



ELETTROTECNICA

Principi ed applicazioni di Ingegneria Elettrica

Corso di Laurea in Ingegneria Civile (6 CFU)

Lezione 05 – Reti elettriche in regime stazionario



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Prof. Alberto Geri

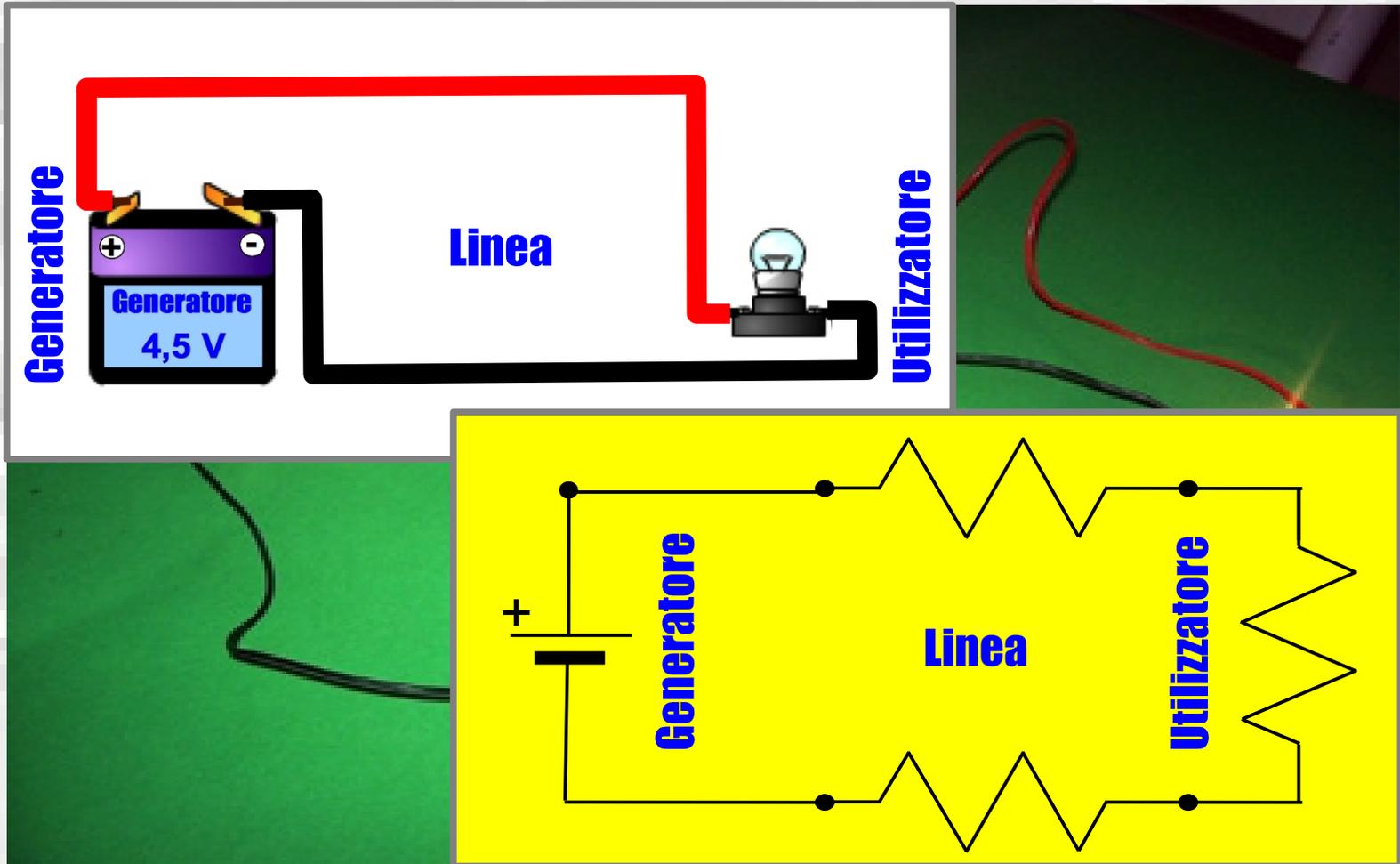
*Dipartimento di Ingegneria Astronautica, Elettrica ed Energetica
Area Ingegneria Elettrica - Via delle Sette Sale n° 12/b, Roma
T 06 44585.534/540 F 06 4883235 alberto.geri@uniroma1.it*

Reti elettriche in regime stazionario

- **Il modello circuitale**
 - Componenti circuitali
 - Bipoli
 - Multipoli ed i multiporte
- **Le reti elettriche**
 - Definizione
 - Comportamento
 - Elementi topologici fondamentali
- **Il metodo generale di analisi**
 - Leggi di Kirchhoff
 - Teorema di Tellegen
 - Analisi delle reti

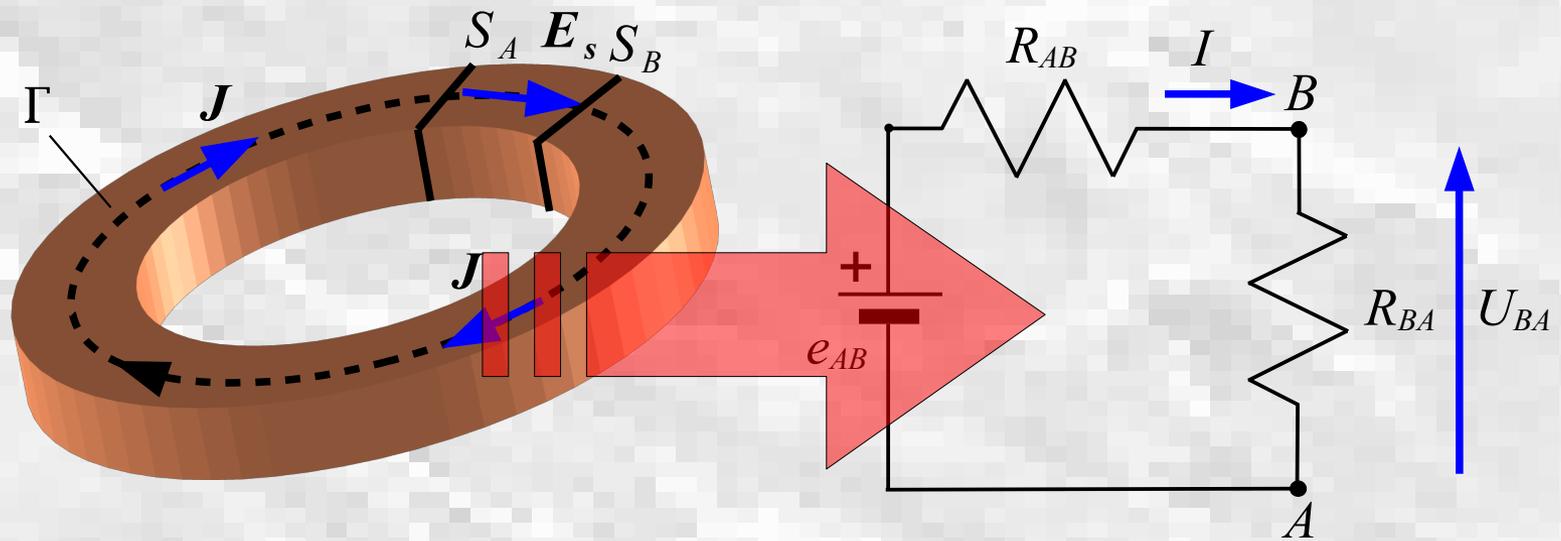


Il modello circuitale



Componenti circuitali ... introduzione

Lo studio dei sistemi elettromagnetici sede di campi statici di conduzione, fino ad ora eseguito applicando le *equazioni di Maxwell*, può essere ricondotto allo studio di modelli zero-dimensionali, detti **modelli circuitali**, il cui comportamento elettrico ed energetico è **rigorosamente equivalente** a quello del sistema originario



Componenti circuitali ... introduzione

- Nella caratterizzazione dei tronchi dei tubi di flusso sede di campi statici di conduzione ed in presenza o meno di f.e.m. abbiamo già introdotto una modalità di rappresentazione grafica che, facendo riferimento unicamente a grandezze integrali (i.e., la tensione, la corrente, la resistenza e la f.e.m.), fosse in grado di sintetizzare il comportamento elettrico del sistema elettromagnetico, normalmente descritto attraverso le equazioni di Maxwell.
- In particolare, nella trattazione relativa al bilancio energetico in un tubo di flusso chiuso, abbiamo anche mostrato come la stessa rappresentazione grafica che ne rappresenta il comportamento elettrico, sia parimenti in grado di rappresentare il suo comportamento energetico.



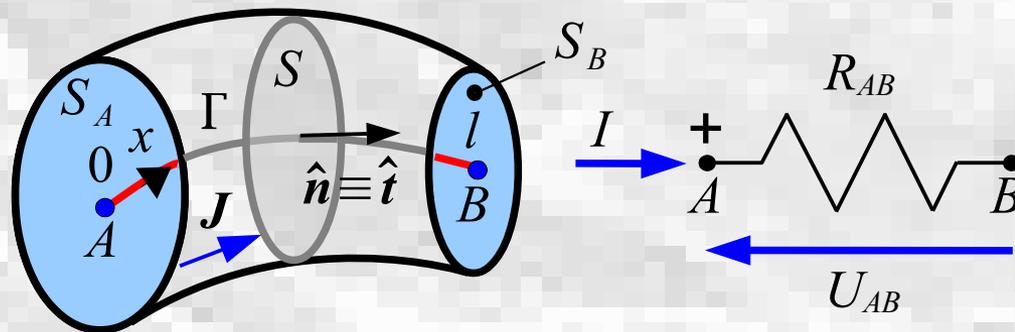
Componenti circuitali ... introduzione

- Studieremo ora le modalità attraverso le quali operare una **sistematica rappresentazione** di sistemi elettromagnetici comunque complessi, e sede di campi statici di conduzione, attraverso **modelli circuitali equivalenti**.
- Ogni trasformazione energetica che ha luogo all'interno del sistema elettromagnetico verrà rappresentata con un **componente** del modello circuitale, il cui comportamento è rigorosamente descritto attraverso il legame funzionale fra le grandezze integrali, che è stato dedotto dall'applicazione delle equazioni di Maxwell.
- Il sistema nella sua interezza verrà rappresentato attraverso una opportuna interconnessione di componenti circuitali, e lo studio della risposta del sistema verrà ricondotto allo studio della risposta del modello circuitale.



Componenti circuitali ... la definizione

- Un **componente circuitale** (del modello) rappresenta la trasformazione energetica che avviene all'interno di una superficie chiusa attraversata da correnti elettriche solo in corrispondenza di un certo numero finito di sezioni equipotenziali.
- A titolo di esempio prendiamo in considerazione il **resistore**



Modello elettromagnetico sintetico del “resistore”

Modello equivalente circuitale o zero-dimensionale

legge di Ohm

$$U_{AB} = R_{AB} I$$

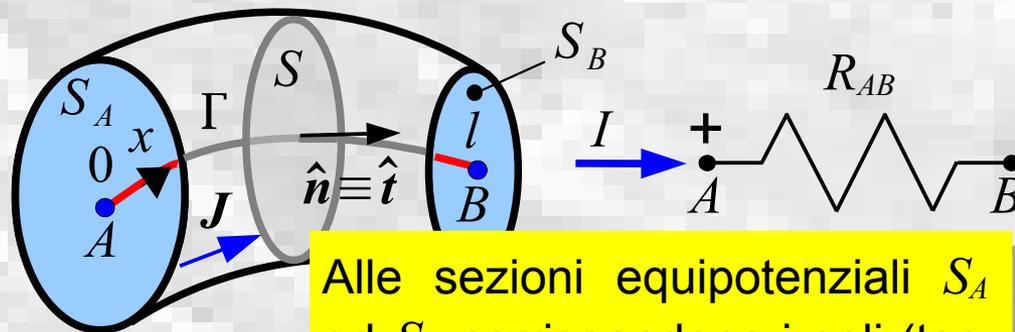
legge di Joule

$$P_d = U_{AB} I = R_{AB} I^2 = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}}$$



Componenti circuitali ... la definizione

- Un **componente circuitale** (del modello) rappresenta la trasformazione energetica che avviene all'interno di una superficie chiusa attraversata da correnti elettriche solo in corrispondenza di un certo numero finito di sezioni equipotenziali.
- A titolo di esempio prendiamo in considerazione il **resistore**



Modello elettrico magnetico sintetico di un "resistore" zero-dimensionale

Alle sezioni equipotenziali S_A ed S_B corrispondono i poli (terminali o morsetti) A e B del modello zero-dimensionale.

legge di Ohm

$$U_{AB} = R_{AB} I$$

legge di Joule

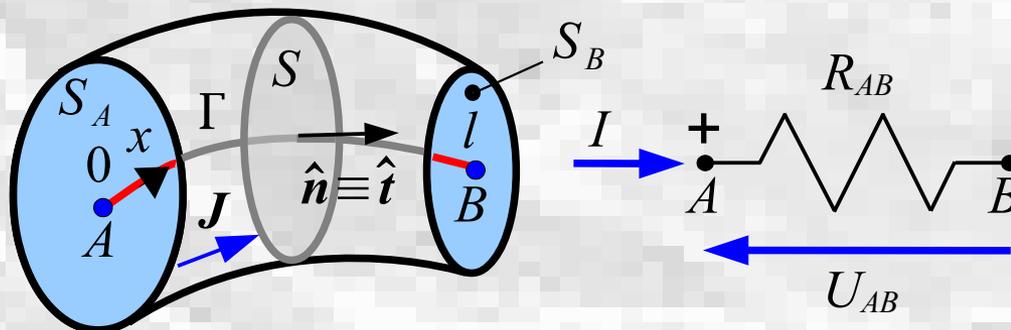
$$P_d = U_{AB} I = R_{AB} I^2 = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}}$$



Componenti circuitali ... la definizione

- Un **componente circuitale** (del modello) rappresenta la trasformazione di energia all'interno di una superficie chiusa che si proietta solo in corrispondenza di due sezioni equipotenziali.
- A titolo di esempio, in questa considerazione il **resistore**

Ai poli A e B e associata la tensione, U_{AB} , e la corrente, I , che compete alle corrispondenti sezioni equipotenziali S_A ed S_B .



Modello elettromagnetico sintetico del "resistore"

Modello equivalente circuitale o zero-dimensionale

legge di Ohm

$$U_{AB} = R_{AB} I$$

legge di Joule

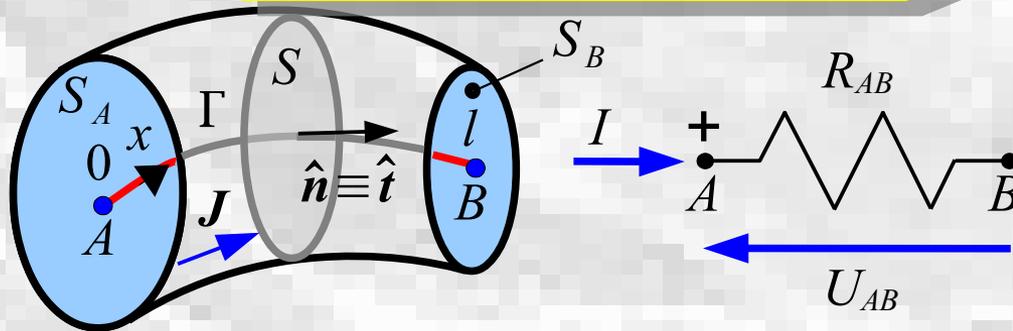
$$P_d = U_{AB} I = R_{AB} I^2 = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}}$$



Componenti circuitali ... la definizione

- Un **componente circuitale** (del modello) rappresenta la trasformazione energetica che avviene all'interno di una superficie chiusa che si trova solo in corrispondenza di superfici equipotenziali.
- A titolo di esempio, per la generazione il **resistore**

Il simbolo grafico impiegato per individuare il componente è univocamente associato alla trasformazione energetica che il componente rappresenta.



