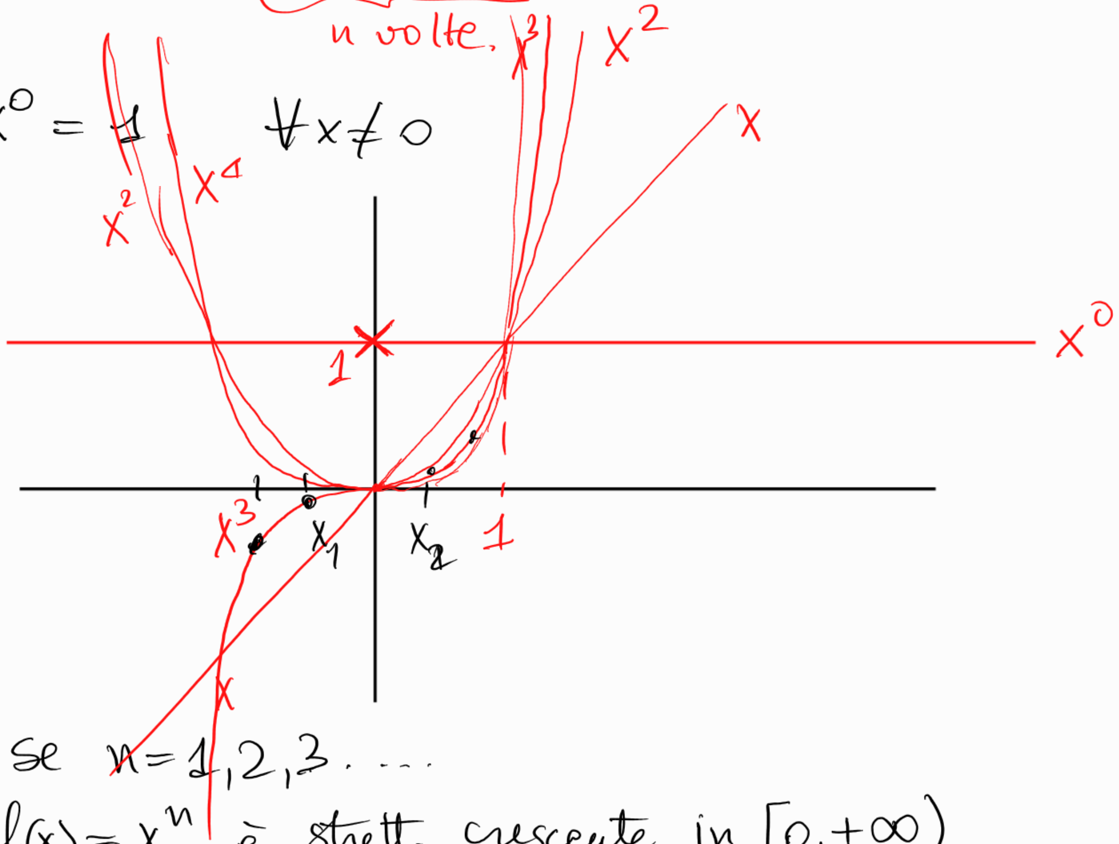
Potenze. Cominciamo con esponenti interi naturali.

$f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \dots x}_{n \text{ volte}}$ $\qquad n \in \mathbb{N}$.

$x^0 = 1 \quad \forall x \neq 0$



OSS se $n = 1, 2, 3 \dots$

$f(x) = x^n$ è strett. crescente in $[0, +\infty)$.

Significa: $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ t.c. $0 \leq x_1 < x_2$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Per $n=1$ è ovvio. $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow \underset{x_1}{\underset{\parallel}{f(x_1)}} < \underset{x_2}{\underset{\parallel}{f(x_2)}}$

$n = 2$ $\qquad$ se $0 \leq x_1 < x_2 \overset{?}{\Longrightarrow} x_1^2 \overset{?}{<} x_2^2$

$$x_2^2 - x_1^2 \overset{?}{>} 0$$

$$\underbrace{(x_2 - x_1)}_{\vee \atop 0}\underbrace{(x_2 + x_1)}_{\vee \atop 0} \overset{?}{>} 0 \quad \text{sì.}$$

Si potrebbe procedere in modo simile $\forall n$, ma è più semplice così:

Se $f_1, f_2 : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stett. crescenti e positive $\Rightarrow f_1(x) f_2(x)$ è stett. crescente

