

06/10/2025

$$x(s) = (R \cos(ws), R \sin(ws), ws)$$

$$x'(s) = (-Rw \sin(ws), Rw \cos(ws), w)$$

$$\|x'(s)\|_2^2 = w^2(R^2 + c^2) = 1 \quad \text{we} \quad w = [R^2 + c^2]^{-1/2}$$

$$\Rightarrow x'(s) = T(s)$$

$$\frac{d}{ds}(T(s) \cdot T(s)) = 0 = 2 T(s) \cdot T'(s)$$

$$\Rightarrow T'(s) = \|T'(s)\|_2 \cdot \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|_2} = \overset{\text{CURVATURA}}{k(s)} \overset{\text{VERSORE NORMALE}}{N(s)}$$

$$x''(s) = (-Rw^2 \cos(ws), -Rw^2 \sin(ws), 0) = T'(s)$$

$$\Rightarrow k(s) = Rw^2 = \frac{R}{R^2 + c^2} \quad N(s) = -(\cos(ws), \sin(ws), 0)$$

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) \quad \text{VERSORE BINORMALE}$$

$$B(s) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -Rw \sin(ws) & Rw \cos(ws) & w \\ -\cos(ws) & -\sin(ws) & 0 \end{vmatrix} = (w \sin(ws), -w \cos(ws), R)$$

TETRAEDRO DI FRÉNÉT $(T(s), N(s), B(s))$

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} T(s) = k(s) N(s) \\ \frac{d}{ds} N(s) = -k(s) T(s) - \tau(s) B(s) \\ \frac{d}{ds} B(s) = \tau(s) N(s) \end{cases} \quad \tau \quad \text{TORSIONE}$$

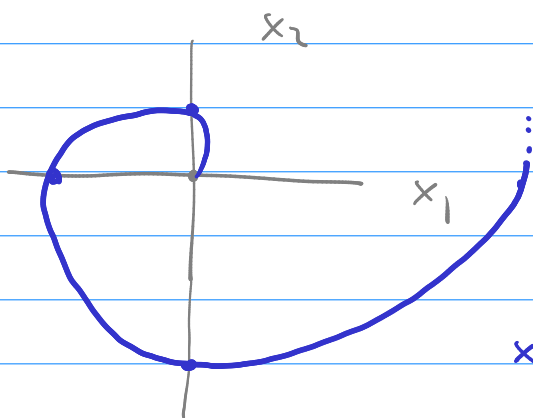
$$B'(s) = (c\omega^2 \cos(\omega s), + c\omega^2 \sin(\omega s), 0) = -c\omega^2 N(s)$$

$$\kappa(s) = -\omega^2 c = -\frac{c}{R^2 + c^2}$$

ESERCIZI

ESERCIZIO 4. La spirale di Archimede è una curva piana descritta dalla parametrizzazione polare $\rho(\theta) = c\theta$, con $c > 0$ e $\theta \in [0, 4\pi]$, allora

- si provi a disegnarne l'immagine per $c = 1$,
- si verifichi che definisce una curva semplice e regolare,
- se ne calcoli la lunghezza al variare di c .



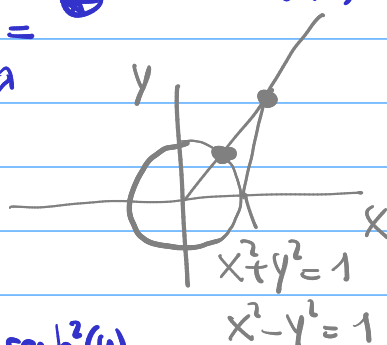
$$\begin{aligned} x(\theta) &= (\rho(\theta) \cos(\theta), \rho(\theta) \sin(\theta), 0) \\ &= (c\theta \cos(\theta), c\theta \sin(\theta), 0) \end{aligned}$$

$$x'(\theta) = (c \cos(\theta) - c\theta \sin(\theta), c \sin(\theta) + c\theta \cos(\theta), 0)$$

$$\|x'(\theta)\|_2^2 = c^2 [\cos^2(\theta) + \theta^2 \sin^2(\theta) - 2\theta \sin(\theta) \cos(\theta) + \sin^2(\theta) + \theta^2 \cos^2(\theta) + 2\theta \sin(\theta) \cos(\theta)] = c^2 [1 + \theta^2]$$

$$L(\theta) = \int_0^{4\pi} \|x'(\theta)\|_2 d\theta = \int_0^{4\pi} c \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \textcircled{*} \quad \theta = \sinh(u), \quad d\theta = (\sinh(u))' du = \cosh(u) du$$

$$\begin{aligned} \sinh(u) &= \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \\ \cosh(u) &= \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) \end{aligned}$$

