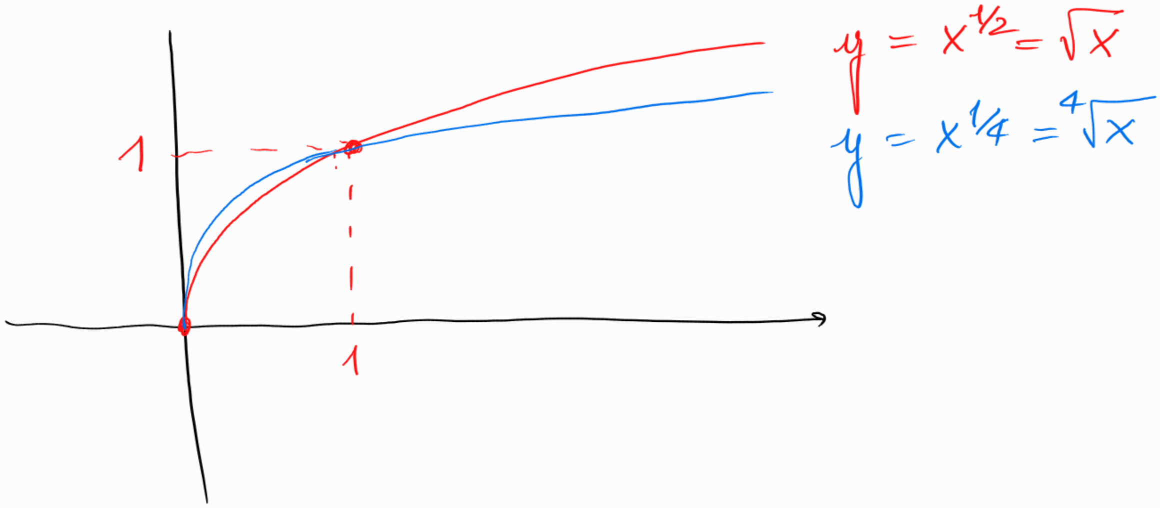
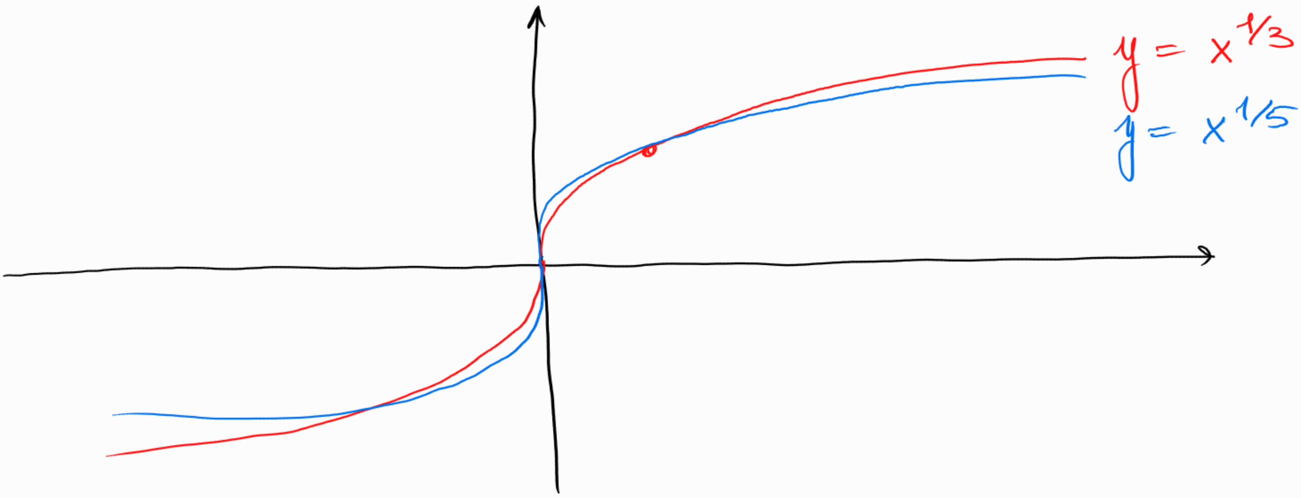
$x^{1/n}$ $n \in \mathbb{N}_+$, n pari.



