Abbiamo visto le potenze x^n con $n \in \mathbb{Z}$.

Consideriamo

$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

<u>Pb.</u> è iniettiva?

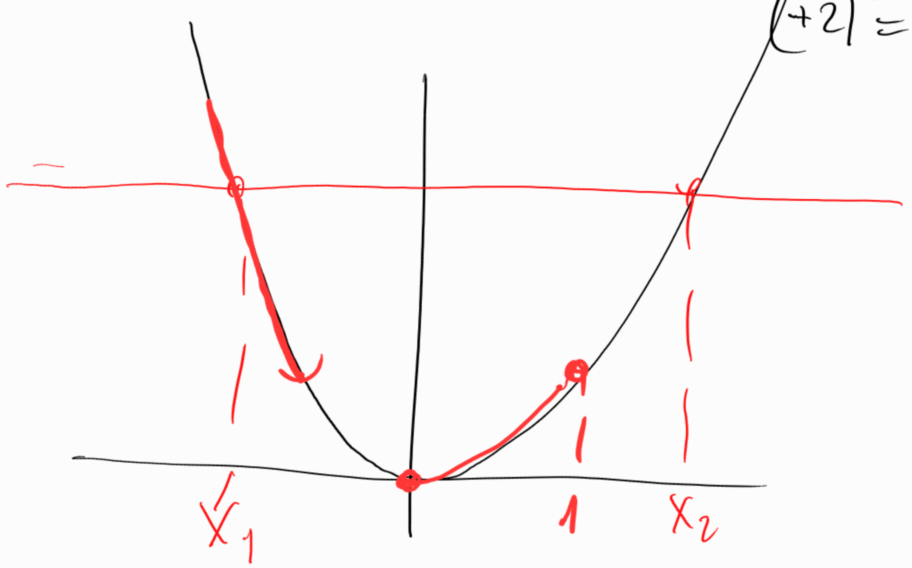
se $x_1 \neq x_2$, è vero che $f(x_1) \neq f(x_2)$? $x_1^2 = x^2$?

oppure in modo equivalente,

se $f(x_1) = f(x_2)$, si ha $x_1 = x_2$?

$x_1^2 = x_2^2$

La risposta è NO! Infatti (per es. $+2$ e -2 verificano $(+2)^2 = (-2)^2$)



In termini di grafico, f è iniettiva se e solo se ogni retta orizzontale interseca il grafico in al più un punto.

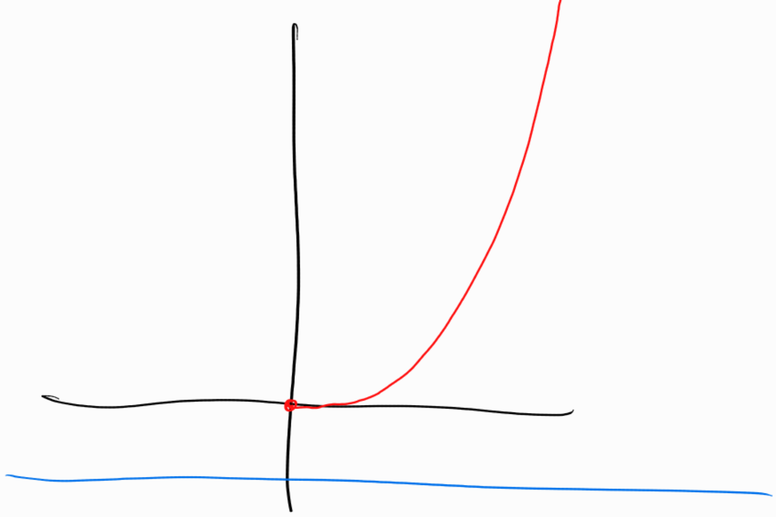
Per "recuperare" l'iniettività devo restringere il dominio a per es. $[0, +\infty)$ oppure $(-\infty, 0]$ opp. $(-\infty, -1) \cup [0, 1]$

Noi sceglieremo $[0, +\infty)$. (è una convenzione!)