OSS se non sono anche positive è falso,
Per esempio $f_1(x) = f_2(x) = x$ è crescente in $\mathbb{R}$, ma
$f_1(x) \cdot f_2(x) = x^2$ non è crescente in $\mathbb{R}$.

$$x_1 < x_2 \implies f_1(x_1) f_2(x_1) \overset{?}{\leq} f_1(x_2) f_2(x_2)$$

f_2 cresc $\Downarrow$ $\Downarrow$ f_1 crescente

$f_1(x_1) \leq f_1(x_2)$ moltiplico per $f_2(x_1) > 0$ $\Rightarrow f_1(x_1) f_2(x_1) \leq f_1(x_2) f_2(x_1) \leq f_1(x_2) f_2(x_2)$

$\Downarrow$

$f_2(x_1) \leq f_2(x_2)$ moltiplico per $f_1(x_2) > 0$

$f(x) = x$ è stett. crescente e positiva in $[0, +\infty)$

$\Rightarrow x^2 = f(x) f(x)$ è stett. cresc e positiva in $[0, +\infty)$.

$\Rightarrow x^3 = x^2 \cdot x$ è stett. crescente e positiva in $[0, +\infty)$

e così via.

Il comportamento di $f(x) = x^n$ per $x < 0$ è compl. diverso se n è pari o dispari.

$f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$ dispari.

è una funzione dispari, cioè

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(-2)^3 = -8 = -2^3$$

$$f(-x) = (-x)^n \underset{n \text{ dispari}}{=} -x^n = -f(x)$$

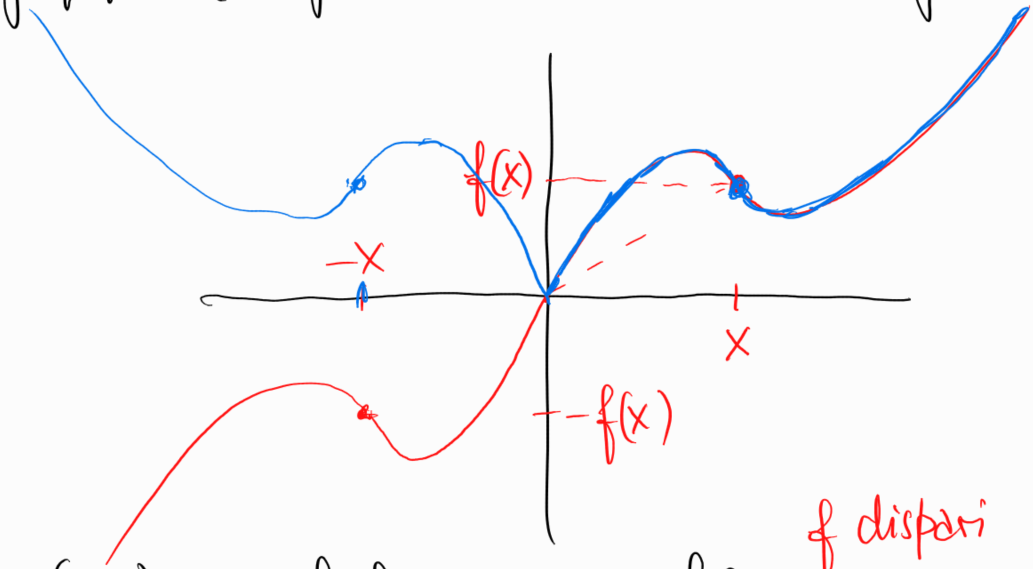
In termini di grafico, una funzione è dispari se e solo se il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

$$\begin{aligned} f: \ & A \longrightarrow B \\ & x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

$$\text{graf } f = \{(x,y) \in A \times B \ (\text{cioè: } x \in A, y \in B) \text{ t.c. } y = f(x)\}$$

Nel caso usuale in cui $f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x)$

$$\text{graf } f = \{(x,y) \in E \times \mathbb{R} \ (\text{cioè: } x \in E, y \in \mathbb{R}) \text{ t.c. } y = f(x)\}$$



$$(x,y) \in \text{graf } f \iff y = f(x) \overset{f \text{ dispari}}{\iff} -y = -f(x) = f(-x)$$
$$\Updownarrow$$
$$(-x,-y) \in \text{graf } f.$$