$f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbb{N}_+$, n dispari.



Sia ora $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ $q > 0$. OSS semplifico sempre la frazione in modo che n, m siano primi tra loro.

$n, m \in \mathbb{N}_+$

$$x^q = x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$$

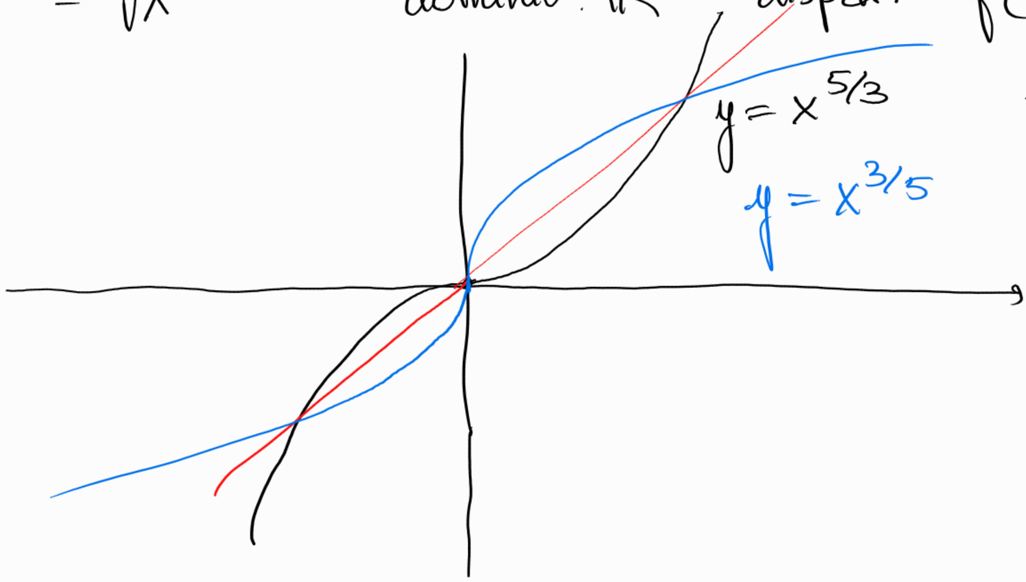
OSS. sono uguali, infatti elevando alla m ottengo lo stesso risultato x^n.

$x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Se $q \in \mathbb{Q}$, $q < 0$ $\quad q = -\frac{n}{m}$ $\quad n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$
n, m primi tra loro.

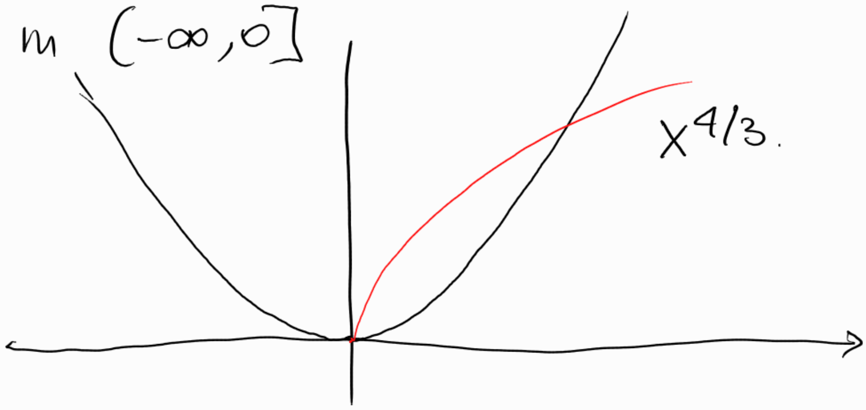
$$x^q = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{x^{n/m}}$$

$f(x) = x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5}$ $\quad$ dominio: $\mathbb{R}$ $\quad$ dispari $\quad f(-x) = (-x)^{5/3} =$
$= -\left(x^{5/3}\right) =$
$= -f(x)$
crescente.