$f(x) = x^2\big|_{[0,+\infty)} \to \mathbb{R}$ è iniettiva?

sì perché è strettamente crescente.

$x_1 \neq x_2$ (per es. $x_1 < x_2$) $\Rightarrow$ $x_1^2 < x_2^2$



$f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è suriettiva?
$x \mapsto x^2$

Significa: "tutti gli elementi dell'insieme di arrivo sono valori della funzione?"

oppure
" $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in [0,+\infty)$ t.c. $x^2 = y$ " ?

oppure, in termini di grafico.

"ogni retta orizzontale interseca il grafico di f in almeno un punto"?

NO, $x^2 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ non è suriettiva, in quanto i valori negativi non vengono mai assunti.

La suriettività si recupera in maniera naturale restringendo l'insieme di arrivo all'immagine, cioè ai valori effettivamente assunti

$f(x) = x^2 : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ è suriettiva.

La suriettività, anche in $[0,+\infty)$, non è banale.
Per es., preso $y = 2 \in [0,+\infty)$ devo dim. che $\exists x \in [0,+\infty)$ t.c. $x^2 = 2$.

<u>Due modi</u>.

1) Sia $A = \{ x \in [0,+\infty)$ t.c. $x^2 \leq 2 \}$.
Inoltre A è limitato superiormente, per es. $M=2$ è un maggiorante

Si prende $\lambda = \sup A$, e si dimostra che

non può essere $\lambda^2 < 2$. (si contraddirebbe una proprietà del sup.)

non può essere $\lambda^2 > 2$. (λ non sarebbe il minimo dei maggioranti)

Resta $\lambda^2 = 2$.

<u>2° modo</u> (usando l'analisi e la continuità).

$f(x) = x^2$ è una funzione continua in $[0, +\infty)$. intervallo

Teorema f continua in un intervallo assume tutti i valori compresi tra $\inf f = 0$ e $\sup f = +\infty$

Quindi assume anche il valore 2. ($\exists\, x \in [0, +\infty)$ t.c. $x^2 = 2$).

Potendo ripetersi il procedimento $\forall y \in [0, +\infty)$, f è suriettiva.

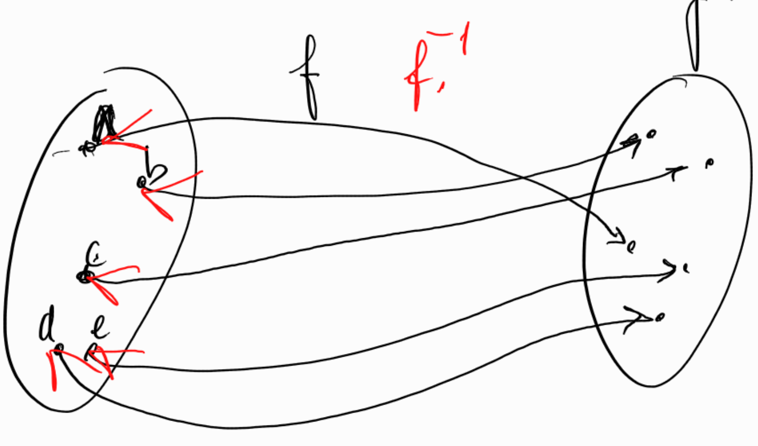
$f(x) = x^2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è $\underbrace{\text{iniettiva e suriettiva}}_{\text{biiettiva}}$.

Se $f: A \to B$ è biiettiva. vuol dire che

$\forall y \in B \quad \exists!\, x \in A \quad$ t.c. $f(x) = y$

Resta definita una funzione f^{-1} $B \to A$

$y \mapsto$ l'unico $x \in A$ t.c. $f(x) = y$.



Nel caso di $f(x) = x^2 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$$
$y \mapsto$ l'unico x t.c. $x^2 = y$.

