ANALISI VETTORIALE - LT FISICA 30046 - A.A. 2025/26
SCHEDA 02 - 20251010

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

ESERCIZIO 1. *Sia* $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita come segue*

$$s(x, y) := x \cdot [My] \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

dove $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ *è una matrice simmetrica e definita positiva. Si provi che*

$$\|x\|_s := \sqrt{s(x, x)} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

è una norma sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. *Tale norma si dice indotta dal prodotto scalare* s.

ESERCIZIO 2. *Posto*

$$\|x\|_1 := |x_1| + |x_2| \qquad \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

per $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, *si provi che entrambe le funzioni* $\|\cdot\|_1$ *e* $\|\cdot\|_\infty$ *sono delle norme su* $\mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 3. *Si provi che la norma*

$$\|x\| := \Big[|x_1|^2 + |x_2|^2\Big]^{1/2} = \sqrt{x \cdot x}$$

è invariante per rotazioni del piano $\mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 4. *Si provi che non esiste un prodotto scalare su* $\mathbb{R}^2$ *che induce la norma* $\|\cdot\|_1$.

ESERCIZIO 5. *Si mostri che i seguenti sottoinsiemi del piano sono aperti:*

$$\mathbb{R}^2 \qquad B(O, 1) = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\} \qquad \{x_2 > 0\}$$

ESERCIZIO 6. *Seguendo le definizioni introdotte a lezione, si verifichi che valgono le seguenti affermazioni*

$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ *è aperto e convesso per ogni* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *è chiuso e compatto per ogni* $-\infty < a < b < +\infty$

ESERCIZIO 7. *Si provi che i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^n$ *sono aperti*

$$A = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0\Big\} \qquad B = \Big\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\Big\} \qquad C = \Big\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 > 0\Big\}$$

Poi si dica quali sono i rispettivi complementari chiusi e si determini se sono insiemi convessi o meno.

Esercizio 8. *Si disegnino nel piano i seguenti insiemi e si determini se sono aperti o chiusi e se sono limitati o meno.*

$$E_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 < 0\right\}$$
$$E_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 + x_2 \le 4\right\}$$
$$E_3 = [0,1]^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1, x_2 \le 1\right\}$$

Esercizio 9. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *un insieme aperto,* $w \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *(con* $\lambda \neq 0$*) e* R *una rotazione nello spazio, allora si mostri che gli insiemi*

$$A + w := \{x + w : x \in A\} \qquad \lambda A := \{\lambda x : x \in A\} \qquad A^R := \{Rx : x \in A\}$$

sono aperti.
Si ripeta l'esercizio sostituendo all'aggettivo aperto gli aggettivi chiuso, convesso, compatto, se possibile.

Esercizio 10. *Siano* A_1 *e* A_2 *due sottoinsiemi aperti di* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$*, si mostri che gli insiemi* $A_1 \cap A_2$ *e* $A_1 \cup A_2$ *sono aperti.*
Si concluda l'esercizio provando quali tra gli aggettivi chiuso, convesso e compatto possono sostituire l'aggettivo aperto nell'affermazione della prima parte del quesito.

Esercizio 11. *È vero che se* $K \subseteq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *è compatto, allora ogni sottoinsieme* $E \subseteq K$ *è compatto? Si argomenti esaustivamente ogni affermazione.*

Esercizio 12. *Si provi che* $E = \{p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *è chiuso e compatto.*

Esercizio 13. *Si provi che* $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \le 1\}$ *è chiuso.*

SVOLGIMENTI

Esercizio 1. *Sia* $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita come segue*

$$s_M(x, y) := x \cdot [My] \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

dove $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ *è una matrice simmetrica e definita positiva. Si provi che*

$$\|x\|_s := \sqrt{s(x,x)} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

è una norma sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$*. Tale norma si dice indotta dal prodotto scalare* s*.*