Modello elettromagnetico sintetico del "resistore"

Modello equivalente circuitale o zero-dimensionale

legge di Ohm

$$U_{AB} = R_{AB} I$$

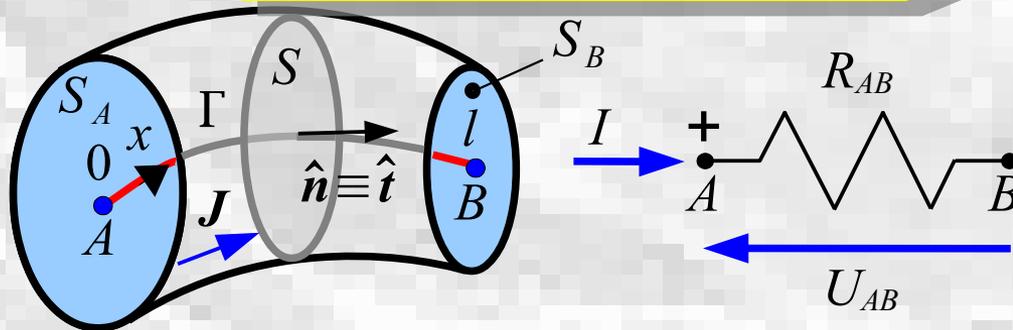
legge di Joule

$$P_d = U_{AB} I = R_{AB} I^2 = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}}$$



Componenti circuitali ... la definizione

- Un **componente circuitale** (del modello) rappresenta la trasformazione interna di una superficie chiusa che si trova in corrispondenza di una **superficie equipotenziale**. Le proprietà elettriche del resistore, i.e. la sua resistenza, sono esplicitamente indicate nel componente attraverso il simbolo, R_{AB} , o il suo valore numerico.
- A titolo di esempio, in questa slide si considera il **resistore**



Modello elettromagnetico sintetico del “resistore”

Modello equivalente circuitale o zero-dimensionale

legge di Ohm

$$U_{AB} = R_{AB} I$$

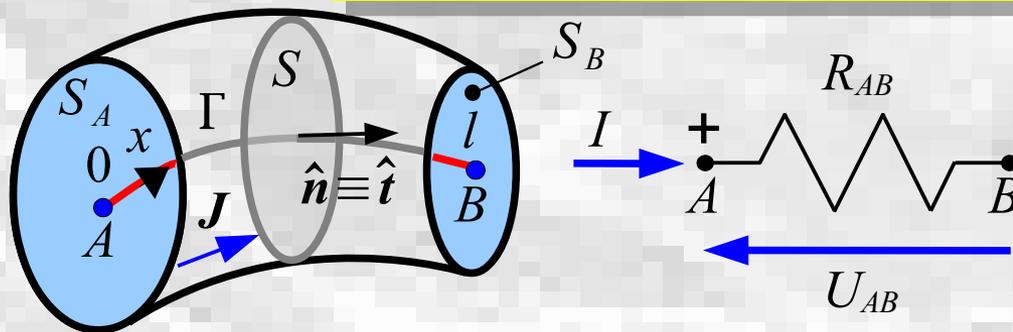
legge di Joule

$$P_d = U_{AB} I = R_{AB} I^2 = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}}$$



Componenti circuitali ... la definizione

- Un **componente circuitale** (del modello) rappresenta la trasformazione di energia in un sistema chiuso, in assenza di un campo magnetico esterno.
- A titolo di esempio, il comportamento del componente circuitale è descritto attraverso quel legame funzionale fra tensione, U_{AB} , e corrente, I , che è stato dedotto applicando le equazioni di Maxwell al sistema elettromagnetico rappresentato, i.e. *la legge di Ohm*.



Modello elettromagnetico sintetico del "resistore"

Modello equivalente circuitale o zero-dimensionale

legge di Ohm

$$U_{AB} = R_{AB} I$$

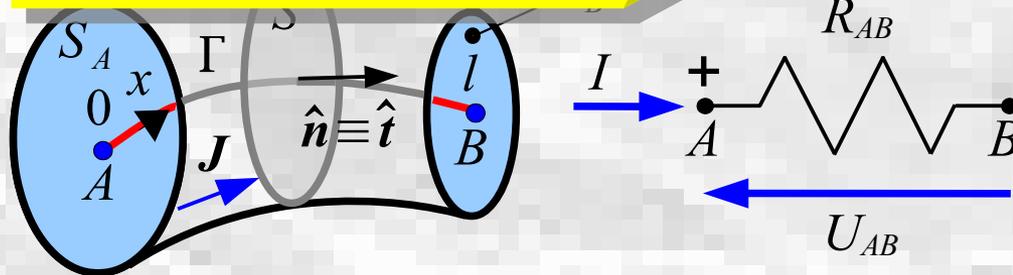
legge di Joule

$$P_d = U_{AB} I = R_{AB} I^2 = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}}$$



Componenti circuitali ... la definizione

- Un **componente circuitale** (del modello) rappresenta la trasavviene all'interno di una superficie Γ correnti elettriche solo in corrispondenza di sezioni equipotenziali.
- Al componente circuitale così definito si dà il nome di **resistore** (od anche **bipolo resistivo** componente cioè con due morsetti o poli accessibili che soddisfa la **legge di Ohm**).
- In considerazione il **resistore**



Modello elettromagnetico sintetico del "resistore"

Modello equivalente circuitale o zero-dimensionale

legge di Ohm

$$U_{AB} = R_{AB} I$$

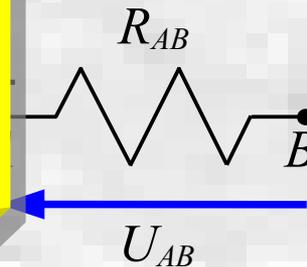
legge di Joule

$$P_d = U_{AB} I = R_{AB} I^2 = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}}$$



Componenti circuitali ... la definizione

- Un **componente circuitale** (del modello) rappresenta la trasformazione che avviene all'interno di una superficie chiusa in cui entrano e escono correnti elettriche solo in corrispondenza di sezioni equipotenziali.
 - In primo luogo in considerazione il **resistore**
- È il modello circuitale dei resistori impiegati nei circuiti stampati, o in altre applicazioni ingegneristiche di potenza, nonché il modello di trasformazioni energetiche che coinvolgono conversioni di energia elettrica in energia di altra forma (e.g., calore, lavoro meccanico) rappresentabili mediante la **legge di Joule**.



legge di Ohm

$$U_{AB} = R_{AB} I$$

legge di Joule

$$P_d = U_{AB} I = R_{AB} I^2 = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}}$$

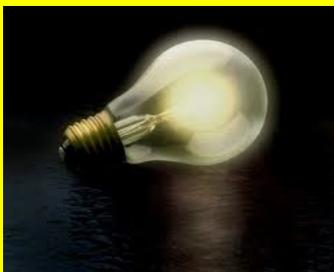
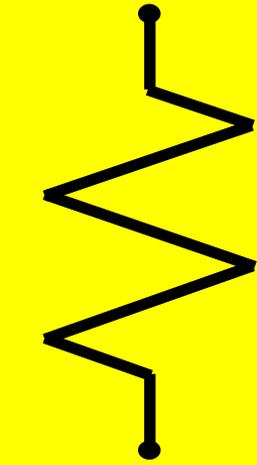
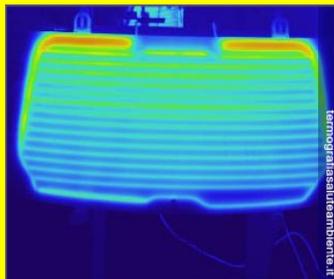
Modello elettromagnetico sintetico del "resistore" **Modello equivalente circuitale o zero-dimensionale**



Componenti circuitali ... la definizione

- Un **componente circuitale** (del modello) rappresenta la tras-

È il modello circuitale dei re



di una superfi-
o in corrispon-
enziali.

il **resistore**
di Ohm

$$R_{AB} I$$

di Joule

$$U_{AB} I = R_{AB} I^2 = \frac{U_{AB}^2}{R_{AB}}$$



Bipoli ... la definizione

- Generalizzando quanto nello specifico visto per il resistore, si possono definire le caratteristiche principali dei componenti circuitali bipolari (i.e., **i bipoli**).
- Si definisce bipolo un componente dotato di due poli (o morsetti o terminali) accessibili.
- Un bipolo si identifica con un tronco di tubo di flusso di \mathbf{J}
 - la corrente entrante in uno dei due terminali è uguale a quella uscente dall'altro terminale (i terminali costituiscono pertanto una **porta**), $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$;
 - la tensione fra i terminali è univocamente determinata, essendo verificata la $\nabla \times \mathbf{E} = 0$;
 - al bipolo risultano quindi univocamente associate una tensione, U , ed una corrente, I .



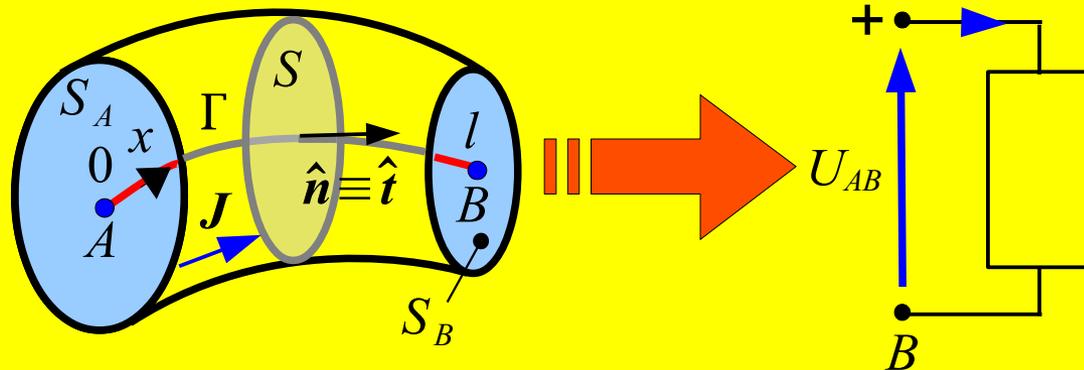
Bipoli ... i versi positivi di riferimento

- Affinché tensione e corrente siano univocamente individuate occorre specificare i loro **versi positivi di riferimento**:
 - per la tensione viene indicato con il simbolo +, in corrispondenza del polo positivo, o con una freccia che punta verso il polo positivo;
 - per la corrente viene indicato con una freccia in corrispondenza di uno dei due morsetti.
- I versi di riferimento possono essere scelti in modo **assolutamente arbitrario**:
 - per la tensione, equivale alla scelta arbitraria del verso della tangente alla linea lungo la quale viene effettuata l'integrazione;
 - per la corrente, equivale alla scelta arbitraria del verso della normale alla superficie attraverso la quale viene valutato il flusso.



Bipoli ... i versi positivi di riferimento

- Affinché tensione e corrente siano univocamente individuate



ATTENZIONE – L'attribuzione dei versi di riferimento non ha nulla a che vedere con il moto reale delle cariche elettriche (a cui sono legate la corrente e la tensione effettive).

- per la corrente, equivale alla scelta arbitraria del verso della normale alla superficie attraverso la quale viene valutato il flusso.



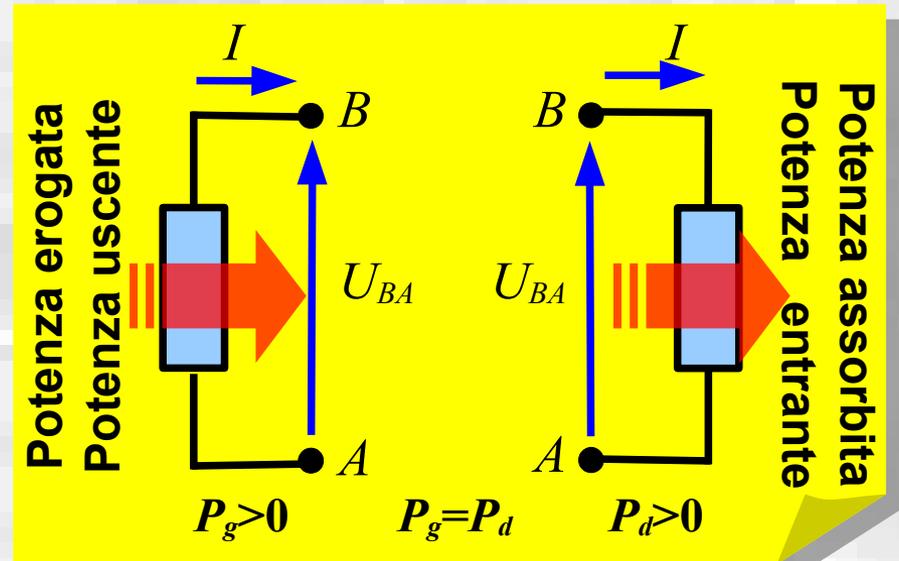
Bipoli ... i versi positivi di riferimento

- La tensione e la corrente rispetto, ai fissati versi di riferimento positivi, possono assumere valori numerici sia positivi che negativi:
 - $U > 0$, il potenziale del polo scelto arbitrariamente come positivo ha effettivamente potenziale maggiore rispetto a quello negativo;
 - $U < 0$, il potenziale del polo scelto arbitrariamente come positivo ha potenziale minore rispetto a quello negativo;
 - $I > 0$, la corrente effettivamente scorre nel verso di riferimento positivo scelto arbitrariamente;
 - $I < 0$, la corrente scorre nel verso opposto a quello di riferimento positivo scelto arbitrariamente.



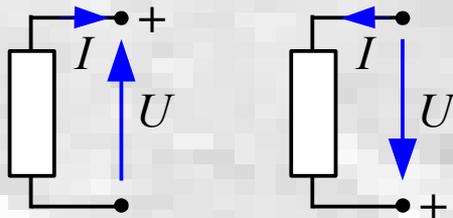
Bipoli ... i versi positivi di riferimento

- Abbiamo dimostrato che il prodotto $U I$ rappresenta la **potenza scambiata** da un tubo di flusso (i.e. dal bipolo equivalente) attraverso le sezioni terminali (i.e., attraverso i due poli, ovvero la porta).
- Abbiamo altresì evidenziato che quando la corrente esce dalla sezione a potenziale maggiore (i.e., il polo contraddistinto come positivo, ovvero verso il quale punta la freccia della tensione) trattasi di **potenza erogata**, ovvero di **potenza assorbita** nel caso in cui la corrente entri da tale polo.



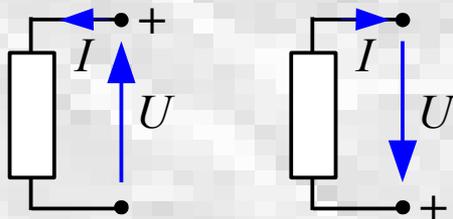
Bipoli ... le convenzioni

- Ai fini della scelta arbitraria dei versi di riferimento positivi si hanno quattro possibilità a cui, tenendo conto delle precedenti considerazioni, si attribuiscono i seguenti nomi



— Convenzione del generatore

- $UI > 0$, il bipolo **eroga potenza**;
- $UI < 0$, il bipolo eroga potenza negativa, i.e. **assorbe potenza**;



— Convenzione dell'utilizzatore

- $UI > 0$, il bipolo **assorbe potenza**;
- $UI < 0$, il bipolo assorbe potenza negativa, i.e. **eroga potenza**.



Bipoli ... le convenzioni

- Ai fini della scelta arbitraria dei versi di riferimento positivi si tengono conto delle seguenti convenzioni:
 - **Convenzione del generatore**
 - bipolo eroga potenza;
 - bipolo eroga potenza negativa **assorbe potenza**;
 - **Convenzione dell'utilizzatore**
 - bipolo assorbe potenza;
 - bipolo assorbe potenza negativa, i.e. **eroga potenza**.