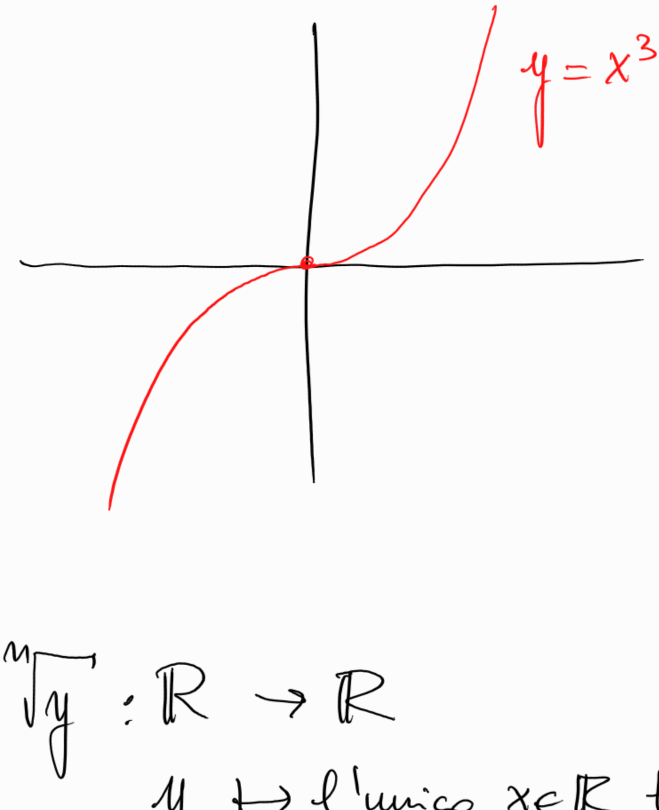
$f(x) = x^4$ o x^6 vale lo stesso discorso:

biiettiva da $[0,+\infty)$ a $[0,+\infty)$.

L'inversa si chiama $\sqrt[4]{y}$ oppure $\sqrt[6]{y}$.

Se $f(x) = x$, oppure x^3 opp. x^5 o in generale x^n $n \in \mathbb{N}$ dispari.

$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$ dispari) $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è biiettiva.



$$f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$ n dispari $\in \mathbb{N}$.

$y \mapsto$ l'unico $x \in \mathbb{R}$ t.c. $x^n = y$.

$\sqrt[n]{y} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ $\quad y^{1/n}$ $\quad n$ pari

$\sqrt[n]{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$ $\quad y^{1/n}$ $\quad$ " dispari grafico di f^{-1}. $\quad f: A \to B$.

$(x,y) \in \text{graf } f \iff f(x) = y$.

$x \in A$

$y \in B$

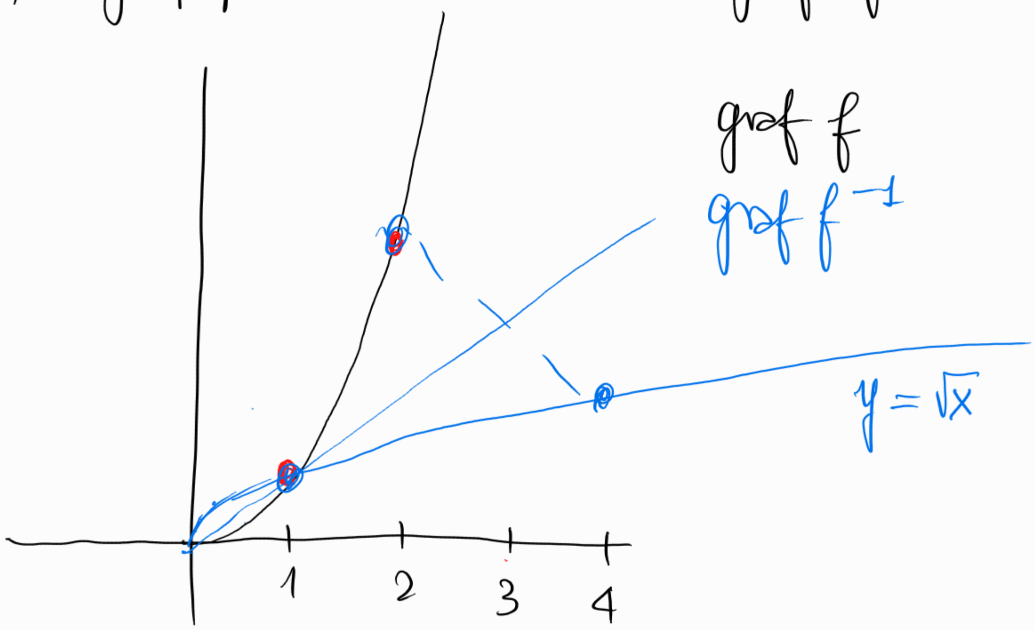
$x \in A,\ y \in B$.