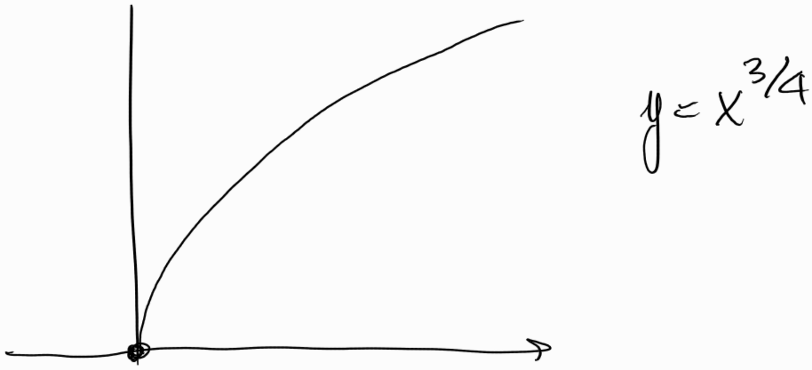
$f(x) = x^{3/5}$ dom $\mathbb{R}$, dispari, strett. crescente, è l'inversa della precedente

$f(x) = x^{4/3} = \sqrt[3]{x^4}$ $\quad$ dom $\mathbb{R}$, pari $\quad f(-x) = f(x)$
strett. crescente in $[0, +\infty)$
strett. decrescente in $(-\infty, 0]$

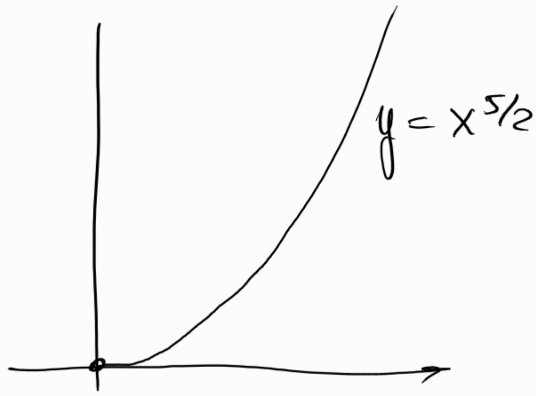


$f(x) = x^{3/4}$ dom. $[0, +\infty)$ strett. crescente.

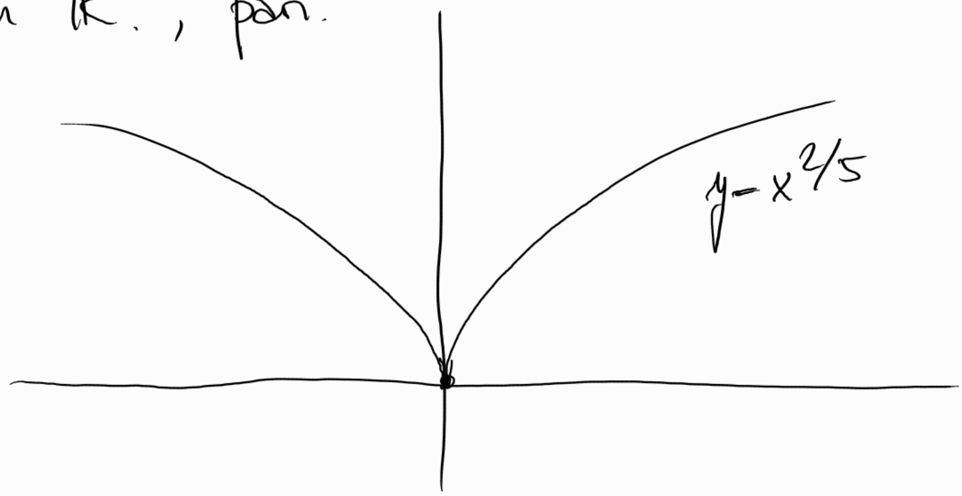
E' l'inversa di $x^{4/3}\Big|_{[0,+\infty)}$ ($x^{4/3}$ ristretta a $[0,+\infty)$)