Bipoli ... le convenzioni

- Ai fini della scelta arbitraria dei versi di riferimento positivi si adotta la convenzione di potenza a cui, tenendo conto delle convenzioni di riferimento, si attribuiscono i seguenti nomi

Il comportamento energetico del bipolo risulterà inequivocabilmente individuato dal segno del prodotto UI (una volta determinata numericamente la risposta del componente): rispetto alla convenzione applicata infatti, se il prodotto è positivo, il bipolo si comporterà come dichiarato dalla convenzione applicata, in caso contrario, si comporterà in modo opposto.

Convenzione del generatore

- $UI > 0$, il bipolo **eroga potenza**;
- $UI < 0$, il bipolo eroga potenza negativa, i.e. **assorbe potenza**;

Convenzione dell'utilizzatore

- $UI > 0$, il bipolo **assorbe potenza**;
- $UI < 0$, il bipolo assorbe potenza negativa, i.e. **eroga potenza**.



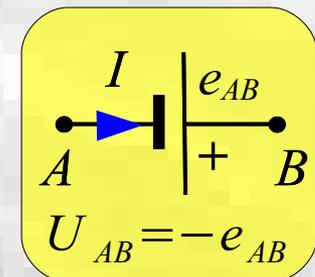
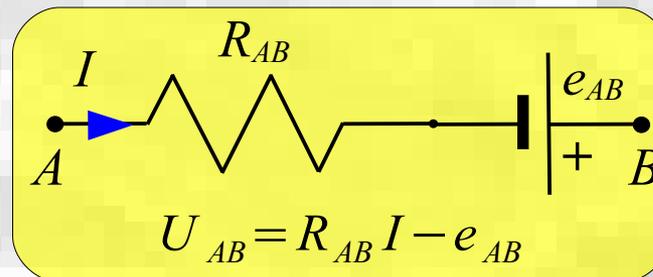
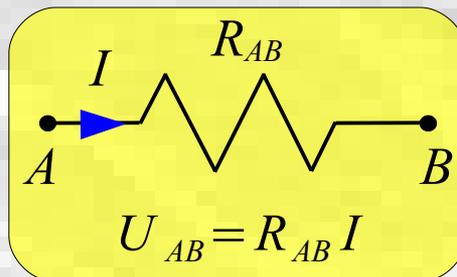
Bipoli ... i versi di riferimento coordinati

- Si osservi che la **scelta della convenzione è assolutamente arbitraria** (i.e., è totalmente svincolata dal presunto comportamento del bipolo).
- Salvo diversa specificazione si adotterà per ogni bipolo la **convenzione dell'utilizzatore**.
- In base a questa assunzione sarà possibile adottare per tutti i bipoli **versi di riferimento coordinati**: sarà sufficiente indicare il solo verso di riferimento positivo della corrente (**scelta usuale**), o quello della tensione, affinché risulti univocamente individuato anche l'altro.
- Se per esigenze particolari, qualche bipolo dovrà essere convenzionato da generatore, sul bipolo verranno esplicitamente indicati entrambi i versi di riferimento positivi.



Bipoli ... la relazione costitutiva

- Il comportamento di un bipolo è univocamente determinato quando è noto il **legame funzionale**, $f(U,I) = 0$ (ovvero la **relazione costitutiva** od anche **equazione caratteristica** del bipolo), fra la tensione e la corrente ai suoi morsetti; relazione questa che dipende dal comportamento fisico del sistema elettromagnetico di cui il componente circuitale è modello.



- Per gli stessi bipoli **convenzionati da generatori** le relazioni costitutive diventano

$$U_{BA} = -R_{AB} I$$

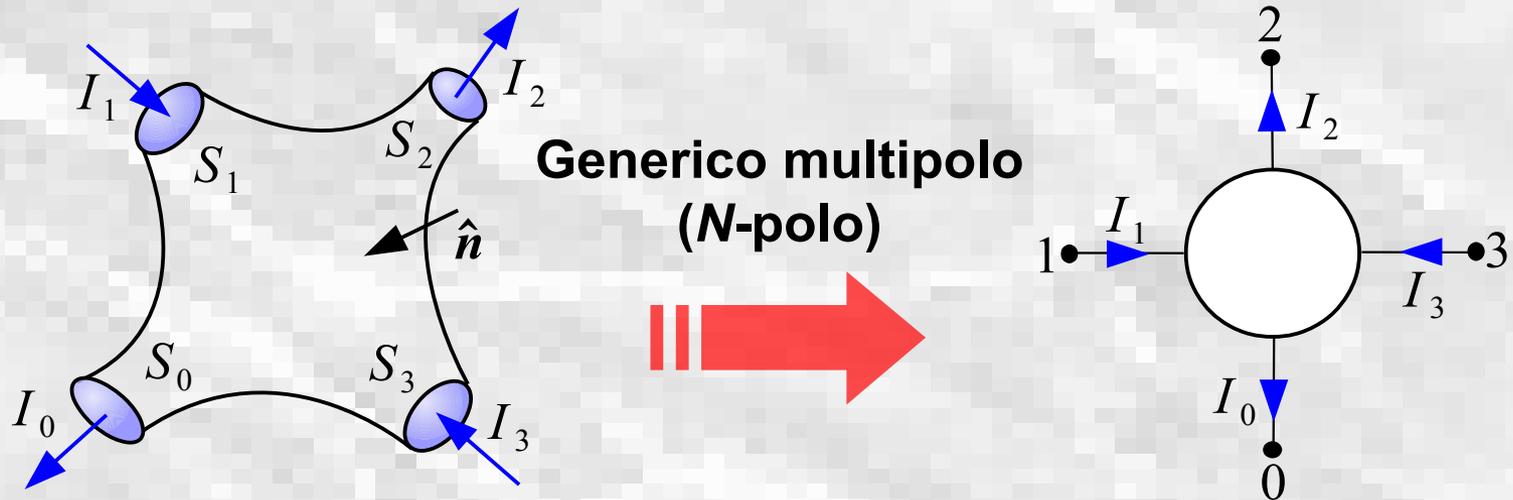
$$U_{BA} = -R_{AB} I + e_{AB}$$

$$U_{BA} = e_{AB}$$



Multipoli e multiporte ... la definizione

- In relazione alle caratteristiche ed al comportamento del dispositivo elettromagnetico da modellare (e.g., quando i tubi di flusso di \mathbf{J} hanno struttura ramificata e quindi le sezioni terminali equipotenziali sono più di due) può essere necessario far ricorso ad elementi circuitali più complessi come i **multipoli (N -poli)** ed i **multiporte (N -porte)**.

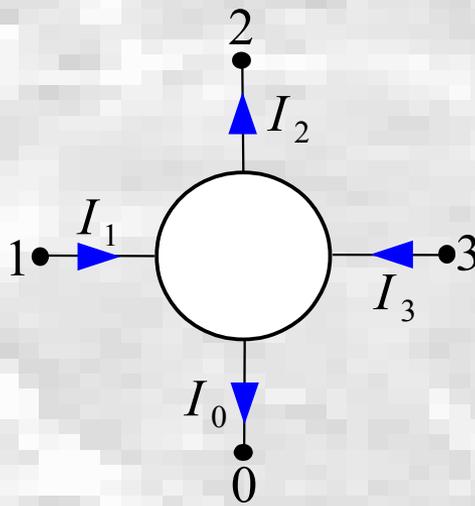


Multipoli e multiporte ... gli N -poli

- Un **N -polo** è un componente dotato di N terminali.
- In un **N -polo** si ha che:
 - è nulla la somma algebrica delle correnti ai morsetti;
 - $(N-1)$ correnti sono sufficienti a determinare la N -esemia;
 - ad un N -polo si possono associare $N(N-1)/2$ tensioni;
 - tutte le tensioni si possono determinare a partire dai potenziali di $(N-1)$ terminali valutati rispetto all' N -esimo assunto come riferimento;
 - per caratterizzare un N -polo sono quindi sufficienti $(N-1)$ correnti ed $(N-1)$ tensioni;
 - le tensioni e correnti sono legate da $(N-1)$ relazioni costitutive che dipendono dalla sua struttura interna.



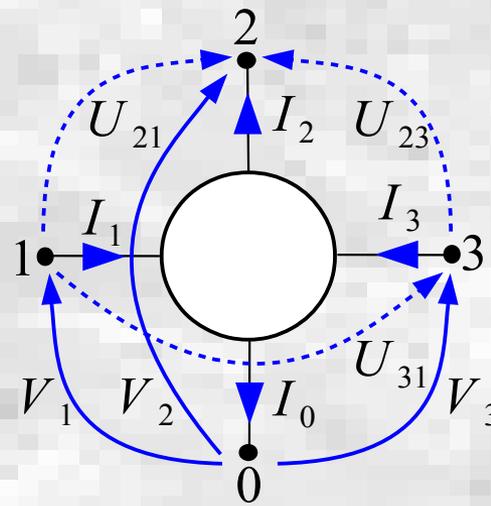
Multipoli e multiporte ... gli N-poli



Correnti

$$-I_0 + I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$I_0 = I_1 - I_2 + I_3$$

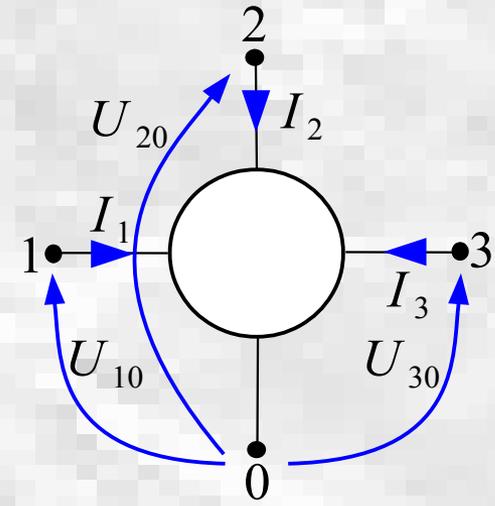


Tensioni

$$U_{12} = V_1 - V_2$$

$$U_{23} = V_2 - V_3$$

$$U_{31} = V_3 - V_1$$



Potenza assorbita

$$P_a = \sum_{k=1}^{N-1} V_k I_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} U_{k0} I_k$$

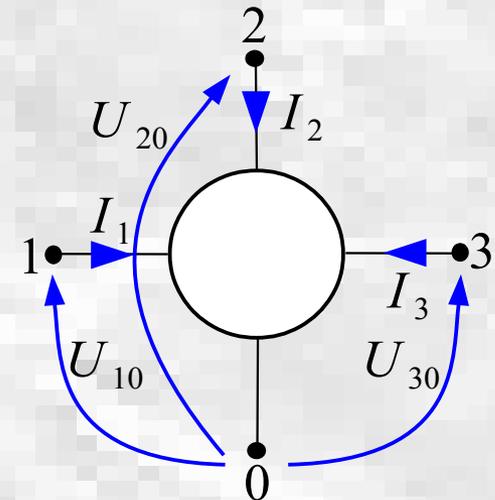


Multipoli e multiporte ... gli N -poli

Normalmente per N -polo si adottano le seguenti convenzioni:

- si fissa il polo di riferimento (e.g., lo 0);
- Tutte le $(N-1)$ tensioni dei poli si riferiscono a quello di riferimento (i.e., lo 0);
- come verso di riferimento positivo per le $(N-1)$ correnti si sceglie quello entrante nei poli.

Con queste convenzioni, ed applicando il *teorema di Poynting*, si può calcolare la potenza entrante nel N -polo.



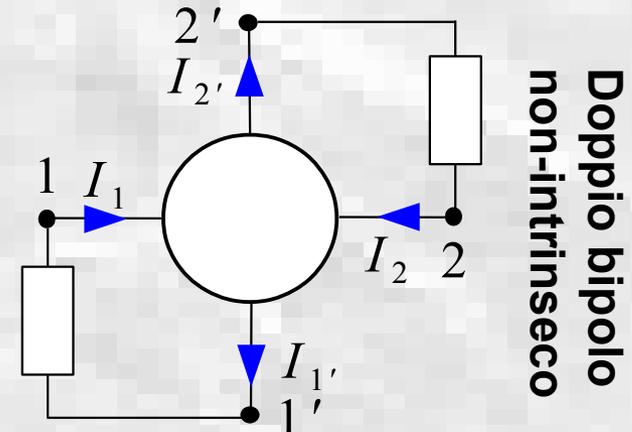
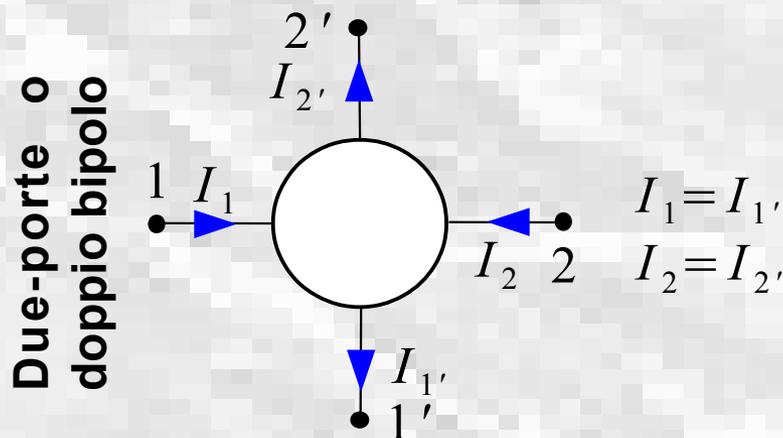
Potenza assorbita

$$\begin{aligned} P_a &= \sum_{k=1}^{N-1} V_k I_k = \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} U_{k0} I_k \end{aligned}$$



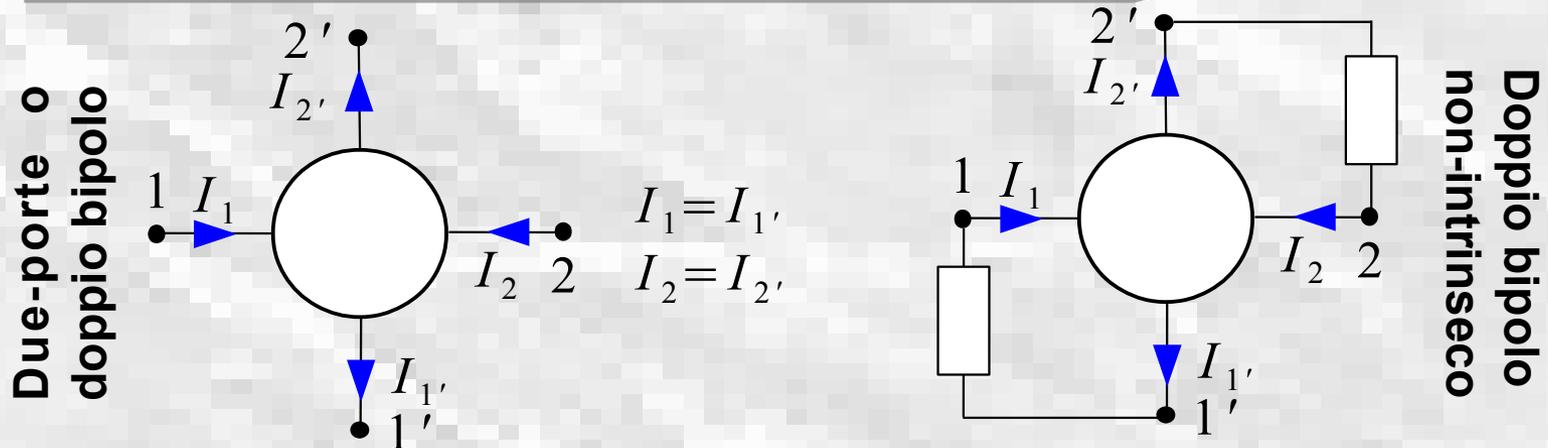
Multipoli e multiporte ... gli N -porte

- Si definisce **porta** di un componente una coppia di poli in cui la corrente entrante in uno dei due è sempre uguale a quella uscente dall'altro (e.g., i *due morsetti di un bipolo costituiscono una porta*).
- Un **N -porta** è un componente dotato di $2N$ terminali che realizzano N porte.



