$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-5^n}{3^n+1} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{5^n}{3^n}}_{=\left(\frac{5}{3}\right)^n \to +\infty} \frac{(-1+o(1))}{(1+\underbrace{o(1)}_{\text{una succ}^{ne}\text{ infinitesima}})} = (-1+o(1)) = (+\infty\cdot(-1)) = -\infty$$

$$3^n+1 = 3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right) = 3^n(1+o(1))$$

$$2^n-5^n = 5^n\left(\underbrace{\frac{2^n}{5^n}}_{=\left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0} - 1\right) = 5^n(-1+o(1))$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\underbrace{\sqrt{n^3+n}}_{\to +\infty} - \underbrace{n}_{\to +\infty}\right) = (+\infty-\infty) =$$

$$\sqrt{n^3+n} = \sqrt{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = n^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^{3/2}}_{\to +\infty} \underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}_{1+o(1)} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{o(1)}\right)}_{=1+o(1)} = (+\infty\cdot 1) = +\infty$$

oppure:

$$\sqrt{n^3+n} - n = \underbrace{n}_{\to +\infty} \underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{n+\frac{1}{n}}}_{\to +\infty} - 1\right)}_{\to +\infty} \to +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - 2n\right) = (+\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{n}_{\to +\infty} \underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 2\right)}_{\to -1} = -\infty.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=(+\infty-\infty)=\frac{1}{2}.$$

$$\left[\sqrt{n^2+n}-n=\underbrace{n}_{\to+\infty}\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)}_{\to 0}\ \text{non porta a nulla}\right]$$

OSS $\sqrt{n^2+n}-n=$ $\qquad (A-B)(A+B)=A^2-B^2$

$$=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+n}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$=\frac{\cancel{n}\ 1}{\cancel{n}\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}_{\to 2}}\to\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)=$$

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$

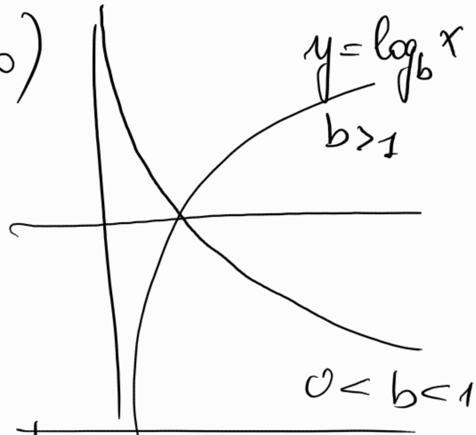
$A=\sqrt[3]{n^3+n}\qquad B=n.$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)\left((n^3+n)^{2/3}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2\right)}{(n^3+n)^{2/3}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\cancel{n^3}+n)-\cancel{n^3}}{(n^3+n)^{2/3}+n(n^3+n)^{1/3}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1\ \cancel{n}}{n^{\cancel{2}}\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2/3}+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/3}+1\right]}_{\to 3}}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\underbrace{\log_{1/2}(n^3)}_{\downarrow\,-\infty}-\underbrace{\log_{1/2}(n+1)}_{\downarrow\,+\infty}\Big)=(-\infty+\infty)$$



$$=\lim_{n\to+\infty}\log_{1/2}\Big(\underbrace{\boxed{\frac{n^3}{n+1}}}_{\downarrow\,+\infty}\Big)=-\infty$$

$$\boxed{\log_{1/2}x-\log_{1/2}y=\log_{1/2}\frac{x}{y}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\underbrace{\boxed{\frac{n^2-2n}{2n^2+1}}}_{\searrow\,\frac{1}{2}}\Big)^{-n\,\to\,-\infty}=\text{"}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}\text{"}=+\infty$$

Oppure:

$$\left(\frac{n^2-2n}{2n^2+1}\right)^{-n}=e^{\overset{-\infty\,\uparrow}{-n}\,\overbrace{\log\left(\frac{n^2-2n}{2n^2+1}\right)}^{\to\,\log\frac{1}{2}=-\log 2<0}}\longrightarrow+\infty.$$

$\underbrace{-n\log\left(\frac{n^2-2n}{2n^2+1}\right)}_{\downarrow\,+\infty}$ $\boxed{e>1}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{nx-3}\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Vediamo l'esponente $nx-3\xrightarrow{n\to+\infty}\begin{cases}+\infty & x>0\\ \text{vale } -3 & x=0\\ -\infty & x<0\end{cases}$

$$\Rightarrow\quad n^{nx-3}\begin{cases}\to+\infty & x>0\\ =1/n^3\to 0 & x=0\\ \to 0 & x<0\end{cases}$$

In caso di dubbi scrivere $n^{nx-3}=e^{(nx-3)\log n}$

Limiti di successioni monotòne (crescenti/decrescenti)

$A \subseteq \mathbb{R}$, $\quad f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice crescente se
decrescente

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$
$$\geq$$

Vale anche per successioni (il cui dominio è $\mathbb{N}$).

$$\{a_n\}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n$$

Una successione è crescente se

$$n_1 < n_2 \implies a_{n_1} \leq a_{n_2}$$

o, in modo più semplice, se

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \underline{\forall n \in \mathbb{N}}.$$

OSS per successioni, questo equivale alla crescenza

$\{a_n\}$ si dice definitivamente crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \geq \bar{n}$

Una succ^{ne} monotòna è una succ^{ne} crescente opp. decrescente.