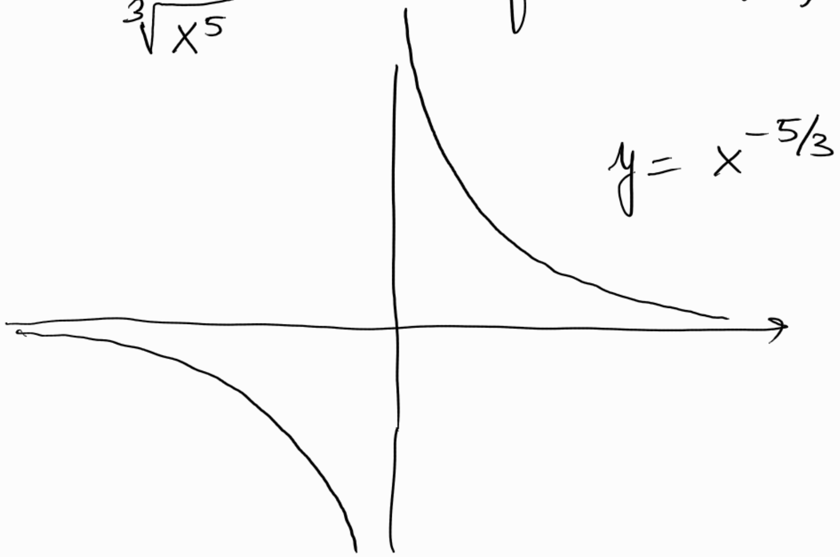
$f(x) = x^{5/2}$ dom. $[0,+\infty)$



$f(x) = x^{2/5}$ dom $\mathbb{R}$, pari.

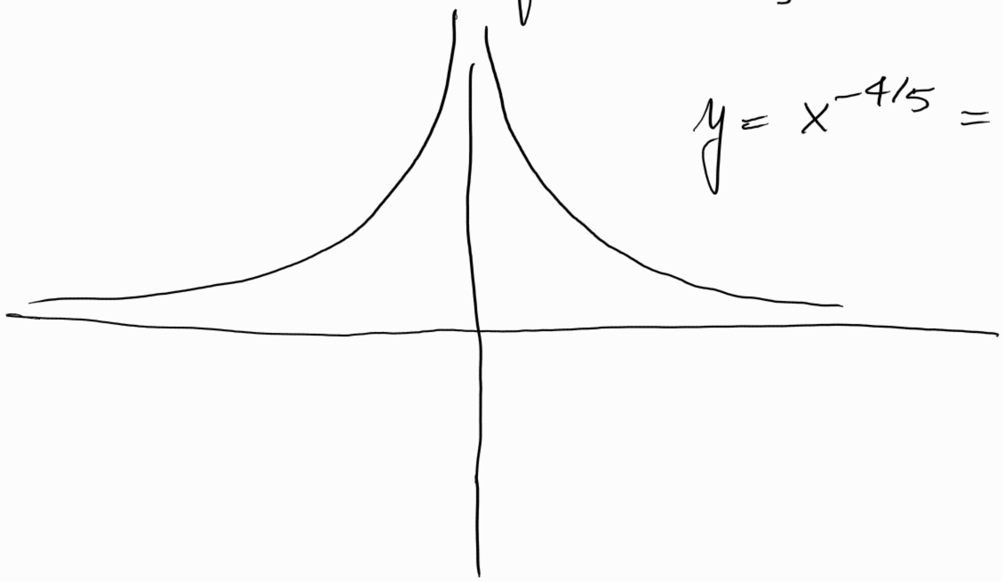


$f(x) = x^{-5/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$ dom $f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ dispari