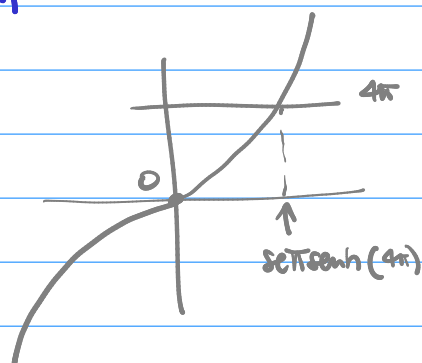


$$\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1 \Rightarrow \cosh^2(u) = 1 + \sinh^2(u)$$

$$\textcircled{*} = c \int_0^{\ln(4\pi + \sqrt{16\pi^2 + 1})} \sqrt{1 + \sinh^2(u)} \cosh(u) du$$

$$\frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = 4\pi \quad \cdot 2e^u$$

$$e^{2u} - 8\pi e^u - 1 = 0$$



$$(e^u)_{1,2} = 4\pi \pm \sqrt{16\pi^2 + 1} \Rightarrow u = \ln(4\pi + \sqrt{16\pi^2 + 1})$$

$$\ln(4\pi + \sqrt{16\pi^2 + 1})$$

$$= c \int_0^{\ln(\dots)} \cosh^2(u) du = c \int_0^{\ln(\dots)} \frac{1}{4} (e^{2u} + 2 + e^{-2u}) du$$

$$= c \left[\frac{1}{8} e^{2u} + \frac{1}{2} u - \frac{1}{8} e^{-2u} \right]_0^{\ln(\dots)}$$

ESERCIZIO 1. Assegnata la curva di parametrizzazione

$$x(t) = (t - r \sin(t), 1 - r \cos(t), ht) \quad t \in [0, 4\pi]$$

dove $r, h \geq 0$:

i. per quali valori dei parametri la curva è semplice e regolare?

ii. Si calcoli la lunghezza della curva per $h = 0$ e $r = 1$.

$$x(t) = (t - r \sin(t), 1 - r \cos(t), ht)$$

$$\text{se } h > 0 \quad x_3(t) = ht \quad \text{e} \quad x_3(s) = hs \quad \text{e} \quad x_3(t) = x_3(s) \Rightarrow t = s$$

$$\text{se } h = 0 \quad x_1(t) = t - r \sin(t) \\ x_2(t) = 1 - r \cos(t)$$

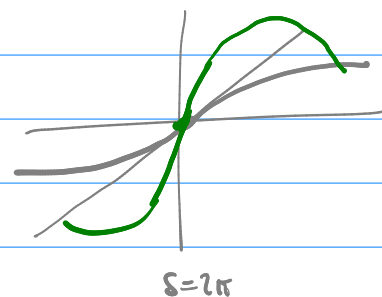
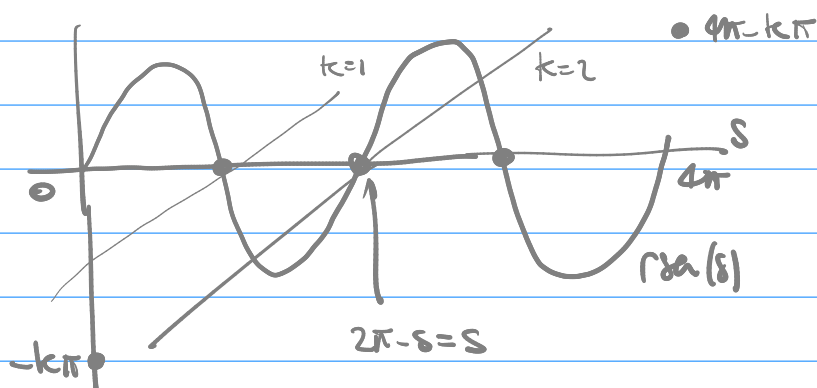
$$x(t) = x(s) \Rightarrow x_2(t) = x_2(s) \Rightarrow r \cos(t) = r \cos(s) \Rightarrow t = 2k\pi - s$$