Multipoli e multiporte ... gli N -porte

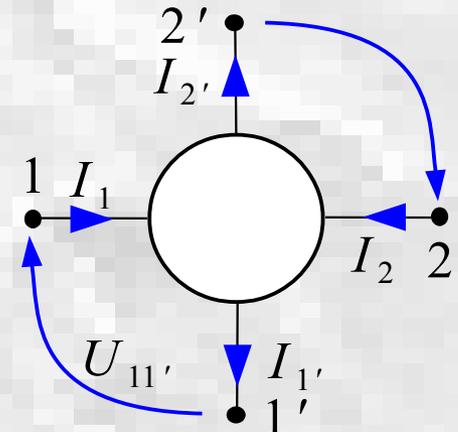
- Si definisce **porta** di un componente un coppia di poli in cui la L'uguaglianza delle correnti di ciascuna porta può essere dovuta alla struttura interna del N -porte (N -**porte intrinseco**), o dai collegamenti esterni che il componente realizza (e.g., un $2N$ -polo collegato a N bipoli realizza un N -**porte non intrinseco**).



Multipoli e multiporte ... gli N -porte

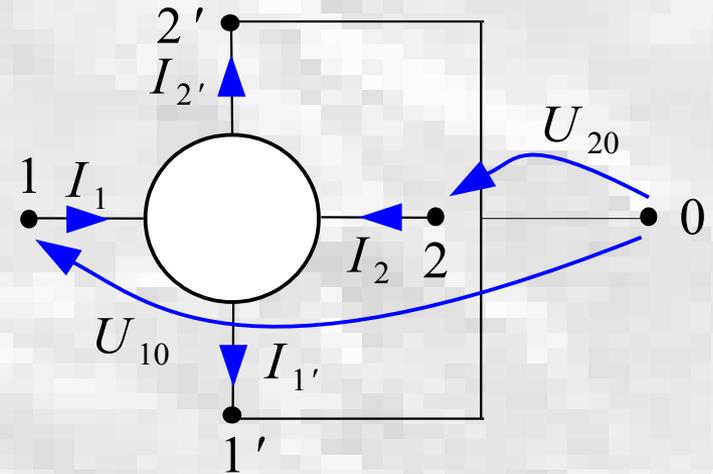
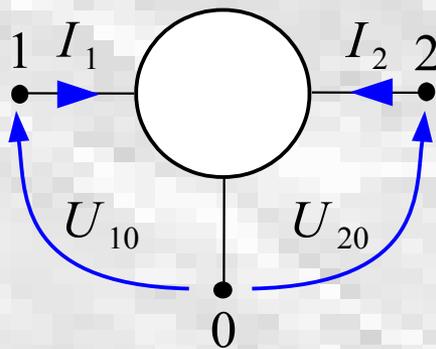
- Il comportamento di un **N -porta** è caratterizzato dalle:
 - N correnti di porta
 - N tensioni tra i terminali di portafra loro vincolate da N relazioni costitutive.
- Applicando la convenzione dell'utilizzatore a ciascuna porta del componente, il *teorema di Poynting* consente di determinare la **potenza assorbita** da un N -porte che è data da

$$P_a = \sum_{k=1}^N U_{kk'} I_k$$



Multipoli e multiporte ... gli N -porte

- Un generico N -polo può essere considerato come un componente a $(N-1)$ -porte avente tutti i terminali negativi delle porte collegati tra loro.
- Questo consente di trattare in modo unificato i componenti circuitali multipoli e multiporta.

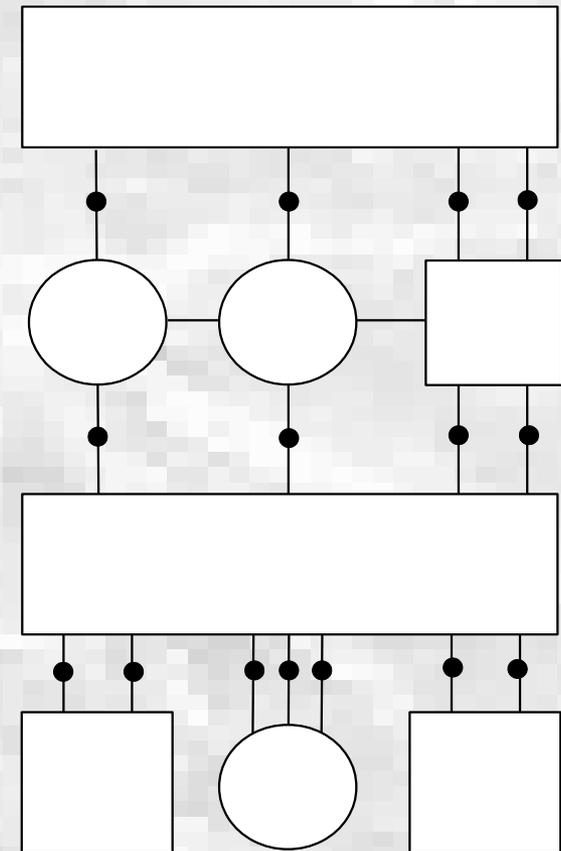


Le reti elettriche



Definizione

Un **circuito elettrico** (o **rete elettrica**) è costituito da una interconnessione comunque complessa di componenti ideali (bipoli, multipoli e multiporte). I circuiti elettrici godono delle stesse proprietà degli elementi che li compongono: se tutti gli elementi godono di una determinata proprietà anche il circuito godrà della stessa proprietà; è sufficiente che uno solo degli elementi che compongono il circuito non goda di una determinata proprietà, affinché anche il circuito nel suo complesso non goda di quella proprietà.



Definizione

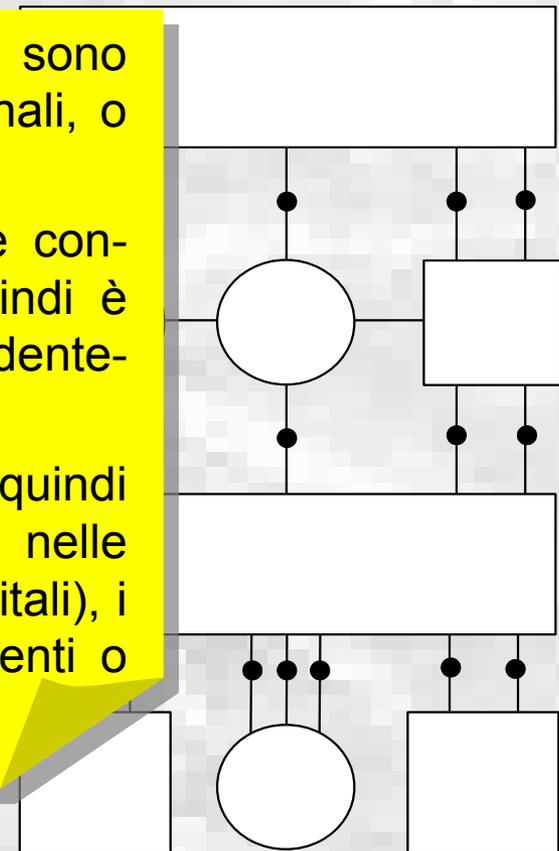
Un **circuito elettrico** (o **rete elettrica**)

è un insieme di componenti circuitali i cui collegamenti fra i terminali sono realizzati mettendo in contatto i loro terminali, o unendoli mediante conduttori ideali ($\rho = 0$).

I collegamenti, quando realizzati mediante conduttori ideali, sono a resistenza nulla, quindi è nulla anche la tensione ai loro capi, indipendentemente dalla corrente che vi scorre.

La forma di questi collegamenti non ha quindi effetto sul comportamento del circuito, e, nelle rappresentazioni grafiche (gli **schemi** circuitali), i collegamenti sono indicati mediante segmenti o archi che rappresentano conduttori ideali.

goda di quella proprietà.



Definizione

Un **circuito elettrico** (o **rete elettrica**)

è un insieme di collegamenti fra i componenti circuitali sono rappresentati. Lo schema del circuito ha il solo scopo di mostrare quali componenti sono collegati fra loro ed attraverso quali terminali, quindi, non riproduce:

- le posizioni nello spazio dei componenti che rappresenta;
- la disposizione dei conduttori (e.g., i cavi) con cui nel sistema fisico reale sono eventualmente realizzate le connessioni fra le sue parti;

perché da esse non dipende la risposta del sistema elettromagnetico e quindi del circuito.

goda di quella proprietà.



Definizione

Un **circuito elettrico** (o **rete elettrica**)

è un insieme di collegamenti fra i componenti circuitali sono

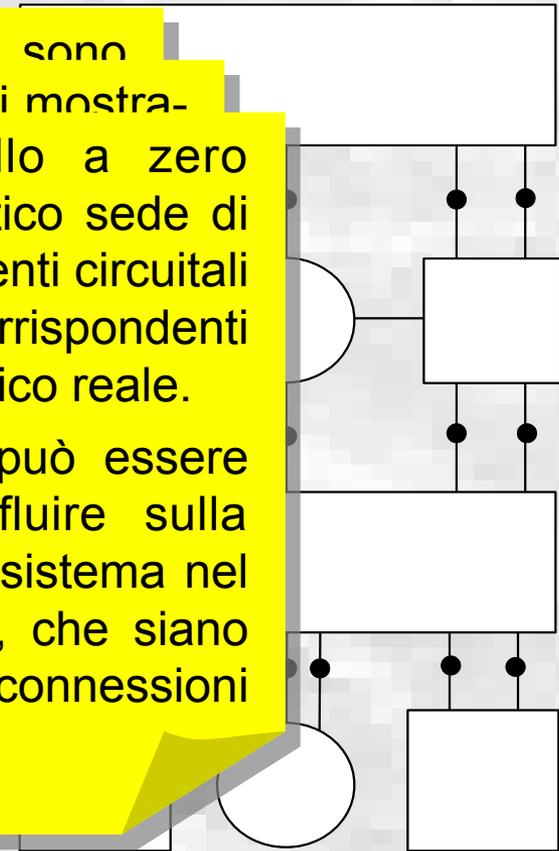
Lo schema del circuito ha il solo scopo di mostra-

Il modello circuitale è un modello a zero

dimensioni del sistema elettromagnetico sede di

- campi statici di conduzione. I componenti circuitali sono modelli zero-dimensionali dei corrispondenti componenti del sistema elettromagnetico reale.

- Pertanto, lo schema di un circuito può essere disegnato in vari modi, senza influire sulla risposta dei singoli componenti e del sistema nel suo complesso; a patto, ovviamente, che siano correttamente rappresentate le interconnessioni fra i componenti del sistema.



Comportamento

- Il comportamento di un circuito elettrico (e in particolare lo scambio di energia tra i suoi componenti) è pertanto descritto mediante grandezze integrali, indipendenti dalle coordinate spaziali:
 - le **correnti** attraverso i terminali;
 - le **tensioni** (o differenze di potenziale) tra i morsetti.
- Nella rappresentazione circuitale del sistema elettromagnetico si perdono quindi le informazioni relative:
 - alla configurazione geometrica dei tubi di flusso di \mathbf{J} ;
 - alla distribuzione di campo al loro interno.
- Vengono cioè impiegati **modelli zero-dimensionali** delle trasformazioni energetiche rappresentate.



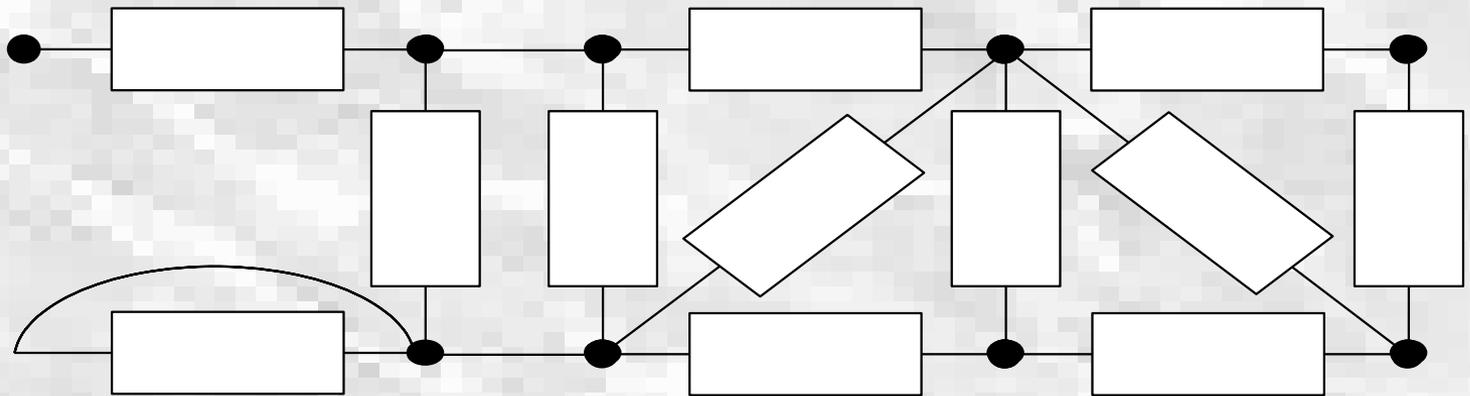
Comportamento

- Le tensioni e le correnti mediante le quali è descritto il comportamento di un circuito elettrico sono soggette a due tipi di vincoli, espressi attraverso due set di equazioni:
 - **Equazioni caratteristiche dei componenti (equazioni tipologiche)**
le tensioni e le correnti ai terminali di ciascun componente sono sottoposte a vincoli dipendenti dalle proprietà fisiche del componente stesso (le **relazioni costitutive**)
 - **Equazioni dei collegamenti (equazioni topologiche)**
i collegamenti tra i componenti impongono ulteriori vincoli alle loro tensioni e correnti; tali vincoli non dipendono da come sono realizzate le connessioni, ma solo da quali terminali sono collegati tra loro.