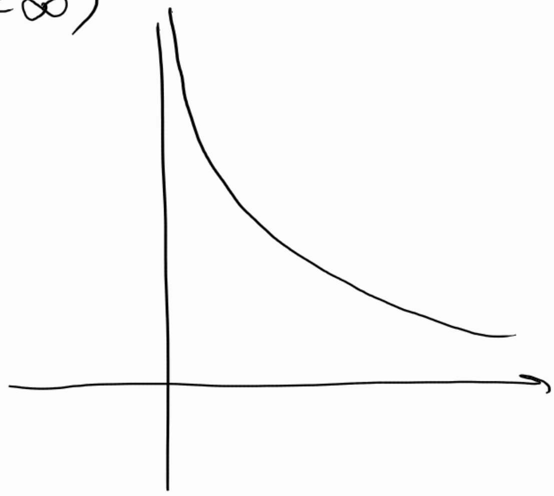


$f(x) = x^{-4/5}$ $\quad$ dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y = x^{-4/5} = \dfrac{1}{x^{4/5}}$



$f(x) = x^{-5/4}$ $\quad$ dom $f = (0, +\infty)$



Tutte queste funzioni x^q sono definite almeno in $(0, +\infty)$

Si dimostra che x^q così definito per $x \in (0, +\infty)$ e per $q \in \mathbb{Q}$.

verifica le usuali proprietà delle potenze

Potenze con esponente reale ma non razionale (irrazionale)

2^{π}

considero la successione $2^3, 2^{\frac{31}{10}}, 2^{\frac{314}{100}}, 2^{\frac{3141}{1000}}$

E' una succ^{ne} crescente di numeri reali.

Ne prendo il limite, cioè il sup.. Questo è 2^{π}.

Proprietà delle potenze a esponente razionale quando la base è >0:

Proprietà Per ogni $\underbrace{a,\ b \in \mathbb{R}^+}_{(0,+\infty)}$ e $r,\ s \in \mathbb{Q}$ risulta:

1) $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$;

2) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$;

3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

4) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$;

5) $a^r > 0, \quad a^0 = 1, \quad 1^r = 1$;

6) $\begin{cases} a^r > 1 & \text{se } a > 1 \text{ e } r > 0, \text{ oppure se } a < 1 \text{ e } r < 0 \\ a^r < 1 & \text{se } a < 1 \text{ e } r > 0, \text{ oppure se } a > 1 \text{ e } r < 0; \end{cases}$

7) $r < s \Rightarrow \begin{cases} a^r < a^s & \text{se } a > 1 \\ a^r > a^s & \text{se } a < 1; \end{cases}$

8) $0 < a \le b \Rightarrow \begin{cases} a^r \le b^r & \text{se } r > 0 \\ a^r \ge b^r & \text{se } r < 0 \end{cases}$

9) $\forall a \neq 1: \quad a^r = a^s \Rightarrow r = s$

(la 9) è una facile conseguenza della 7)).

1) Si definisce x^r in questo modo se $x > 1$, $r > 0$

2) $0 < x < 1$, $r > 0$ definisco $x^r = \frac{1}{(1/x)^r}$ $\boxed{\text{oss } \frac{1}{x} > 1}$

3) $x > 0$, $x \neq 1$, $r < 0$ definisco $\boxed{\text{oss. } -r > 0}$

$$x^r = \frac{1}{x^{-r}}$$

4) $1^r = 1 \quad \forall r \in \mathbb{R}$. 5) $0^r = 0 \quad \forall r > 0$

Si dimostra che per le potenze ad esponente reale così definite continuano a valere le proprietà viste prima

per es. $2^{3\pi} = (2^3)^\pi$ $\qquad 2^{3+\pi} = 2^3 \cdot 2^\pi$