$$(\text{se } r = 0 \Rightarrow x(t) = (t, 1, 0) \text{ e' semplice})$$

$$x_1(2k\pi - s) = 2k\pi - s - r \sin(2k\pi - s) = 2k\pi - s + r \sin(s) \stackrel{?}{=} x_1(s)$$

$$2k\pi - s + r \sin(s) = s - r \sin(s)$$

$$-k\pi + s = +r \sin(s) \quad (k=1,2)$$



$$x'(t) = (1 - r \cos(t), -r \sin(t), h)$$

se $h > 0$ $x'(t) \neq 0$ sempre $\Rightarrow$ la curva è regolare

se $h = 0$ $x'(t) = (1 - r \cos(t), -r \sin(t), 0)$

$$\|x'(t)\|_2^2 = (1 + r^2 \cos^2(t) - 2r \cos(t) + r^2 \sin^2(t)) \\ = (1 + r^2 - 2r \cos(t)) = 0$$

ovvero $r = 1$
 $t = 2\pi$

ESEMPIO
IMPORTANTE

$$F(x) = \frac{k_0}{\|x\|_2^3} (x_1, x_2, x_3) = k_0 \frac{x}{\|x\|_2^3} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$k_0 \in \mathbb{R}$$

campo coulombiano

$$W = \int_{\gamma} \vec{F}(x) \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} [F(x) \cdot T(x)] ds \\ = \int_a^b F(x(t)) \cdot \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|_2} \|x'(t)\|_2 dt$$



$$ds = \|x'(t)\|_2 dt$$

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ $t \in [a, b]$ curva regolare

$$= \int_a^b F(x(t)) \cdot x'(t) dt$$

$$x(t) = R(\cos(t), \sin(t), 0) \quad x'(t) = R(-\sin(t), \cos(t), 0)$$

$$W_x = \int_a^b \frac{k_0 (R \cos(t), R \sin(t), 0)}{R^3} \cdot (-R \sin(t), R \cos(t), 0) dt = 0$$

$$y(t) = (t, 0, 0) \quad b \geq a > 0 \quad y'(t) = e_1$$

$$W_y = \int_a^b k_0 \frac{(t, 0, 0)}{t^3} \cdot (1, 0, 0) dt = k_0 \int_a^b \frac{1}{t^2} dt = k_0 \left[-\frac{1}{t} \right]_a^b = k_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE

$\forall a, b \in \mathbb{R} \ a > 0, b > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$.

PROP. $\text{se } a < x \ \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow a \leq 0$

Se per assurdo fosse $a > 0$ allora avremmo che

$$a < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ cioè}$$

$an < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ contraddicendo il principio di Archimede. $\square$

07/10/2025

ESEMPIO $\{x_k = 1,414\dots\} \subset \mathbb{Q}$
k cifre

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

DEF. $(X, \|\cdot\|_X)$ spazio normato

$\{x_k\} \subset X$ è una successione convergente a $\bar{x} \in X$
e $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che
 $\|x_k - \bar{x}\|_X \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$

$\{x_k\} \subset X$ è una successione di Cauchy
e $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che
 $\|x_k - x_{k+p}\|_X \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \quad (\forall p \in \mathbb{N})$

PROP. Ogni successione convergente è di Cauchy

ESEMPIO. $\{x_k = 1,414\dots\} \subset \mathbb{Q}$ è di Cauchy ma
k cifre non è convergente

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \|x_k - x_{k+p}\|_2 \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

$$\|x_k - x_{k+p}\|_2 = 0, 0 \dots 0 a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p} \quad (a_i \in \{0, 1, \dots, 9\})$$

$$\leq 0, 0 \dots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-esimo}}}{1} = 10^{-k} \stackrel{?}{\leq} \varepsilon \Rightarrow k \geq -\log_{10}(\varepsilon)$$

DEF. $(X, \|\cdot\|_X)$ spazio normato è **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.

$(X, \|\cdot\|_X)$ spazio normato completo si dice **di Banach**.

TEOR. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Banach.

