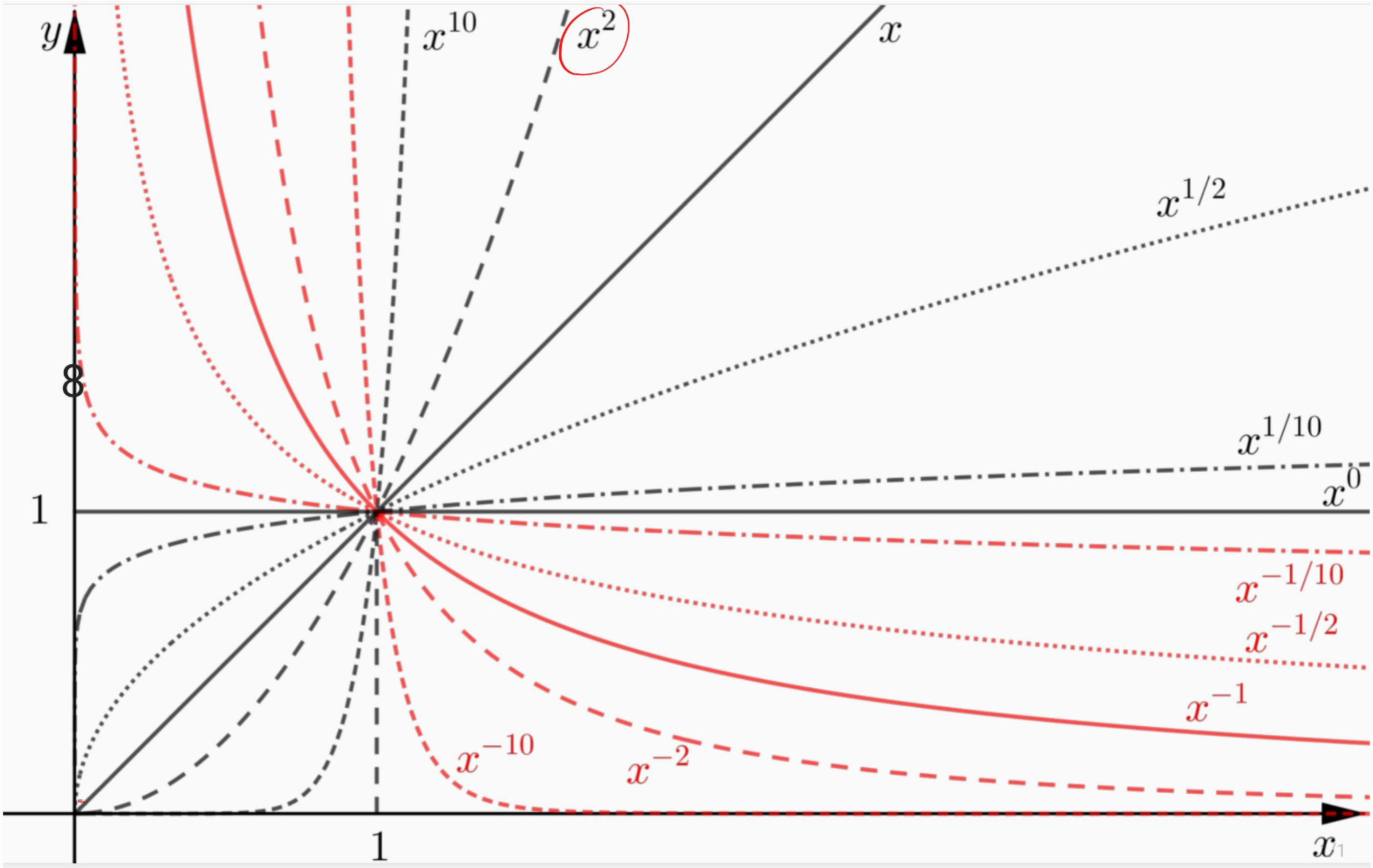


Grafici delle potenze per $x > 0$.