Discussione. Iniziamo provando che l'appplicazione s_M è un prodotto scalare, da questo seguirà "automaticamente" che $\|\cdot\|_s$ è una norma. Mostriamo che s_M è un'applicazione bilineare, infatti vale

$$s_M(\alpha x + \beta w, y) = (\alpha x + \beta w) \cdot My = \alpha x \cdot My + \beta w \cdot My = \alpha s_M(x, y) + \beta s_M(w, y)$$
$$s_M(x, \alpha y + \beta z) = x \cdot M(\alpha y + \beta z) = \alpha x \cdot My + \beta x \cdot Mz = \alpha s_M(x, y) + \beta s_M(x, z)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x, y, w, z \in \mathbb{R}^n$. Nei precedenti calcoli abbiamo utilizzato esclusivamente la commutatività della moltiplicazione per uno scalare e la bilinearità del prodotto scalare euclideo.
Relativamente alla simmetria abbiamo che

$$s_M(x, y) := x \cdot My = M^t x \cdot y = y \cdot M^t x = s_{M^t}(y, x)$$

quindi l'applicazione è simmetrica se e solo se $M = M^T$, cioè se la matrice è simmetrica.
Per provare che la funzione s_M è positiva dobbiamo provare che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vettore non nullo, vale

$$s_M(x, x) = x \cdot Mx > 0$$

poiché sappiamo che una matrice simmetrica definita positiva possiede autovalori reali e positivi, detto $\lambda > 0$ il più piccolo autovalore abbiamo che

$$s_M(x,x) = x \cdot Mx \geq x \cdot \lambda x = \lambda ||x||^2 > 0$$

Concludiamo ricordando che un prodotto scalare induce sempre una norma come provato neglle note del corso, questo termina l'esercizio. ■

ESERCIZIO 2. *Posto*

$$||x||_1 := |x_1| + |x_2| \qquad ||x||_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

per $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$*, si provi che entrambe le funzioni* $||\cdot||_1$ *e* $||\cdot||_\infty$ *sono delle norme su* $\mathbb{R}^2$*.*

DISCUSSIONE. Verifichiamo che $||\cdot||_1$ soddisfa i tre assiomi di norma, infatti vale

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2| \geq 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^2$$

inoltre

$$0 = ||x||_1 = |x_1| + |x_2| \geq |x_1| \geq 0 \qquad \text{da cui} \qquad x_1 = 0$$
$$0 = ||x||_1 = |x_1| + |x_2| \geq |x_2| \geq 0 \qquad \text{da cui} \qquad x_2 = 0$$

per cui abbiamo che l'unico vettore avente norma nulla è il vettore $x = 0$.
Notiamo anche che

$$||\lambda x||_1 = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| = |\lambda||x_1| + |\lambda||x_2| = |\lambda|\,[|x_1| + |x_2|] = |\lambda|||x||_1 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^2$$

e infine che possiamo scrivere

$$||x+y||_1 = |x_1+y_1| + |x_2+y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| = ||x||_1 + ||y||_1$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$. I ragionamenti per provare che $||\cdot||_\infty$ sono analoghi. ■

ESERCIZIO 3. *Si provi che la norma*

$$||x|| := \left[|x_1|^2 + |x_2|^2\right]^{1/2} = \sqrt{x \cdot x}$$

è invariante per rotazioni del piano $\mathbb{R}^2$*.*

DISCUSSIONE. È noto (dai corsi di geometria?) che le rotazioni sono delle isometrie euclidee, quindi non c'è molto da dimostrare... proviamo a verificare l'affermazione svolgendo il calcolo per punti del piano e ricordando che una rotazione (di angolo θ in senso antiorario) si rappresenta con una matrice R_θ avente la seguente espressione

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \text{con } \theta \in [0, 2\pi)$$

A questo punto possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} ||R_\theta x||^2 &= \left[|\cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2|^2 + |\sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2|^2\right] \\ &= \left[\cos^2(\theta)x_1^2 + \sin^2(\theta)x_2^2 - 2\sin(\theta)\cos(\theta)x_1x_2 + \sin^2(\theta)x_1^2 + \cos^2(\theta)x_2^2 - 2\sin(\theta)\cos(\theta)x_1x_2\right] \\ &= x_1^2 + x_2^2 = ||x||^2 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

il che mostra che a rotazione non influisce sulle distanze. ■

ESERCIZIO 4. *Si provi che non esiste un prodotto scalare su* $\mathbb{R}^2$ *che induca la norma* $||\cdot||_1$*.*