Dimo. $\{x_k\}$ successione di Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 = k_0(\varepsilon) \text{ tale che } \forall k \geq k_0(\varepsilon) \quad \|x_k - x_{k+p}\|_2 \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \|x_k - x_{k+p}\|_2 &= \left[(x_{k,1} - x_{k+p,1})^2 + (x_{k,2} - x_{k+p,2})^2 + \dots + (x_{k,n} - x_{k+p,n})^2 \right]^{1/2} \\ &\geq \left[(x_{k,i} - x_{k+p,i})^2 \right]^{1/2} = |x_{k,i} - x_{k+p,i}| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |x_{k,i} - x_{k+p,i}| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0(\varepsilon) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

$$\Rightarrow \{x_{k,i}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \text{ è una successione di Cauchy}$$

$$\text{poiché } \mathbb{R} \text{ è completo } \exists \bar{x}_i \in \mathbb{R} \text{ tale che } x_{k,i} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \bar{x}_i$$

$$\Rightarrow \bar{x} := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 = k_0(\varepsilon) \text{ tale che } \|x_k - x_{k+p}\|_2 \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

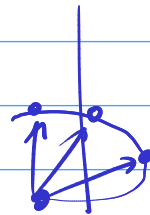
$$\|x_k - x_{k+p}\|_2^2 = \sum_{i=1}^3 (x_{ki} - x_{k+pi})^2 \leq \varepsilon^2$$

$\downarrow p \rightarrow +\infty$

$$\|x_k - \bar{x}\|_2 = \sum_{i=1}^3 (x_{ki} - \bar{x}_i)^2 \leq \varepsilon^2 \Rightarrow x_k \rightarrow \bar{x} \quad \blacksquare$$

QUIZ 7. $x(t) = (\sin(t), \cos(t), -t)$, con $t \in [0, \pi]$,
è una curva planare

QUIZ 8. $x(t) = (a \sin(t), b \cos(t), ht)$, con $t \in [0, \pi]$ e $a, b \neq 0$,
è una curva planare per ogni h



DEF. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, r > 0 \quad B(\bar{x}, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\|_2 < r\}$
palla centrata in $\bar{x}$ di raggio r

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se $\forall p \in A \exists \bar{r} = \bar{r}(p) > 0$
Tale che $B(p, \bar{r}) \subseteq A$ (p punto interno ad A).

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se $C^c = \mathbb{R}^n \setminus C$ è aperto.

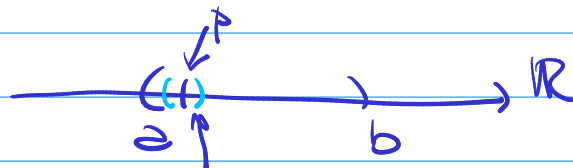
$E \subseteq \mathbb{R}^n$ p è un punto di bordo per E se $\forall r > 0$
 $B(p, r) \cap E \neq \emptyset$ e $B(p, r) \cap E^c \neq \emptyset$,
 p è un punto di accumulazione per E se $\forall r > 0$
 $(B(p, r) \setminus \{p\}) \cap E \neq \emptyset$.

ESEMPL.

$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ aperto

$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ chiuso

$$[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$



$$(p-d, p+d) \subseteq (a, b)$$

$$d = \frac{1}{2} \min \{ |a - p|, |b - p| \}$$

$$B(p, r) := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - p\|_2 < r\}$$

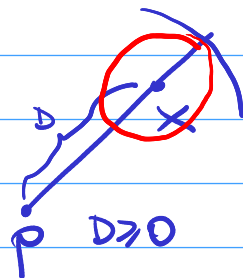
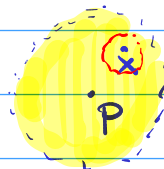
$B(p, r) \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto

ESERCIZI

$\bar{B}(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x - p\|_2 \leq r\}$ è chiuso

$\{x \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0\}$ è aperto

$x \in B(p, r)$ è aperto $\forall x \in B(p, r) = B$
 $\exists \bar{r} = \bar{r}(x) > 0$ t.c. $B(x, \bar{r}) \subseteq B$



$$\bar{r} := \frac{1}{2}(r - D) > 0$$

$$\forall y \in B(x, \bar{r}) \Rightarrow y \in B(p, r) \quad \|y - p\|_2 \stackrel{DT}{\leq} \|y - x\|_2 + \|x - p\|_2 < \frac{1}{2}(r - D) + D = \frac{1}{2}(r + D) < r$$

$$\Rightarrow B(x, \bar{r}) \subseteq B(p, r)$$

$\Rightarrow B(p, r)$ è un aperto!