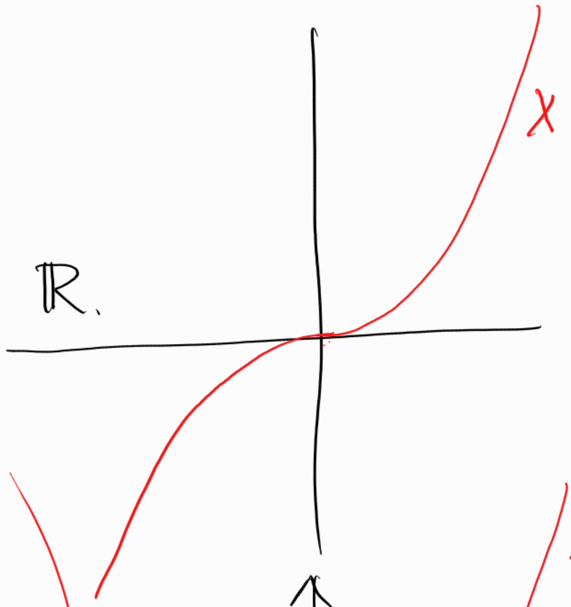
$f(x) = x^n$ pari è una funzione pari, cioè
$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

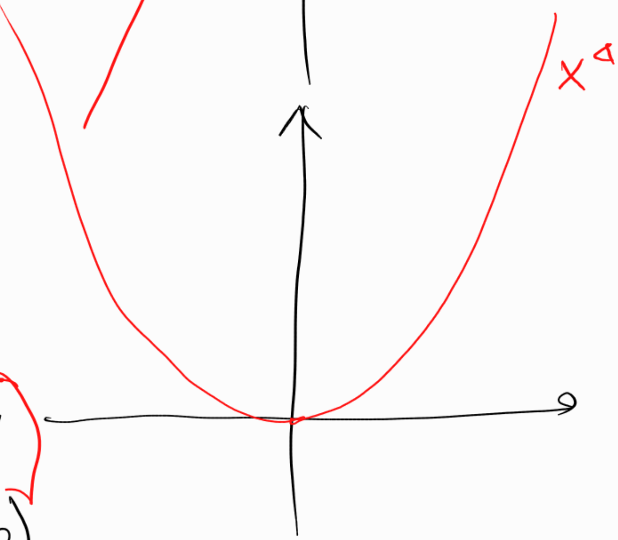
Una funzione è pari se e solo se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

$f(x) = x^n$ $\quad n$ dispari

è positiva in $(0, +\infty)$
negativa in $(-\infty, 0)$
nulla in 0.

strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$.





$f(x) = x^n$ $\quad n$ pari

$f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
$\quad = 0 \quad$ per $x = 0$

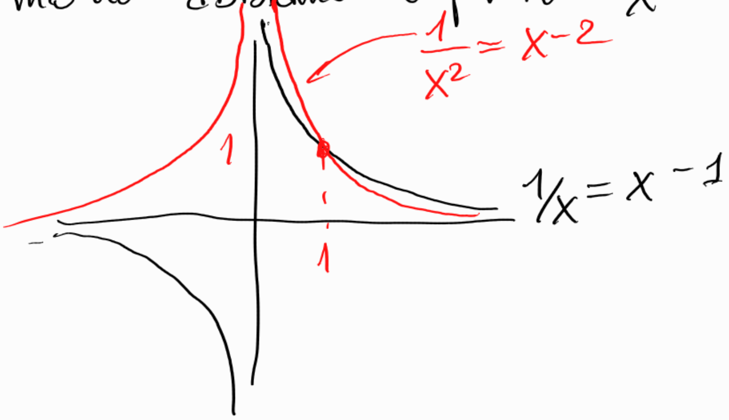
[Strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$
" $\quad$ crescente in $[0, +\infty)$

<u>OSS</u> non c'è contraddizione nel fatto che 0 appartenga a a entrambi gli intervalli.

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ t.c. $x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Definiamo x^{-n} come $\dfrac{1}{x^n}$ $\quad n = 1, 2 \dots$
deve essere $x \neq 0$.

In questo modo abbiamo definito $x^n \ \forall n \in \mathbb{Z}$



$f(x) = \frac{1}{x}$ è decrescente in $(0,+\infty)$ e in $(-\infty,0)$

ma non è decrescente nel suo dominio.

Infatti se fosse decrescente dovrebbe essere

$$-1 < 1 \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ -1}}{f(-1)} > \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{f(1)} \quad \text{falso.}$$