DISCUSSIONE. Se la norma $||\cdot||_1$ fosse indotta da un prodotto scalare la norma al quadrato dovrebbe verificare la seguente identità, detta identità del parallelogrammo

$$||x+y||_1^2 + ||x-y||_1^2 = 2\left[||x||_1^2 + ||y||_1^2\right] \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^2$$

Scegliendo $x = e_1 = (1,0)$ e $y = e_2 = (0,1)$ è possibile verificare che la precedente relazione non è soddisfatta, visto che

$$8 = \|e_1 + e_2\|_1^2 + \|e_1 - e_2\|_1^2 \neq 2\left[\|e_1\|_1^2 + \|e_2\|_1^2\right] = 4$$

Il fatto che l'identità del parallelogrammo fallisce implica che la norma non discende da un prodotto scalare.

■

ESERCIZIO 5. *Si mostri che i seguenti sottoinsiemi del piano sono aperti:*

$$\mathbb{R}^2 \qquad B(0,1) = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\} \qquad \{x_2 > 0\}$$

DISCUSSIONE. Per verificare la definizione di aperto in per uno specifico insieme A dobbiamo, fissato un punto p qualsiasi del nostro insieme, mostrare che esiste un raggio $r = r(p) > 0$, eventualmente dipendente dal punto p, tale che $B(p,r) \subseteq A$.
Nel primo caso $A = \mathbb{R}^2$, quindi la scelta $r = 1$ ci permette di concludere in ogni caso, questo perché è sempre vero che $B(p,1) \subseteq \mathbb{R}^2$.
Quando $A = B(0,1)$, possiamo notare che, siccome p appartiene all'aperto A, vale che $\|p\| = \delta \in [0,1)$, allora proviamo con $r = r(p) = (1-\delta)/2$. Infatti, dato $q \in B(p,r)$ possiamo scrivere che

$$\|q\| = \|q - p\| + \|p\| \leq \frac{1}{2}(1-\delta) + \delta = \frac{1+\delta}{2} < 1$$

per cui abbiamo provato che $q \in A$, cioè che $B(p,r) \subseteq B(0,1)$.
Nel terzo caso abbiamo che $A = \{x_2 > 0\}$, se consideriamo $p \in A$ allora sappiamo che $p_2 = \delta > 0$, scegliendo $r = r(p) = \delta/7$ otteniamo che, preso $q \in B(p,r)$ qualsiasi, segue che

$$q_2 = q_2 \pm p_2 \geq -|q_2 - p_2| + p_2 \geq -r + \delta \geq \frac{6}{7}\delta > 0$$

quindi anche il semipiano $\{x_2 > 0\}$ è un aperto del piano. ■

ESERCIZIO 6. *Seguendo le definizioni introdotte a lezione, si verifichi che valgono le seguenti affermazioni*

$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ *è aperto e convesso per ogni* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *è chiuso e compatto per ogni* $-\infty < a < b < +\infty$

