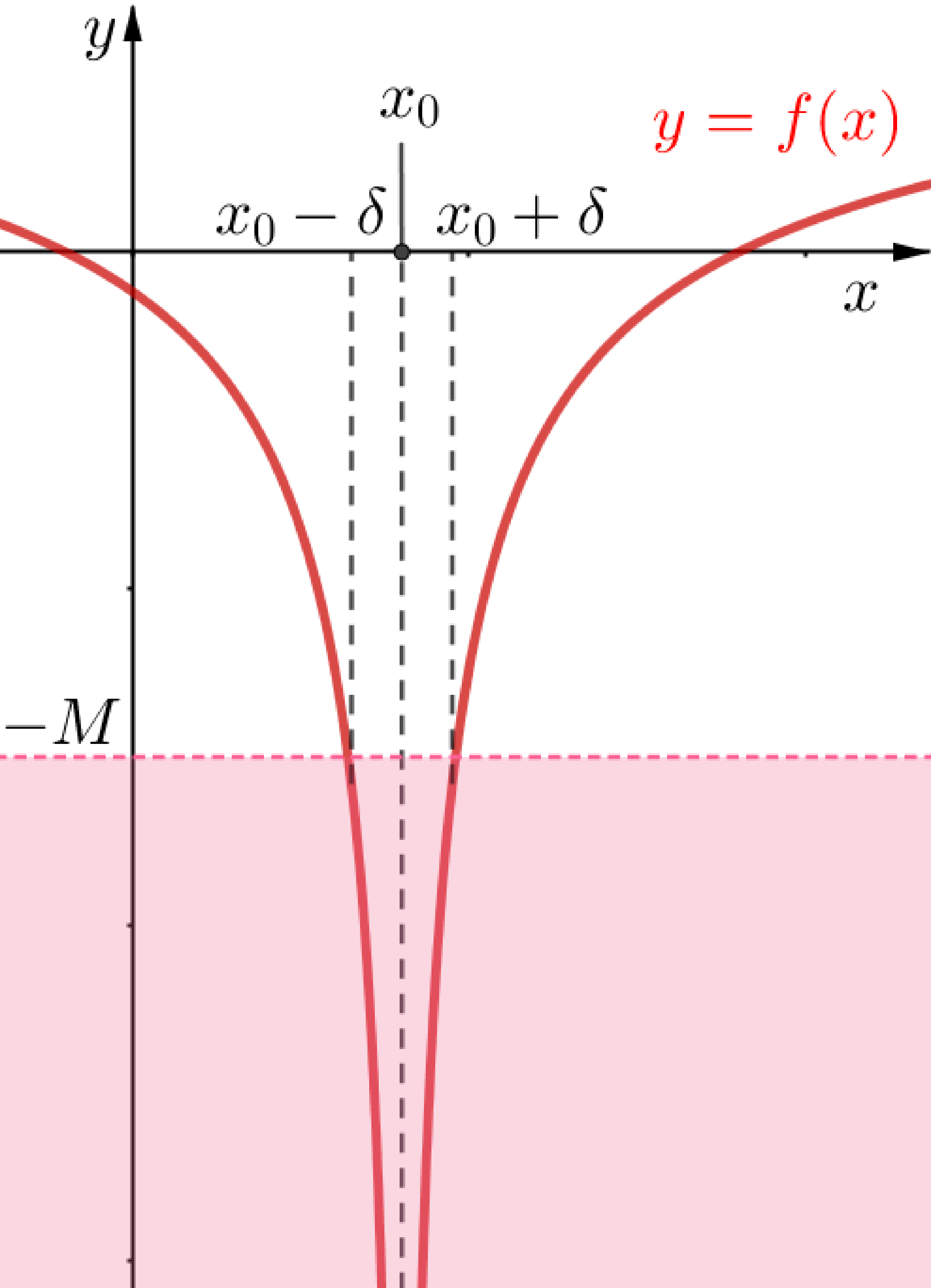
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) < -M \quad \forall x \in X \text{ verificante } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^4} \right) = -\infty$$

Verifica:

$\forall M > 0$ cerco $\delta > 0$ t.c. $-\dfrac{1}{x^4} < -M$ $\forall x$ verificante $0 < |x| < \delta$

$$-\frac{1}{x^4} < -M \iff \frac{1}{x^4} > M \iff 0 < x^4 < \frac{1}{M} \iff 0 < |x| < \underbrace{\frac{1}{\sqrt[4]{M}}}_{=\delta}$$



y
x_0
$y = f(x)$
$x_0 - \delta$
$x_0 + \delta$
x
$-M$