Attenzione

$$\sqrt[3]{x^3} = x$$

$$\sqrt[4]{x^4} = |x|$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+1/x^2}}{x} = -1$$

Equazioni e disequazioni irrazionali

Se compaiono radici di ordine dispari, è tutto facile.

$$\sqrt[3]{x^3-5} > x-1 \iff x^3-5 > (x-1)^3$$

$\left[a < b \iff a^3 < b^3 \quad \text{perché } f(x) = x^3 \text{ è strett. crescente.} \right]$

$$\iff \cancel{x^3}-5 > \cancel{x^3}-3x^2+3x-1$$

$$3x^2-3x-4>0.$$

$$x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+48}}{6} = \frac{3\pm\sqrt{57}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{57}}{6}.$$

sol^{ne} $\left(x < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{57}}{6}\right) \vee \left(x > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{57}}{6}\right)$

Questa diseq^{ne} potrebbe venir fuori come dominio di

$$f(x) = \log\left(\sqrt[3]{x^3-5} - x + 1\right)$$

Cosa succede se compaiono radici di ordine pari, per es

$$\sqrt[n]{P(x)} \gtrless Q(x)$$

n pari
$P(x), Q(x)$ polinomi?

Ci sono due problemi.

1) $\sqrt[n]{t}$ non è definita per $t<0$.

2) $f(x)=x^n$ non è crescente
strett. crescente in $[0,+\infty)$
" decrescente in $(-\infty,0]$.

$$\sqrt{x^2+4} = 2x \quad \begin{matrix} \Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow \end{matrix} \quad \boxed{x^2+4=4x^2} \quad \Longleftrightarrow$$

C.E $x^2+4\geq 0$ sempre verificata

Quindi quadrando potrei aggiungere sol^{ni}.
Posso trovare le sol^{ni} trovate a posterior

$$\Longleftrightarrow \quad 3x^2=4 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2=\frac{4}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ è sol^{ne}. $\quad \sqrt{\frac{4}{3}+4}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ non è sol^{ne} di quella di partenza

$$\sqrt{x^2+4}=2x$$

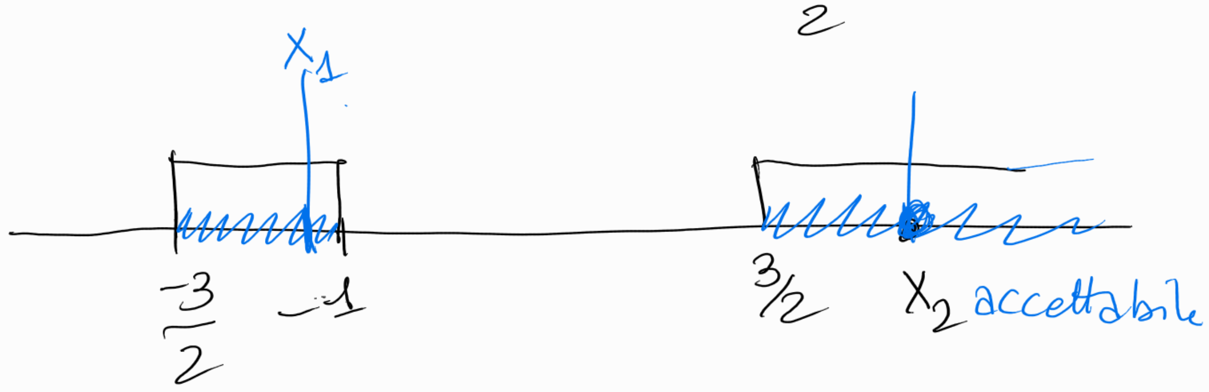
$$\begin{cases} x^2+4\geq 0 & \text{sempre vera} \\ 2x\geq 0 & x\geq 0 \\ x^2+4=4x^2 & x=+\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ok} \quad x=-\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ non accettabile} \end{cases}$$

$$\sqrt{2x+3} = \sqrt{4x^2-2x-6}$$

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 4x^2-2x-6 \geq 0 \\ 2x+3 = 4x^2-2x-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -3/2 \\ (x \leq -1) \vee (x \geq 3/2) \\ 4x^2-4x-9=0 \\ x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+36}}{4} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \\ \qquad = \dfrac{1 \pm \sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 - x - 3 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$



$$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x) \qquad n \text{ pari}$$