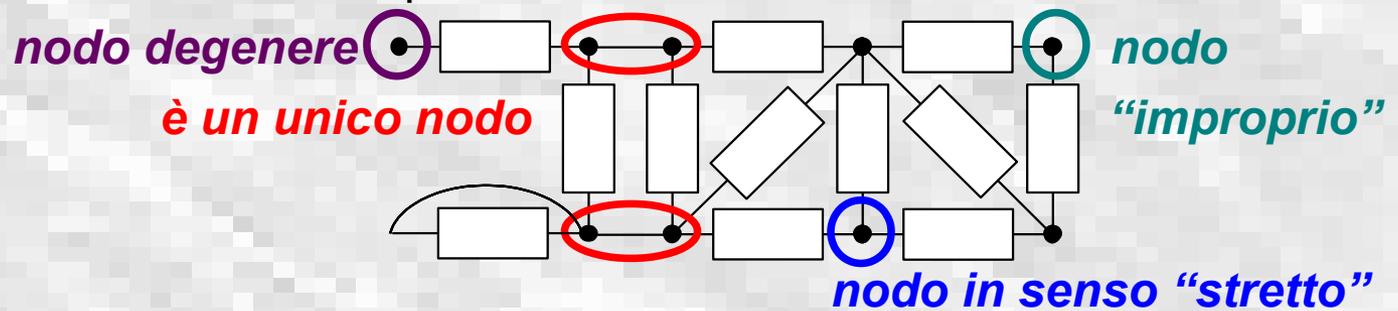
Comportamento

- Si osservi che, attraverso opportune trasformazioni, sarà sempre possibile ricondurre multipoli e multiporte ad interconnessioni più o meno complesse di bipoli.
- Per semplicità espositiva, e senza scapito di generalità, in questa parte del corso si farà riferimento unicamente a **reti elettriche costituite da un'interconnessione comunque complessa di componenti circuitali bipolari.**



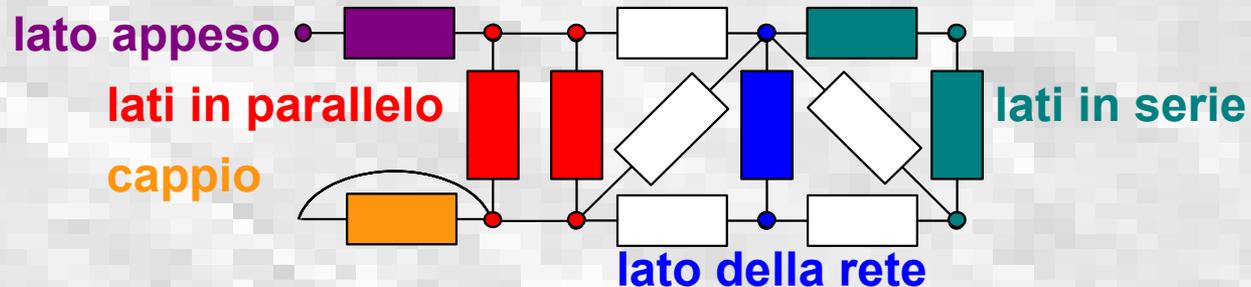
Elementi topologici fondamentali ... i nodi

- Per le reti elettriche si possono definire i seguenti **elementi topologici** fondamentali:
 - **nodo**, il punto della rete dove si interconnettono i terminali dei componenti (un terminale isolato è un caso degenere di nodo);
 - lato, o ramo, il tratto di circuito che unisce due nodi (un lato che unisce un nodo degenere si dice *appeso*, un lato che ha origine e termina nello stesso nodo si dice *cappio*);
 - maglia, è un percorso chiuso formato da lati consecutivi nei cui nodi non incidono più di due lati.



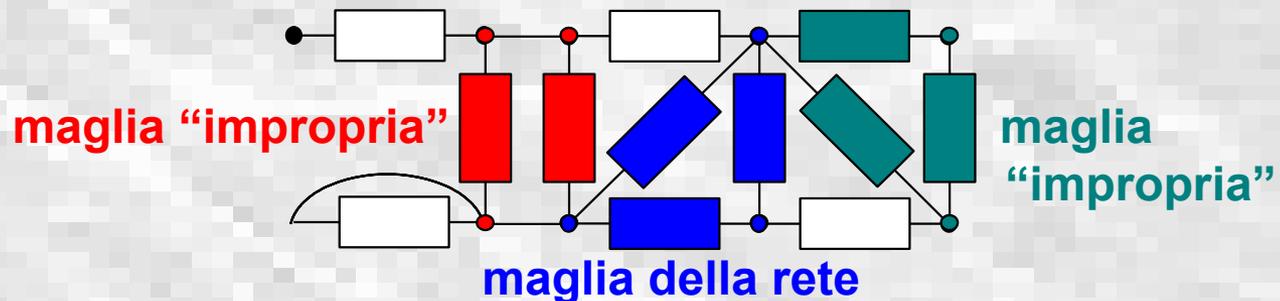
Elementi topologici fondamentali ... i lati

- Per le reti elettriche si possono definire i seguenti **elementi topologici** fondamentali:
 - nodo, il punto della rete dove si interconnettono i terminali dei componenti (un terminale isolato è un caso degenere di nodo);
 - **lato**, o **ramo**, il tratto di circuito che unisce due nodi (un lato che unisce un nodo degenere si dice **appeso**, un lato che ha origine e termina nello stesso nodo si dice **cappio**);
 - maglia, è un percorso chiuso formato da lati consecutivi nei cui nodi non incidono più di due lati.



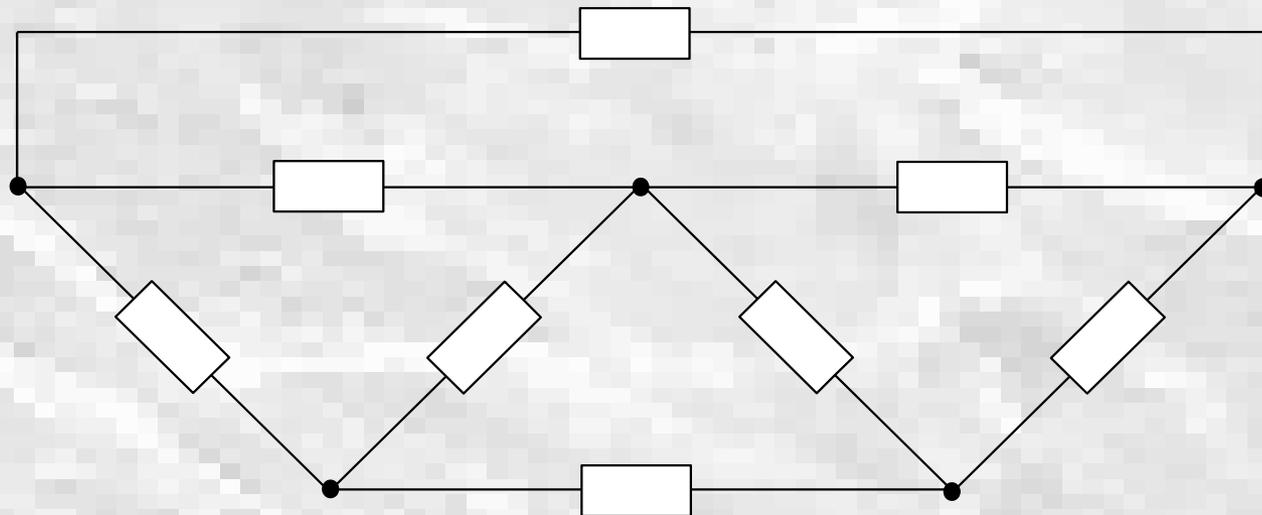
Elementi topologici fondamentali ... le maglie

- Per le reti elettriche si possono definire i seguenti **elementi topologici** fondamentali:
 - nodo, il punto della rete dove si interconnettono i terminali dei componenti (un terminale isolato è un caso degenere di nodo);
 - lato, o ramo, il tratto di circuito che unisce due nodi (un lato che unisce un nodo degenere si dice *appeso*, un lato che ha origine e termina nello stesso nodo si dice *cappio*);
 - **maglia**, è un percorso chiuso formato da lati consecutivi nei cui nodi non incidono più di due lati della maglia.



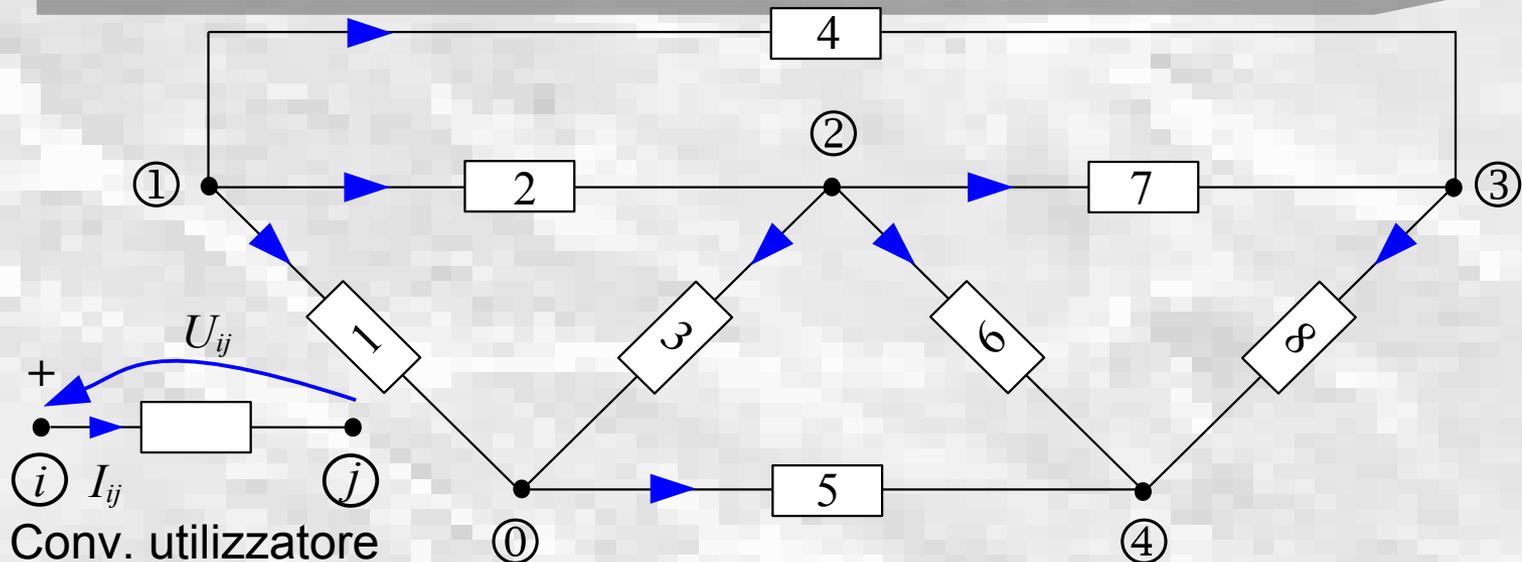
Elementi topologici fondamentali ... l'individuazione dei nodi e dei lati

- **Operazione prioritaria** ad ogni elaborazione (e.g., **soluzione**) di un rete elettrica è l'individuazione (i.e., **numerazione**) degli elementi topologici essenziali (i.e., **nodi** e **lati**) della stessa, e la scelta dei versi di riferimento positivi per le tensioni e le correnti di lato.



Elementi topologici fondamentali ... l'individuazione dei nodi e dei lati

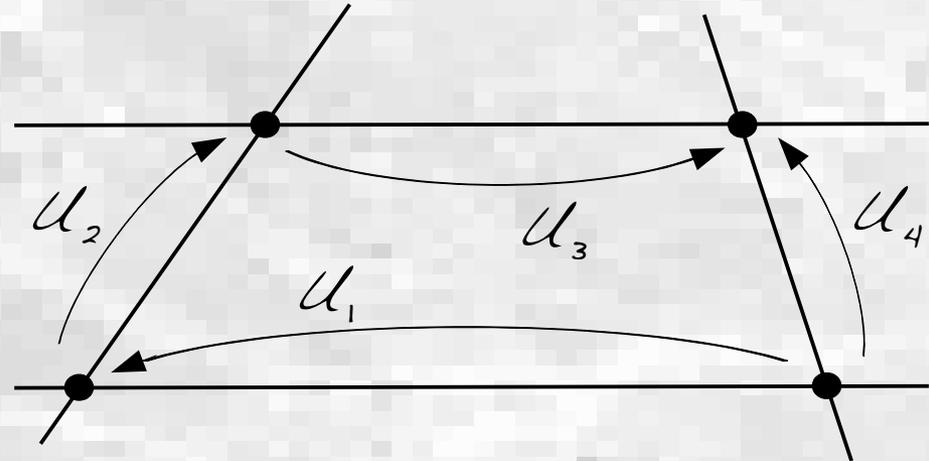
Si inizia numerando progressivamente i nodi della rete a partire dallo zero (che sarà il nodo di riferimento per i potenziali). Si numerano progressivamente i lati della rete e per ciascun lato si sceglie arbitrariamente il verso di riferimento positivo della corrente, convenendo di convenzionare tutti i bipoli come utilizzatori.



Il metodo generale di analisi



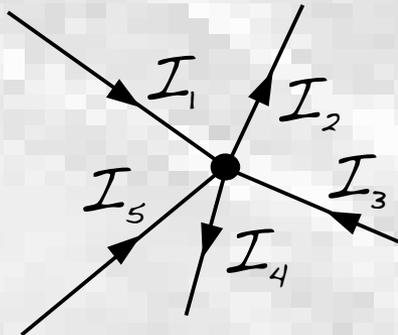
(1824 - 1887)



Leggi di Kirchhoff

$$\sum_k I_k = 0 \quad (\text{div } \vec{J} = 0)$$

$$\sum_k U_k = 0 \quad (\text{rot } \vec{E} = 0)$$

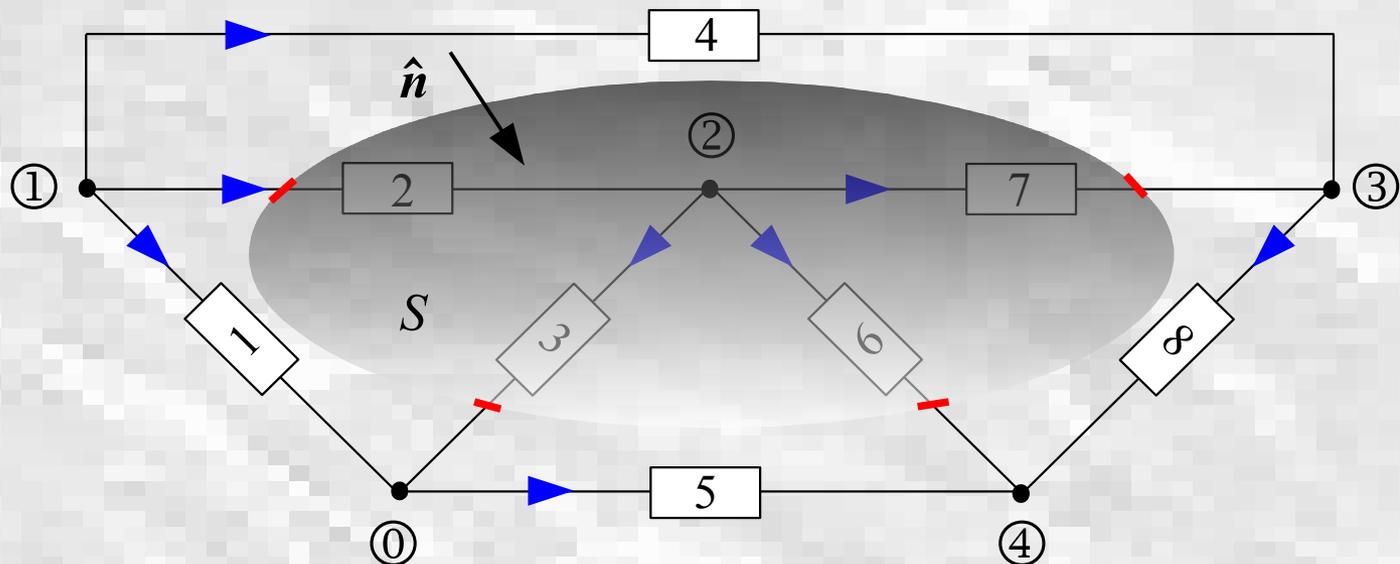


Il metodo generale di analisi

Leggi di Kirchhoff ... conseguenze della $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$

- In condizioni stazionarie il campo di corrente è solenoidale, e quindi, in considerazione di una generica superficie chiusa S , il flusso di \mathbf{J} è identicamente nullo, e cioè

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = +I_{12} - I_{23} - I_{24} - I_{20} = 0$$

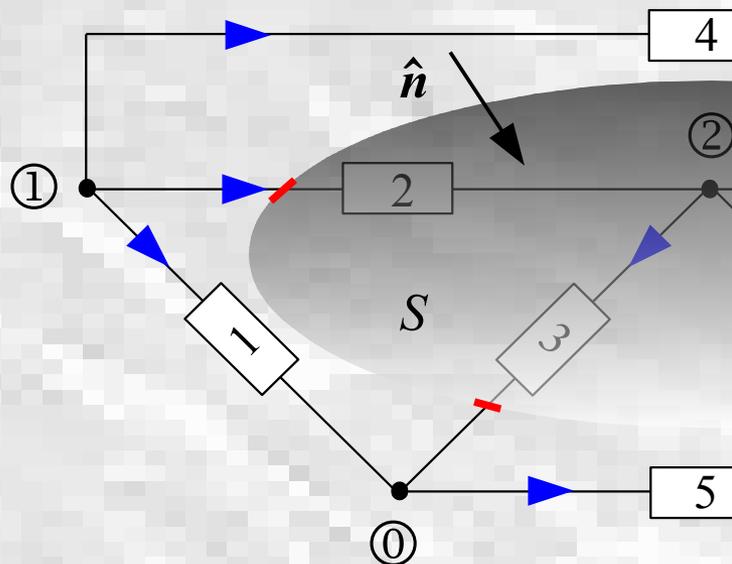


Il metodo generale di analisi

Leggi di Kirchhoff ... conseguenze della $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$

- In condizioni stazionarie il campo di corrente è irrotazionale e il flusso di \mathbf{J} è identicamente nullo in ogni volume di controllo.