TEOREMA Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Allora:

- se $\{a_n\}$ è crescente, $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$
- se $\{a_n\}$ è decrescente, $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Conseguenza. E' un modo facile per individuare l'estremo sup. o inferiore di una successione.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_+} \frac{5n^2 - 2}{n^2} \quad = a_n$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}_+} \frac{5n^2 - 2}{n^2}$$

$a_n = \frac{5n^2-2}{n^2} = 5 - \frac{2}{n^2}$ è crescente.

$a_{n+1} \geq a_n \iff \cancel{5} - \frac{2}{(n+1)^2} \geq \cancel{5} - \frac{2}{n^2} \iff$

$\iff \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2} \iff (n+1)^2 \geq n^2$ vero $\forall n$

La succ^{ne} è strett. crescente.

$\Rightarrow \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \min_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_1 = 3$

$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(5-\frac{2}{n^2}\right) = 5$

Teorema

<u>Dim. Teorema</u> Supp. $\{a_n\}$ <u>crescente</u>, e sia $L = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Voglio provare che $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = L$.

<u>1° caso</u> $L \in \mathbb{R}$. Per la caratterizzazione del sup.

1) $L \geq a_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$;

2) $\forall \varepsilon>0 \quad \exists\, \bar{n}\in\mathbb{N}$ t.c. $a_{\bar{n}} > L-\varepsilon$.

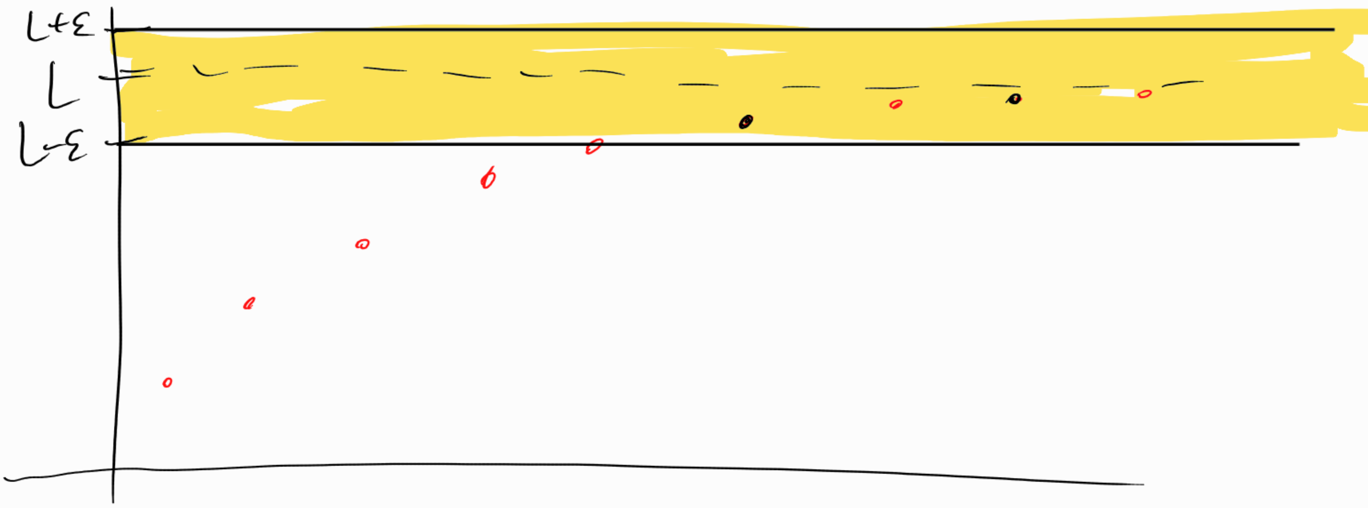
<u>Tesi</u>: $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N}$ t.c. $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon \quad \forall n\geq n_0$

Fix $\varepsilon>0$. per la proprietà 2) $\exists\, \bar{n}$ t.c. $a_{\bar{n}} > L-\varepsilon$.

Se $n > \bar{n}$ succ^{ne} crescente

$$L-\varepsilon < a_{\bar{n}} \leq a_n \overset{(1)}{\leq} L < L+\varepsilon$$

Ho provato che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$



2° caso se $L = +\infty$

Ipotesi: $\sup a_n = +\infty$, cioè

$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{\bar{n}} > M$

Tesi $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, cioè

$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n > M \quad \forall n \geq \bar{n}$

Dim. Fisso $M > 0$, per ipotesi $\exists \bar{n}$ t.c. $a_{\bar{n}} > M$.

Sia $n > \bar{n} \rightarrow \quad a_n \geq a_{\bar{n}} > M$ che era la tesi $\square$

Se $\{a_n\}$ decrescente $\rightarrow$ rifare la dim.

$\rightarrow \{-a_n\}$ crescente $\Longrightarrow$

$$\lim_{n \to +\infty} (-a_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (-a_n)$$ per il teorema sulle succni crescenti

$$\begin{array}{ccc} \lim_{n \to +\infty} (-a_n) & = & \sup_{n \in \mathbb{N}} (-a_n) \\ \| & & \| \\ -\lim_{n \to +\infty} a_n & = & -\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n \end{array}$$

$\Downarrow$ la tesi cambiando segno.

COROLLARIO:

Una successione crescente è convergente se e solo se essa è limitata sup.

" " è divergente se e solo se è illimitata sup.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1^{+\infty}\right)$$ forma indeterminata.

$$\left(2+\frac{1}{n}\right)^n \to +\infty$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n \to 0$$

TEOREMA La succ^{ne} $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente e limitata superiormente. Quindi essa converge a un numero reale detto $e \approx 2{,}718281828 4\ldots$ che è detto costante di Nepero o di Eulero.