Oss.

$$x_k \rightarrow \bar{x} \text{ se } \|x_k - \bar{x}\|_2 \rightarrow 0 \text{ (in } \mathbb{R})$$

$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \text{ o } (X, \|\cdot\|_X)$$

$$\|x_k - \bar{x}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n |x_{ki} - \bar{x}_i|^2 \right]^{1/2} \rightarrow 0 \quad (\text{se } x_k \rightarrow \bar{x})$$

$$[|x_{ki} - \bar{x}_i|^2]^{1/2} = |x_{ki} - \bar{x}_i| \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad x_{ki} \rightarrow \bar{x}_i \Rightarrow |x_{ki} - \bar{x}_i| \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow \infty$$

$$0 \in \|x_k - \bar{x}\|_2 = \left[|x_{k1} - \bar{x}_1|^2 + |x_{k2} - \bar{x}_2|^2 + \dots + |x_{kn} - \bar{x}_n|^2 \right]^{1/2} \rightarrow 0$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad k \rightarrow \infty \quad \quad \downarrow$$

$$0 \quad \quad 0 \quad \quad 0$$

$$x_k \rightarrow \bar{x} \text{ in } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \text{ se } x_{ki} \rightarrow \bar{x}_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$$

DEF.

$X \subseteq (X, \|\cdot\|_X)$ spazio di Banach si dice

sequenzialmente compatto (compatto per successioni)

se $\forall \{x_k\} \subseteq X$ allora $\exists \{x_{k(j)}\} \subseteq \{x_k\}$ T.C. $x_{k(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \bar{x} \in X$

ESEMPIO $\{x_k\} \subseteq (0,1)$ $x_k = \frac{1}{k}$ ($k \geq 1$) $x_k \rightarrow 0 \notin (0,1)$!

$\{x_k\} \subseteq [0,1]$ B.V. $\Rightarrow \exists x_{k(j)} \rightarrow \bar{x}$

osservo che $0 \leq x_{k(j)} \leq 1 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \leq \bar{x} \leq 1$

$\Rightarrow [0,1]$ è compatto!

In $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ X è compatto se è chiuso e limitato

ESEMPIO $C \subseteq \mathbb{R}^n$ non limitato $\forall k \in \mathbb{N} \exists x_k \in C$ tale che $x_k \notin [-k, k]^n$

DEF.

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ è limitato se $\exists M > 0$ tale che

$$D \subseteq [-M, M]^n = [-M, M] \times [-M, M] \times \dots \times [-M, M]$$

$$\|x_k\|_2 \geq [k^2]^{\frac{1}{2}} = k \rightarrow \infty$$

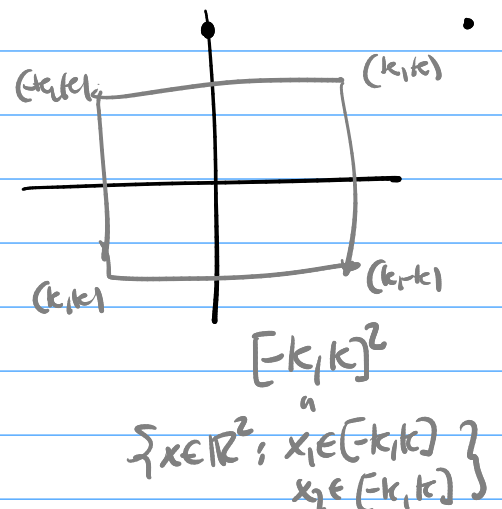
$\bar{B} = \overline{B(0,r)} = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_2 \leq r\}$
è compatto

$\{x_k\} \subseteq \bar{B}$ $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2})$

$\{x_{k,1}\} \subseteq [-r, r] \subseteq (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$

[B.V.] $\Rightarrow \{x_{k(j),1}\}$ converge

$\{x_{k(j),2}\} \subseteq [-r, r]$ [B.V.] $\Rightarrow \{x_{k(j),2}\}$ converge



$$\Rightarrow x_{k_2(j)} \rightarrow \bar{x} \stackrel{?}{\in} \bar{B}$$

$$\text{puisque } \{x_{k_2(j)}\} \in \bar{B} \Rightarrow |x_{k_2(j),1}|^2 + |x_{k_2(j),2}|^2 \leq r^2$$

$$\downarrow j \rightarrow +\infty$$

$$|\bar{x}_1|^2 + |\bar{x}_2|^2 \leq r^2$$

$$\{x_k = ((-1)^k; \cos(k\frac{\pi}{2}))\}_{k \in \mathbb{N}}$$