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = +I_{12} - I_{23} - I_{26} - I_{27} = 0$$



La densità di corrente di conduzione è diversa da zero solo nelle aree di intersezione fra la superficie S ed il circuito. In queste aree il flusso di \mathbf{J} coincide con la corrispondente corrente di lato, a cui si attribuirà segno positivo (o negativo) se il verso di riferimento positivo della corrente è concorde (o discorde) con il versore della normale alla superficie.

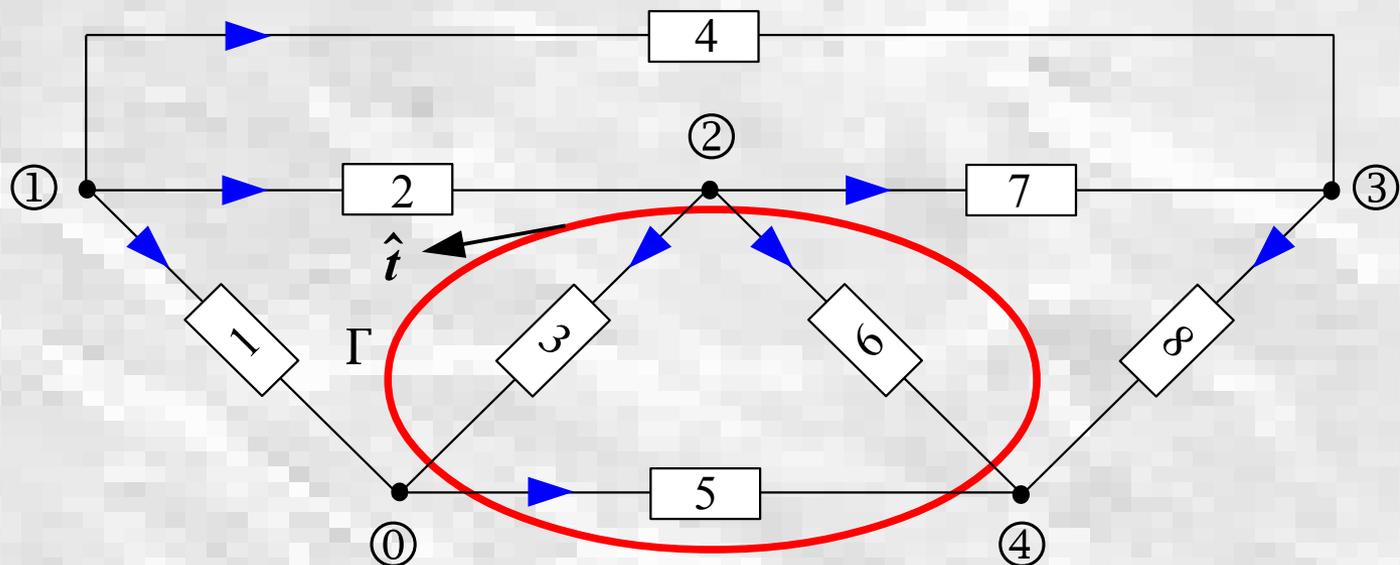


Il metodo generale di analisi

Leggi di Kirchhoff ... conseguenze della $\nabla \times \mathbf{E} = 0$

- In condizioni stazionarie il campo elettrico è irrotazionale, e quindi, in considerazione di una generica linea chiusa Γ , la circuitazione di \mathbf{E} è identicamente nulla, e cioè

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = -U_{20} - U_{04} + U_{24} = -(V_2 - V_0) - (V_0 - V_4) + (V_2 - V_4) = 0$$

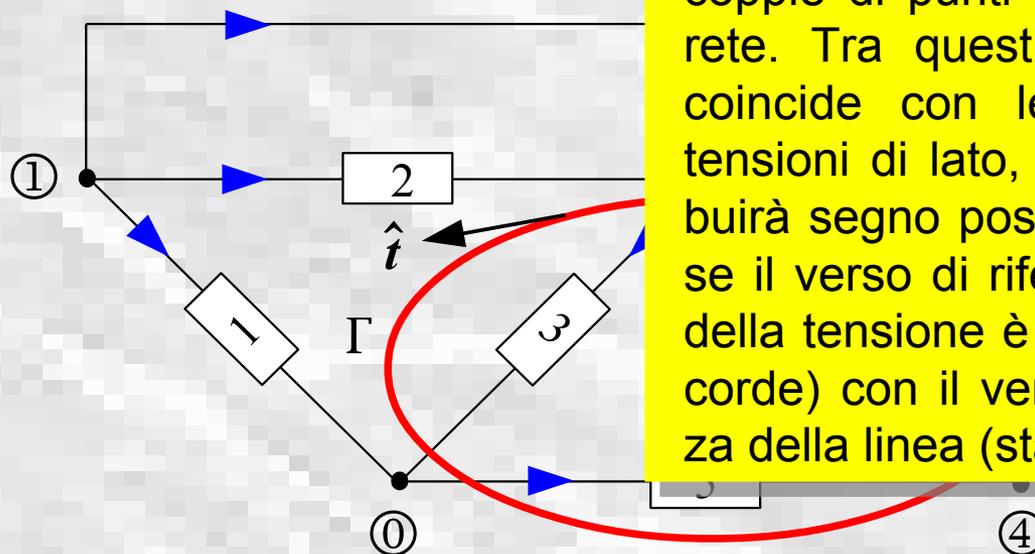


Il metodo generale di analisi

Leggi di Kirchhoff ... conseguenze della $\nabla \times E = 0$

- In condizioni stazionarie il campo elettrico è irrotazionale e conservativo, quindi, in considerazione di un circuito chiuso, la circuitazione di E è identica a zero.

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = -U_{20} - U_{04} + U_{24} = 0$$



L'integrale del campo elettrico lungo una linea chiusa Γ è pari alla somma algebrica delle d.d.p. che esistono tra le successive coppie di punti appartenenti alla rete. Tra questi punti la d.d.p. coincide con le corrispondenti tensioni di lato, ed a cui si attribuirà segno positivo (o negativo) se il verso di riferimento positivo della tensione è concorde (o discorde) con il verso di percorrenza della linea (stabilito da $\hat{\mathbf{t}}$).



Leggi di Kirchhoff ... i fondamenti

Passiamo ora all'enunciazione delle **leggi di Kirchhoff**, che sono i principi fondanti della teoria delle reti a parametri concentrati. Dedotte originariamente da evidenze sperimentali hanno poi trovato, come abbiamo dimostrato, ampia ed esauriente giustificazione nelle equazioni di Maxwell ($\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ e $\nabla \times \mathbf{E} = 0$).

Le **leggi di Kirchhoff** impongono legami lineari fra le correnti di lato e le tensioni di lato

e valgono

per ogni rete elettrica a parametri concentrati indipendentemente dalla natura e dal comportamento degli elementi che la compongono.



Leggi di Kirchhoff ... la LKC

- **Legge di Kirchhoff per le correnti (LKC):** in ogni rete elettrica a parametri concentrati e per ogni istante di tempo la somma algebrica di tutte le correnti dei lati che concorrono in un qualsiasi nodo è identicamente nulla, cioè

$$\sum_k I_k = 0 \quad \text{è una conseguenza diretta della} \quad \nabla \mathbf{J} = 0$$

per scrivere correttamente la somma algebrica, e senza scapito di generalità, si possono assumere positive le correnti che convergono in un qualsiasi nodo e negative quelle che da esso dipartono.

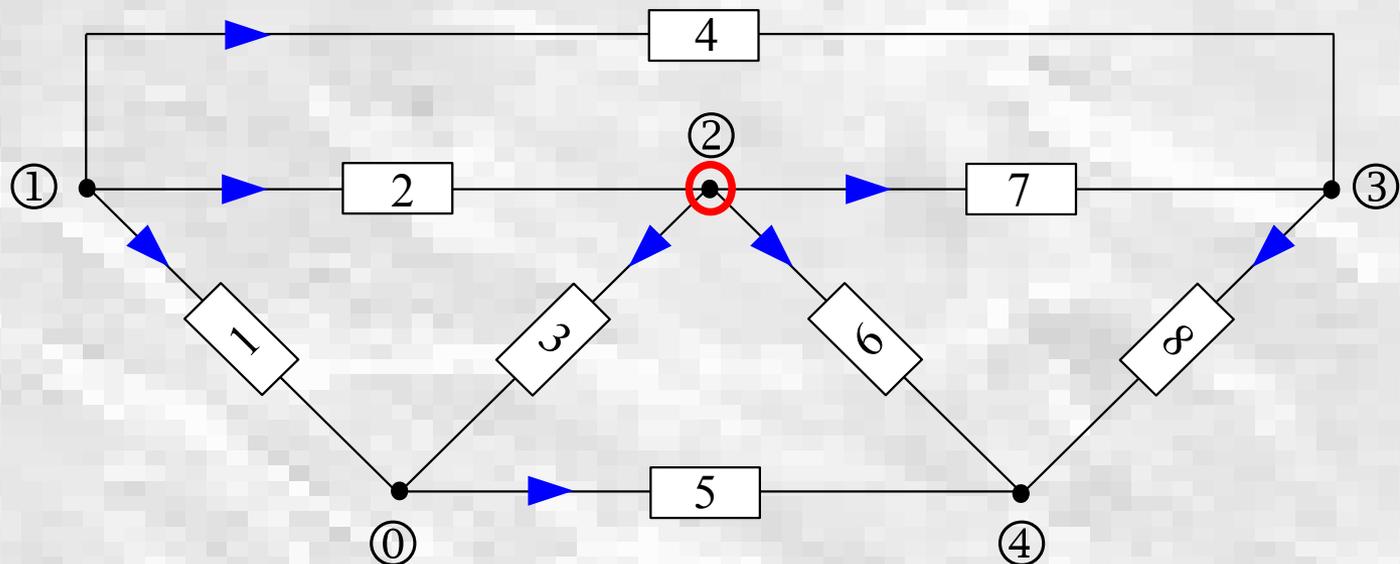
- In altri termini, la LKC può anche essere enunciata come segue: *la somma delle correnti entranti in un qualsiasi nodo è uguale alla somma delle correnti da esso uscenti.*



Il metodo generale di analisi

Leggi di Kirchhoff ... la LKC

- **Legge di Kirchhoff per le correnti (LKC):** *senza scapito di generalità, conveniamo di assumere positive le correnti che convergono nei nodi e negative quelle che da essi dipartono*
 - e.g., per in nodo 2 si avrà $+I_{12} - I_{20} - I_{24} - I_{23} = 0$



Leggi di Kirchhoff ... la LKT

- **Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKT):** in ogni rete elettrica a parametri concentrati e per ogni istante di tempo la somma algebrica di tutte le tensioni dei lati che compongono una qualsiasi maglia è identicamente nulla, cioè

$$\sum_k U_k = 0 \quad \text{è una conseguenza diretta della } \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

per scrivere correttamente la somma algebrica, e senza scapito di generalità, si possono assumere positive le tensioni con le frecce concordi con il verso positivo di percorrenza della maglia (scelto arbitrariamente quello orario o antiorario).

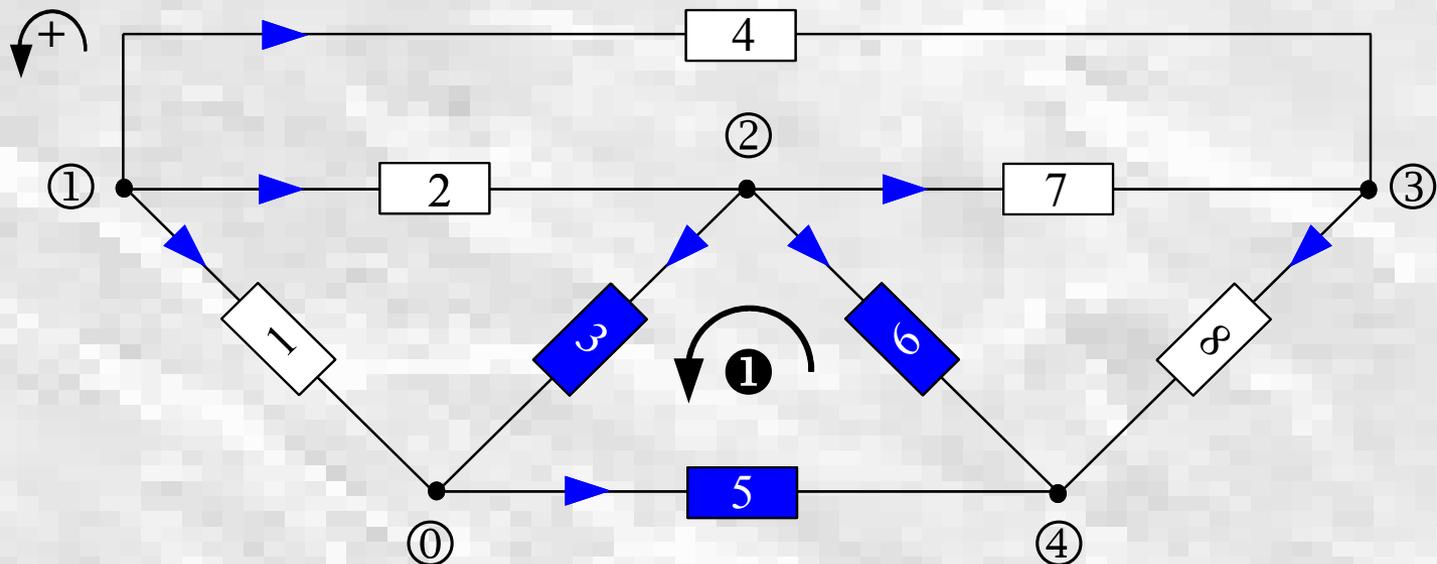
- In altri termini, la LKC può anche essere enunciata come segue: *la somma algebriche delle f.e.m. è uguale alla somma delle cadute di tensioni di tutti i lati della maglia.*



Il metodo generale di analisi

Leggi di Kirchhoff ... la LKT

- **Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKT):** *convenendo di assumere positive le tensioni di lato le cui frecce sono concordi con il verso di percorrenza e negative le altre si ha*
— e.g., per la maglia 1 si avrà $-U_{20} - U_{04} + U_{24} = 0$



Teorema di Tellegen

- **Teorema di Tellegen:** è una conseguenza diretta delle leggi di Kirchhoff e rappresenta il bilancio energetico delle reti elettriche

$$\sum_k U_k I_k = U_1 I_1 + U_2 I_2 + \dots + U_k I_k = P_1 + P_2 + \dots + P_k = 0$$

La natura topologica delle equazioni di Kirchhoff comporta che per un dato circuito, preso un qualsiasi vettore di tensioni di lato $[U_k']$, che soddisfi le LKT per quel circuito, ed un vettore di correnti di lato $[I_k'']$, che soddisfi le LKC per un secondo circuito topologicamente identico al primo, allora vale la seguente relazione (*potenze virtuali*)

$$[U'] [I'']^T = \sum_k U_k' I_k'' = U_1' I_1'' + U_2' I_2'' + \dots + U_k' I_k'' = 0$$



Analisi delle reti ... l'equazioni tipologiche e quelle topologiche

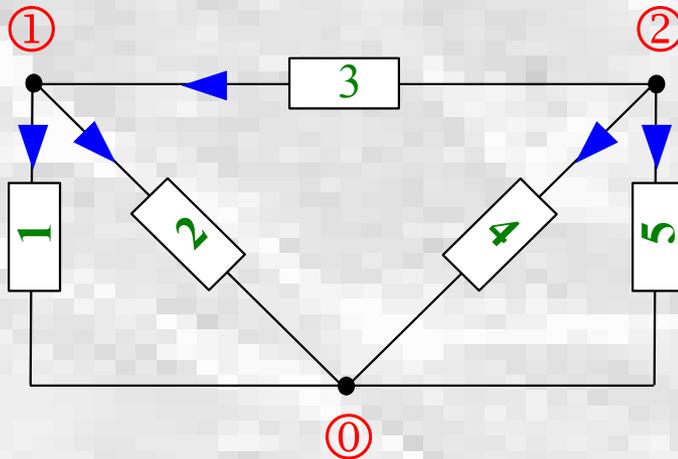
- L'analisi di una rete elettrica consiste nella determinazione delle correnti e delle tensioni di tutti i lati della rete, assumendo note le relazioni costitutive dei bipoli (**equazioni tipologiche**) e la struttura delle loro interconnessioni, in base alla quale possono essere correttamente scritte le equazioni di Kirchhoff (**equazione topologiche**).
- Se l sono i lati della rete, $2l$ sono le incognite da determinare (i.e., le l tensioni di lato e le l correnti di lato), poiché l sono le relazioni costitutive dei lati della rete (che sono fra loro indipendenti, equazioni tipologiche), l saranno le equazioni topologiche linearmente indipendenti che dovranno essere scritte applicando le due leggi di Kirchhoff.