$(x,y) \in \text{graf } f \iff f(x) = y \underset{f \text{ biettiva.}}{\iff} x = f^{-1}(y) \iff$

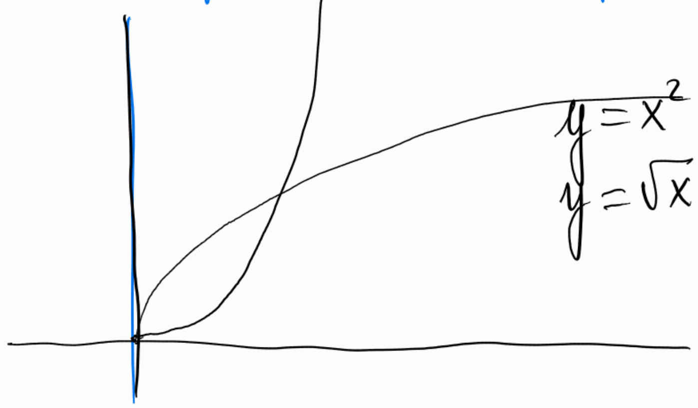
$(y,x) \in \text{graf } f^{-1}$

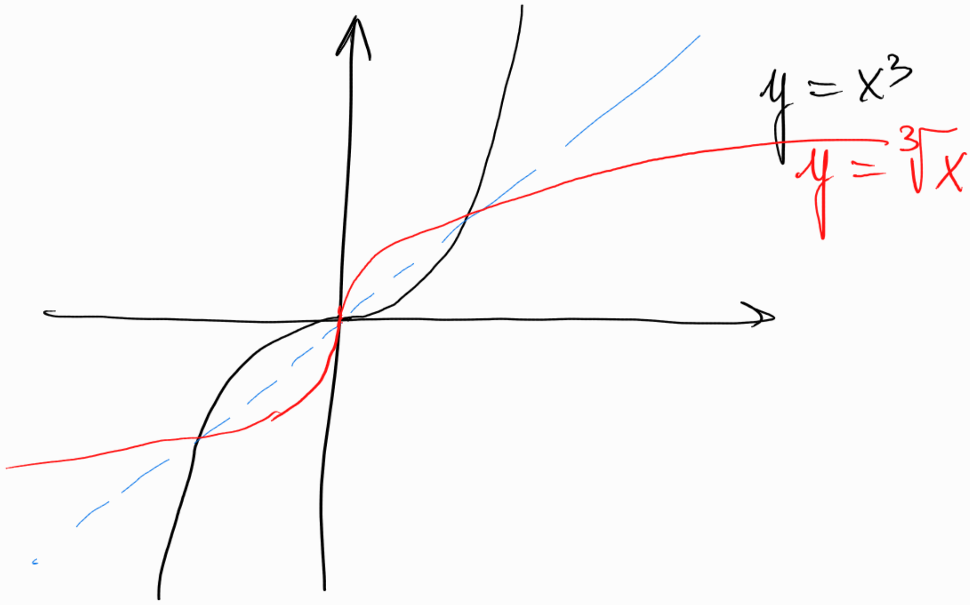
$f(x) = x^2 : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$

$(2,4) \in \text{graf } f \iff (4,2) \in \text{graf } f^{-1}$.



Se f è biettiva, il grafico di f^{-1} si ottiene dal grafico di f prendendo i pti simmetrici rispetto alla bisettrice del 1°/3° quadr




$y = x^3$
$y = \sqrt[3]{x}$