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \\ P(x) < Q(x)^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+3x+9} \leq x+3$$

$$\begin{cases} x^2+3x+9 \geq 0 \quad \text{sempre vera} \\ x+3 \geq 0 \\ x^2+3x+9 \leq (x+3)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{sempre vera} \\ x \geq -3 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \boxed{\text{sol}^{ni} \quad x \geq 0}$$

$$\cancel{x^2}+3x+\cancel{9} \leq \cancel{x^2}+6x+\cancel{9}$$

$x^2+3x+9 \geq 0$ sempre vera

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-36}}{}$

$\left(x^2+3x+\dfrac{9}{4}\right)+\dfrac{27}{4} > 0$

$\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 \geq 0$

$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x)$ $\boxed{n \text{ pari}}$

$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{P(x) \geq 0} \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) > Q(x)^2 \end{cases}$ implicata dalla 3ª

Esempio $\sqrt{3(x+1)} > 2x-1$

A $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x-1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (2x-1) \geq 0 \\ 3x+3 > 4x^2-4x+1 \end{cases}$

$x \geq -1$

$x < 1/2$

sol^ni A $\boxed{-1 \leq x < 1/2}$

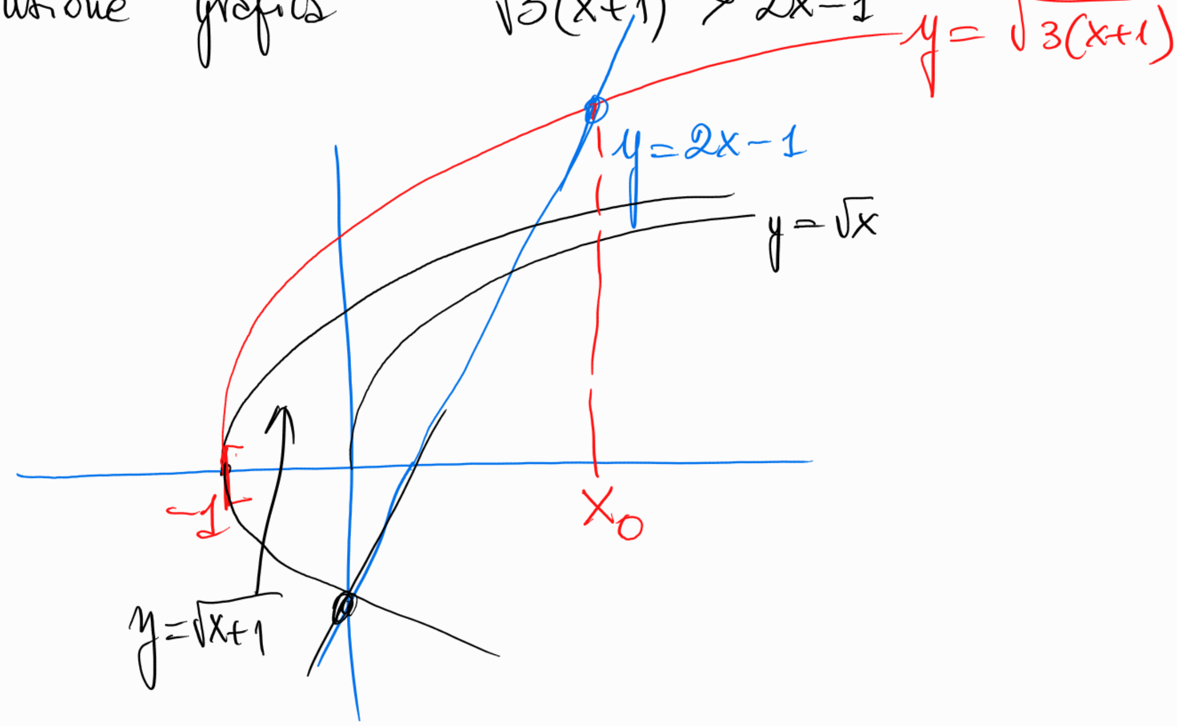
$\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 4x^2-7x-2 < 0 \end{cases}$ x $-\dfrac{1}{4} < x < 2$

sol^ni B $\boxed{\dfrac{1}{2} \leq x < 2.}$

$x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+32}}{8} = \dfrac{7 \pm 9}{8} = \begin{cases} -1/4 \\ 2 \end{cases}$

Sol^ni della diseq $-1 \leq x < 2$.

Risoluzione grafica $\sqrt{3(x+1)} > 2x-1$



x_0 è sol^{ne} di $\sqrt{3(x+1)} = 2x-1$