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... operazioni prioritarie

- Da un punto di vista operativo, per effettuare l'analisi della generica rete in figura occorre:
 - 1) in via prioritaria, individuare e numerare tutti i nodi e tutti i lati della stessa, nonché scegliere arbitrariamente i versi di riferimento positivi per le tensioni e le correnti di lato

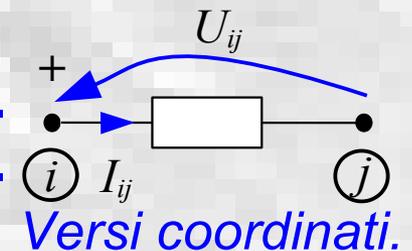


$n=3$ $l=5$ conv. utilizzatore

► Individuare e numerare tutti i nodi ($n=3$)

► Individuare e numerare tutti i lati ($l=5$)

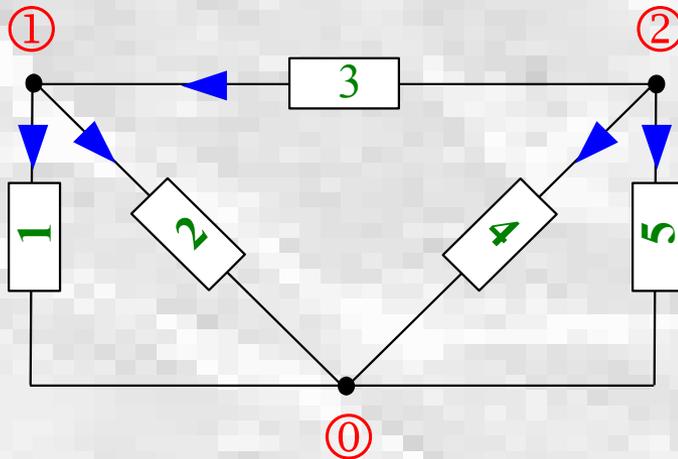
► Fissare i versi di riferimento positivi.



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... operazioni prioritarie

- Da un punto di vista operativo, per effettuare l'analisi della rete si consiglia di iniziare la numerazione dei nodi dallo 0, e di assumere quest'ultimo come riferimento per i potenziali ($V_0 = 0$).
e numerare tutti i nodi e tutti i lati scegliendo arbitrariamente i versi di riferimento positivi per le tensioni e le correnti di lato



$n=3$ $l=5$ conv. utilizzatore

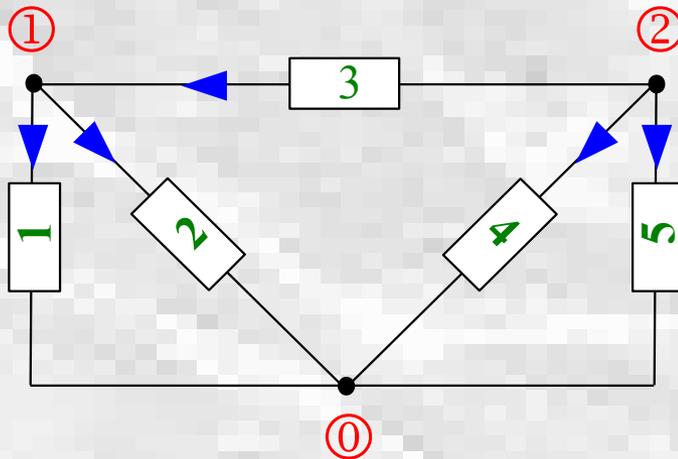
- Individuare e numerare tutti i nodi ($n = 3$)
 - Individuare e numerare tutti i lati ($l = 5$)
 - Fissare i versi di riferimento positivi.
-
- A diagram of a single branch between nodes i and j . Node i is on the left and node j is on the right. A blue arrow labeled I_{ij} points from node i to node j . A blue curved arrow labeled U_{ij} points from node j to node i , with a '+' sign at node i . Below the diagram is the text "Versi coordinati."



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... equazioni tipologiche basate sulle relazioni costitutive dei lati

- 2) successivamente, si possono scrivere le $l = 5$ equazioni tipologiche basate sulle relazioni costitutive dei lati che la compongono, che in forma implicita sono esprimibili come (si osservi che nulla vieta di esplicitarle o rispetto alla tensione o rispetto alla corrente di lato)



Lato 1	$f_1(U_{10,1}, I_{10,1}) = 0$
Lato 2	$f_2(U_{10,2}, I_{10,2}) = 0$
Lato 3	$f_3(U_{21}, I_{21}) = 0$
Lato 4	$f_4(U_{20,4}, I_{20,4}) = 0$
Lato 5	$f_5(U_{20,5}, I_{20,5}) = 0$

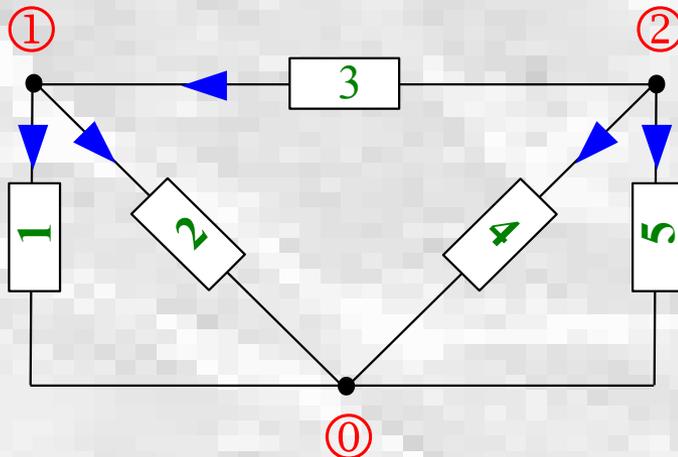
$n = 3$ $l = 5$ conv. utilizzatore



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... equazioni topologiche basate sulla LKC

- 3) quindi, imponendo l'equilibrio delle correnti (LKC) in ciascun nodo della rete, si può dimostrare che è possibile scrivere al più $p = n - 1$ equazioni linearmente indipendenti, e cioè, con riferimento alla rete in figura, $p = 2$ equazioni



$$\text{Nodo 1} \quad -I_{10,1} - I_{10,2} + I_{21} = 0$$

$$\text{Nodo 2} \quad -I_{21} - I_{20,4} - I_{20,5} = 0$$

$$\text{Nodo 0} \quad +I_{10,1} + I_{10,2} + I_{20,4} + I_{20,5} = 0$$

La terza ed ultima equazione (Nodo 0) non è indipendente, si ottiene infatti sottraendo la seconda dalla prima premoltiplicata per -1.

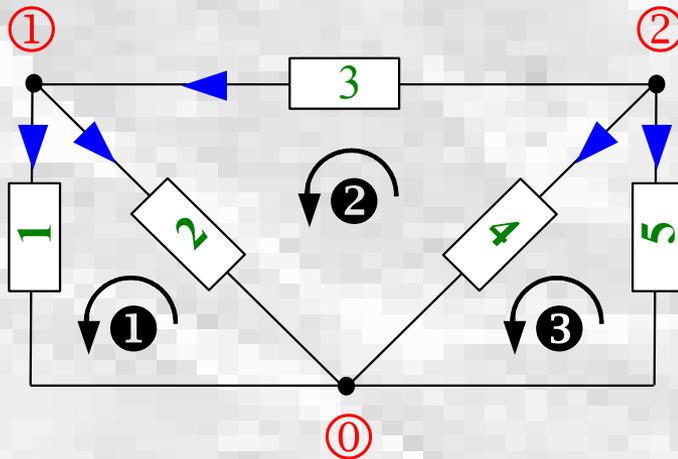
$$p = n - 1 = 3 - 1 = 2$$



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... equazioni topologiche basate sulla LKT

- 4) infine, imponendo l'equilibrio delle tensioni (LKT) in ciascuna maglia della rete, affinché il sistema di ordine $2l$ ammetta un'unica soluzione, si devono scrivere $m = l - p$ equazioni linearmente indipendenti, e cioè, con riferimento alla rete in figura, $m = 3$ equazioni



$$\text{Mag. 1}(l_1 l_2) \quad -U_{10,1} + U_{10,2} = 0$$

$$\text{Mag. 2}(l_2 l_3 l_4) \quad -U_{10,2} - U_{21} + U_{20,4} = 0$$

$$\text{Mag. 3}(l_4 l_5) \quad -U_{20,4} + U_{20,5} = 0$$

$$\nabla^+ \quad m = l - p = 5 - (3 - 1) = 3$$



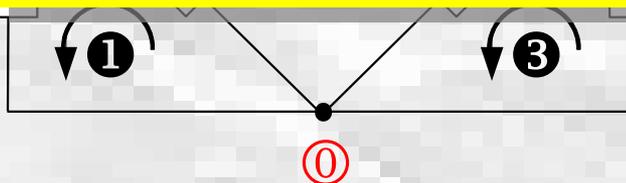
Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... equazioni topologiche basate sulla LKT

1) infine imponendo l'equilibrio delle tensioni (LKT) in

Si osservi che m rappresenta, non solo il numero delle equazioni che bisogna scrivere per completare il sistema risolvete, ma anche il **numero massimo** di equazioni linearmente indipendenti che si possono scrivere imponendo l'equilibrio delle tensioni alle maglie della rete. Conseguentemente, rappresenta anche il **numero massimo** di maglie indipendenti che si possono individuare nella rete assegnata.

$$\begin{aligned}U_{10,1} + U_{10,2} &= 0 \\U_{10,2} - U_{21} + U_{20,4} &= 0 \\U_{20,4} + U_{20,5} &= 0\end{aligned}$$



$$m = l - p = 5 - (3 - 1) = 3$$



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... equazioni topologiche basate sulla LKT

4) infine imponendo l'equilibrio delle tensioni (LKT) in
Si osservi che m rappresenta non solo il numero di maglie di ordine 2l

Per scegliere fra tutte le possibili maglie della rete le m
maglie indipendenti si può procedere osservando che
 $m = l - p$
riferimen-

una maglia è indipendente rispetto a quelle già individuate se ha almeno un lato non in comune con le altre (poiché impone una condizione che coinvolge una variabile non ancora vincolata, i.e. la tensione del lato non in comune). Per contro, se consideriamo una maglia i cui lati appartengono tutti a maglie già definite in precedenza, l'equazione di equilibrio delle tensioni di lato coinvolgerà variabili già vincolate, e l'equazione risultante sarà quindi esprimibile come combinazione lineare della altre (i.e., non è indipendente).

$$= 0$$
$$U_{20,4} = 0$$
$$= 0$$

$$m = l - p = 5 - (5 - 1) = 5$$



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... equazioni topologiche basate sulla LKT

1) infine imponendo l'equilibrio delle tensioni (LKT) in

A titolo di esempio, si considerino le maglie 1 e 2 (che sono fra loro indipendenti avendo i lati 1, 3 e 4 non in comune) e la maglia 4. Quest'ultima, rispetto alle maglie 1 e 2, non è indipendente, infatti tutti i suoi lati appartengono alle maglie 1 e 2.

$$-U_{10,1} + U_{10,2} = 0$$

$$-U_{10,2} - U_{21} + U_{20,4} = 0$$

$$-U_{10,1} - U_{21} + U_{20,4} = 0$$

rete, affinché il sistema di ordine $2l$ sia indipendente, si devono scrivere $m = l - p$ equazioni indipendenti, e cioè, con riferimenti comuni, $m = 3$ equazioni

$$\text{Mag. 1}(l_1 l_2) \quad -U_{10,1} + U_{10,2} = 0$$

$$\text{Mag. 2}(l_2 l_3 l_4) \quad -U_{10,2} - U_{21} + U_{20,4} = 0$$

$$\text{Mag. 3}(l_4 l_5) \quad -U_{20,4} + U_{20,5} = 0$$

$$\text{Mag. 4}(l_1 l_3 l_4) \quad -U_{10,1} - U_{21} + U_{20,4} = 0$$

$$\text{Mag. 5}(l_1 l_3 l_5) \quad -U_{10,1} - U_{21} + U_{20,5} = 0$$

$$\text{Mag. 6}(l_2 l_3 l_5) \quad -U_{10,2} - U_{21} + U_{20,5} = 0$$



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... equazioni topologiche basate sulla LKT

1) infine imponendo l'equilibrio delle tensioni (LKT) in rete, affinché il sistema di ordine $2l$ sia indipendente, si devono scrivere $m = l - p$ equazioni indipendenti, e cioè, con riferimento alla rete, $m = 3$ equazioni

Pertanto, le maglie 1, 2 e 3, che sono fra loro indipendenti, costituiscono uno dei possibili insiemi di m maglie indipendenti della rete. Si osservi che questo insieme non è unico, infatti, ad esempio, anche le maglie 4, 5 e 6 costituiscono un possibile gruppo di m maglie indipendenti. Non lo sono invece le maglie 1, 2 e 4 (come per altro già dimostrato).

$$\text{Mag. 1}(l_1l_2) \quad -U_{10,1} + U_{10,2} = 0$$

$$\text{Mag. 2}(l_2l_3l_4) \quad -U_{10,2} - U_{21} + U_{20,4} = 0$$

$$\text{Mag. 3}(l_4l_5) \quad -U_{20,4} + U_{20,5} = 0$$

$$\text{Mag. 4}(l_1l_3l_4) \quad -U_{10,1} - U_{21} + U_{20,4} = 0$$

$$\text{Mag. 5}(l_1l_3l_5) \quad -U_{10,1} - U_{21} + U_{20,5} = 0$$

$$\text{Mag. 6}(l_2l_3l_5) \quad -U_{10,2} - U_{21} + U_{20,5} = 0$$

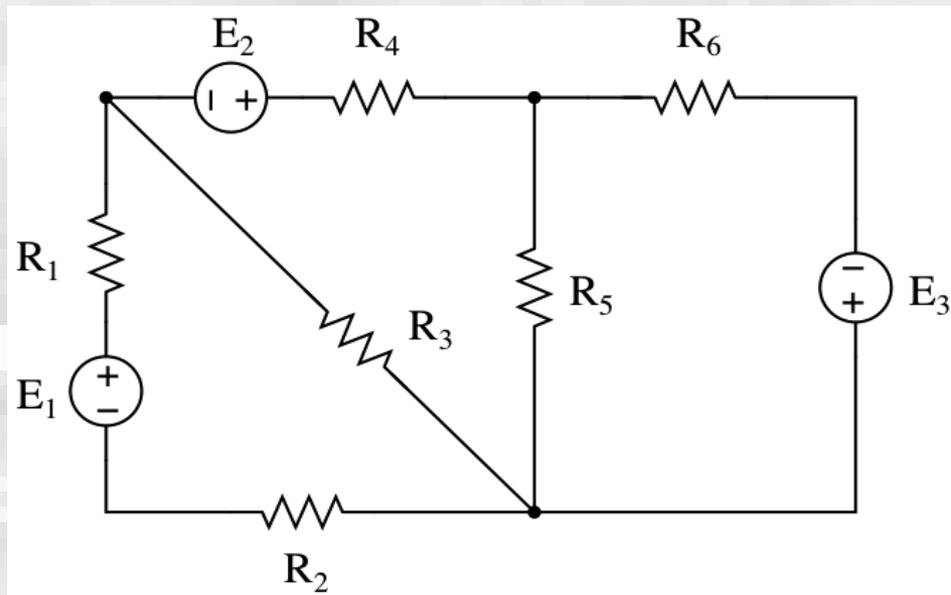
$$m = l - p = 5 - (3 - 1) = 3$$



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... l'applicazione del metodo

- **Esempio.** Risolvere la rete in figura verificare il bilancio delle potenze (i.e., il teorema di Tellegen).



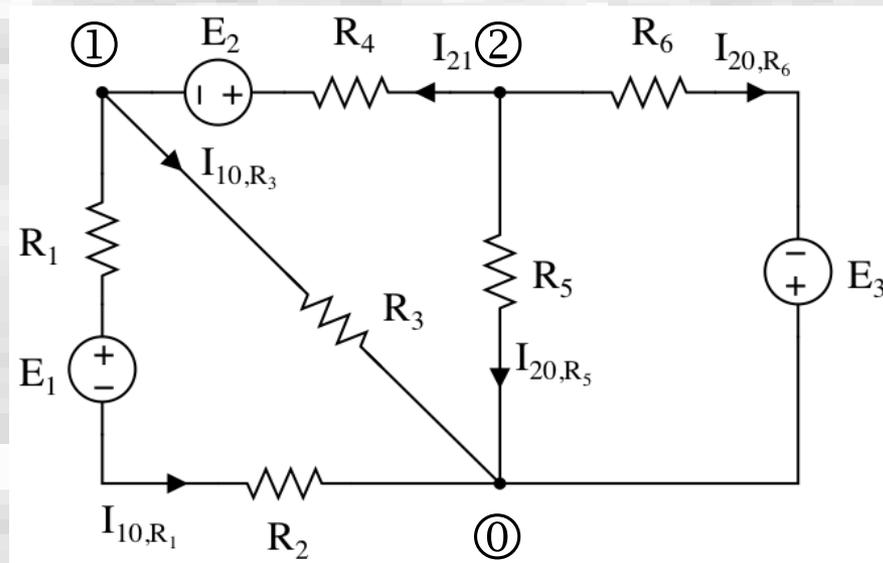
Dati: $E_1 = 10 \text{ V}$
 $E_2 = 20 \text{ V}$
 $E_3 = 15 \text{ V}$
 $R_1 = R_4 = R_5 = 10 \ \Omega$
 $R_2 = R_3 = 20 \ \Omega$
 $R_6 = 30 \ \Omega$

Occorre in via prioritaria individuare i nodi ed i lati della rete, nonché fissare i versi di riferimento positivi per le tensioni e le correnti di lato.



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... l'applicazione del metodo

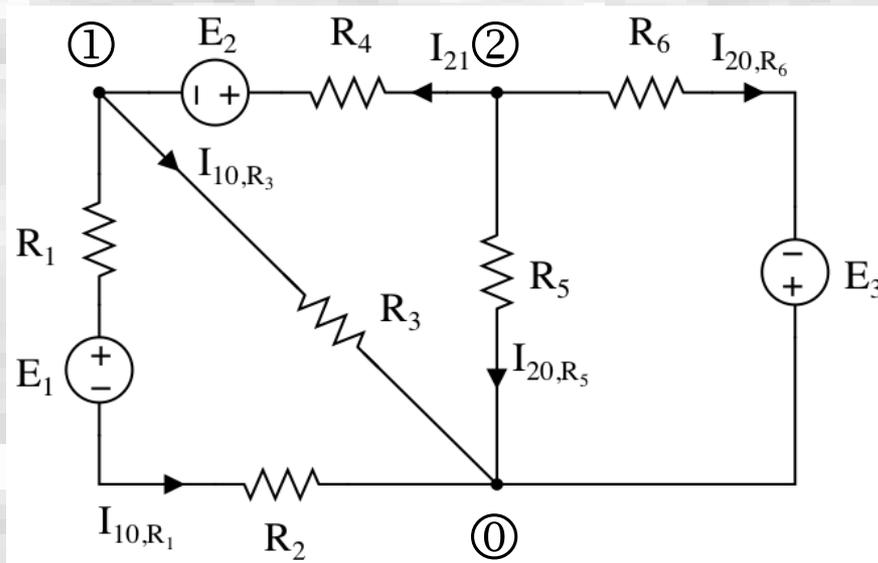


La rete assegnata ha $n = 3$ nodi e $l = 5$ lati. L'analisi delle rete richiede quindi la soluzione di un sistema di $2l = 10$ equazioni date da: $l = 5$ equazioni costitutive, $p = n - 1 = 2$ equazioni di equilibrio delle correnti ai nodi (ottenute applicando la LKC) e $m = l - p = 3$ equazioni di equilibrio delle tensione di maglia (ottenute applicando la LKT).



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... l'applicazione del metodo



Risolti preliminarmente gli eventuali collegamenti serie o parallelo dei bipoli resistivi, le relazioni costitutive dei lati si ottengono applicando la legge di Ohm o la legge di Ohm generalizzata.

Equazioni costitutive dei lati

($l = 5$)

Lato 1 $U_{10,R_1} = (R_1 + R_2) I_{10,R_1} + E_1$

Lato 2 $U_{10,R_3} = R_3 I_{10,R_3}$

Lato 3 $U_{21} = R_4 I_{21} + E_2$

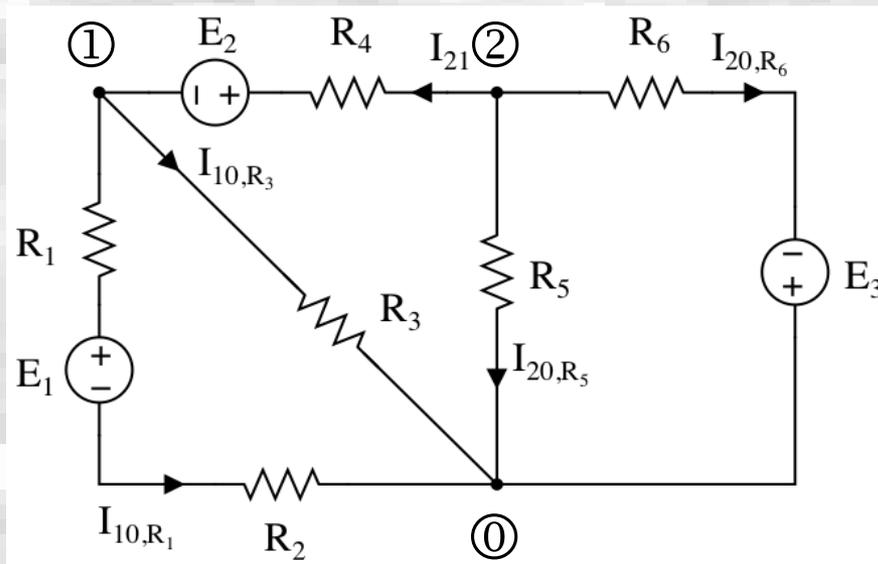
Lato 4 $U_{20,R_5} = R_5 I_{20,R_5}$

Lato 5 $U_{20,R_6} = R_6 I_{20,R_6} - E_3$



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... l'applicazione del metodo



Applicando la LKC a tutti i nodi della rete fatta esclusione di quello assunto come riferimento per i potenziali (i.e., il nodo 0) si ottengono due equazioni di equilibrio fra loro indipendenti.

Equazioni di equilibrio delle correnti (LKC) $(p = n - 1 = 2)$

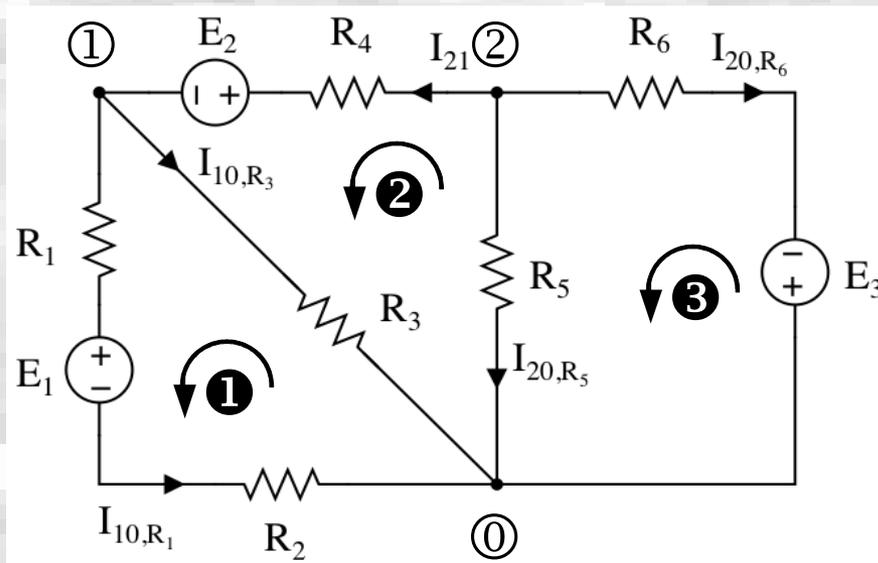
$$\text{Nodo 1} \quad -I_{10,R_1} - I_{10,R_3} + I_{21} = 0$$

$$\text{Nodo 2} \quad -I_{21} - I_{20,R_5} - I_{20,R_6} = 0$$



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... l'applicazione del metodo



Individuate le maglie indipendenti della rete e fissato un verso positivo di percorrenza per le stesse, applicando la LKT alle si ottengono tre equazioni di equilibrio fra loro indipendenti.

Equazioni di equilibrio delle tensioni (LKT) ($m = l - p = 3$)

$$\text{Maglia 1} \quad -U_{10,R_1} + U_{10,R_3} = 0$$

$$\text{Maglia 2} \quad -U_{10,R_3} - U_{21} + U_{20,R_5} = 0$$

$$\text{Maglia 3} \quad -U_{20,R_5} + U_{20,R_6} = 0$$



Analisi delle reti ... l'applicazione del metodo

... il sistema lineare risolvete la rete risulta pertanto così definito

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{10,R_1} = (R_1 + R_2) I_{10,R_1} + E_1 \\ U_{10,R_3} = R_3 I_{10,R_3} \\ U_{21} = R_4 I_{21} + E_2 \\ U_{20,R_5} = R_5 I_{20,R_5} \\ U_{20,R_6} = R_6 I_{20,R_6} - E_3 \\ -I_{10,R_1} - I_{10,R_3} + I_{21} = 0 \\ -I_{21} - I_{20,R_5} - I_{20,R_6} = 0 \\ -U_{10,R_1} + U_{10,R_3} = 0 \\ -U_{10,R_3} - U_{21} + U_{20,R_5} = 0 \\ -U_{20,R_5} + U_{20,R_6} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -I_{10,R_1} - I_{10,R_3} + I_{21} = 0 \\ -I_{21} - I_{20,R_5} - I_{20,R_6} = 0 \\ -[(R_1 + R_2) I_{10,R_1} + E_1] + R_3 I_{10,R_3} = 0 \\ -R_3 I_{10,R_3} - (R_4 I_{21} + E_2) + R_5 I_{20,R_5} = 0 \\ -R_5 I_{20,R_5} + R_6 I_{20,R_6} - E_3 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -I_{10,R_1} - I_{10,R_3} + I_{21} = 0 \\ -I_{21} - I_{20,R_5} - I_{20,R_6} = 0 \\ -(R_1 + R_2) I_{10,R_1} + R_3 I_{10,R_3} = +E_1 \\ -R_3 I_{10,R_3} - R_4 I_{21} + R_5 I_{20,R_5} = +E_2 \\ -R_5 I_{20,R_5} + R_6 I_{20,R_6} = +E_3 \end{array} \right.$$



Il metodo generale di analisi

Analisi delle reti ... l'applicazione del metodo

... che può essere vantaggiosamente riscritto in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -(R_1 + R_2) & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_3 & -R_4 & +R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_5 & +R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{10,R_1} \\ I_{10,R_3} \\ I_{21} \\ I_{20,R_5} \\ I_{20,R_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +E_1 \\ +E_2 \\ +E_3 \end{bmatrix}$$

e numericamente si ha

$$\begin{bmatrix} I_{10,R_1} \\ I_{10,R_3} \\ I_{21} \\ I_{20,R_5} \\ I_{20,R_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -30 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -10 & +10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & +30 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +10 \\ +20 \\ +15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5762712 \\ -0.3644068 \\ -0.9406780 \\ +0.3305085 \\ +0.6101695 \end{bmatrix} \text{ A}$$



Analisi delle reti ... l'applicazione del metodo

$$\begin{aligned} \dots \quad U_{10,R_1} &= (R_1 + R_2) I_{10,R_1} + E_1 = 30 \cdot (-0.5762712) + 10 = -7.288136 \text{ V} \\ U_{10,R_3} &= R_3 I_{10,R_3} = 20 \cdot (-0.3644068) = -7.288136 \text{ V} \\ U_{21} &= R_4 I_{21} + E_2 = 10 \cdot (-0.9406780) + 20 = 10.59322 \text{ V} \\ U_{20,R_5} &= R_5 I_{20,R_5} = 10 \cdot (+0.3305085) = 3.305085 \text{ V} \\ U_{20,R_6} &= R_6 I_{20,R_6} - E_3 = 30 \cdot (+0.6101695) - 15 = 3.305085 \text{ V} \end{aligned}$$

Verifica del teorema di Tellegen

$$\begin{aligned} \sum U I &= U_{10,R_1} I_{10,R_1} + U_{10,R_3} I_{10,R_3} + U_{21} I_{21} + U_{20,R_5} I_{20,R_5} + U_{20,R_6} I_{20,R_6} = \\ &= 4.1999428 + 2.6558463 - 9.9648090 + 1.09235868 + 2.0166620 = \\ &= 0 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\sum P_g = \sum P_d \quad \text{ovvero} \quad \sum E I = \sum R I^2$$

$$\sum E I = -E_1 I_{10,R_1} - E_2 I_{21} + E_3 I_{20,R_6} = \boxed{33.728814 \text{ W}}$$

$$\sum R I^2 = (R_1 + R_2) I_{10,R_1}^2 + R_3 I_{10,R_3}^2 + R_4 I_{21}^2 + R_5 I_{20,R_5}^2 + R_6 I_{20,R_6}^2 = \boxed{33.728815 \text{ W}}$$