DISCUSSIONE. procediamo con ordine dimostrando le affermazioni proposte.
(a,b) è aperto: sia $p \in (a,b)$ e poniamo $\delta := \min\{|a-p|, |b-p|\}$, intuitivamente δ è la distanza del punto p dal più vicino dei due estremi dell'intervallo (si noti che se $a = -\infty$ e $b = +\infty$ allora è sufficiente scegliere $\delta > 0$ qualsiasi). Per mostrare che (a,b) è aperto è necessario e sufficiente mostrare che esiste $r > 0$ tale che $B(p,r) = (p-r, p+r) \subseteq (a,b)$, quindi scegliamo $r = \delta/2$ e mostriamo chel'inclusione precedente è vera, infatti vale che $a = (a-p) + p \leq -\delta + p < p - r < p + r < p + \delta \leq p + (b-p) = b$, quindi (a,b) è aperto.
(a,b) è convesso: sia $p = tx + (1-t)y$, con $a < x < y < b$ e $t \in [0,1]$, allora vale che $p = tx + (1-t)y > ta + (1-t)a = a$ e anche $p = tx+(1-t)y < tb+(1-t)b = b$ visto che $t \in [0,1]$, quindi $(a,b$ è convesso (si noti che la stessa dimostrazione prova che qualunque intervallo è convesso).
$[a,b]$ è chiuso: poiché un insieme è chiuso se il suo complementare è aperto dobbiamo ragionare sul complemenatare dell'intervallo, poiché $[a,b]^c = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ il complementare dell'intervallo contenente gli estremi è l'unione di due semirette aperte. La prima dimostrazione fatta mostra che le due semirette sono un aperto, quindi $[a,b]$ è chiuso.
$[a,b]$ è compatto: provare che un insieme è compatto significa provare che da ogni successione contenuta in esso è possibile estrarre una sottosuccessioe convergente ad un putno dell'insieme. In generale una dimostrazione di questo tipo è molto impegnativa, infatti che gli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ sono compatti segue dal teorema di Bolzano & Weierstrass, studiato ad Analisi Matematica I... ■

ESERCIZIO 7. *Si provi che i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^n$ *sono aperti*

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0\right\} \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\right\} \qquad C = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 > 0\right\}$$

Poi si dica quali sono i rispettivi complementari chiusi e si determini se sono insiemi convessi o meno.

Discussione. Iniziamo osservando che $H_j = \{x_j > 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $j = 1, \dots, n$. Dato $p \in H_j$ poniamo $r = |p_j|/2 > 0$ e mostriamo che $B(p, r) \subseteq \mathbb{R}^n$, infatti abbiamo che per ogni $x \in B(p, r)$ vale $x_j \geq p_j - r = p_j/2 > 0$, quindi $x \in H_j$, cioè $B(p, r) \subseteq H_j$ e quindi H_j è aperto.
A questo punto possiamo affermare che A è aperto: in quanto vale che $A = H_1 \cap H_2$ e l'intersezione di due aperti è un aperto. Poiché $A = \{x = (x_1, x_2) : x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0\}$ allora segue che A^c è un insieme chiuso (complementare di un aperto) e vale $A^c = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq 0 \text{ o } x_2 \leq 0\} = \{x_1 \leq 0\} \cup \{x_2 \leq 0\}$, in questo caso A^c non è convesso perché $e_1 = (1, 0) \in A^c$, $e_2 = (0, 1) \in A^c$, però $te_1 + (1 - t)e_2 = (t, (1 - t)) \in A$ per ogni $t \in (0, 1)$.
Anche C è un aperto, infatti vale che $C = H_1 \cup H_1^*$, dove $H_1^- = \{x_1 < 0\}$ è un aperto ripetendo la dimostrazione di H_j, e l'unione di aperti è un insieme aperto. L'insieme complementare chiuso $C^c = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0\}$ è un iperpiano (geometricamente parlando) ed è un insieme convesso, infatti se $p = (0, p_2, p_3) \in C^c$ e $q = (0, q_2, q_3) \in C^c$ otteniamo che $tp + (1 - t)q = (0, tp_2 + (1 - t)q_2, tp_3 + (1 - t)q_3) \in C^c$
L'insieme B è un aperto perché $B = B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$ e tutte le palle in spazi normati sono degli aperti: dimostriamo quest'ultima affermazione. Siano $x \in B(p, R)$ e $\delta = \|x - p\|_2 < R$, consideriamo la palla $B(x, r)$ con raggio $r = (R - \delta)/3 > 0$, e mostriamo che $B(x, r) \subseteq B(p, R)$. Consideriamo un punto $y \in B(p, r)$ e osserviamo che, dalla disuguaglianza triangolare, segue

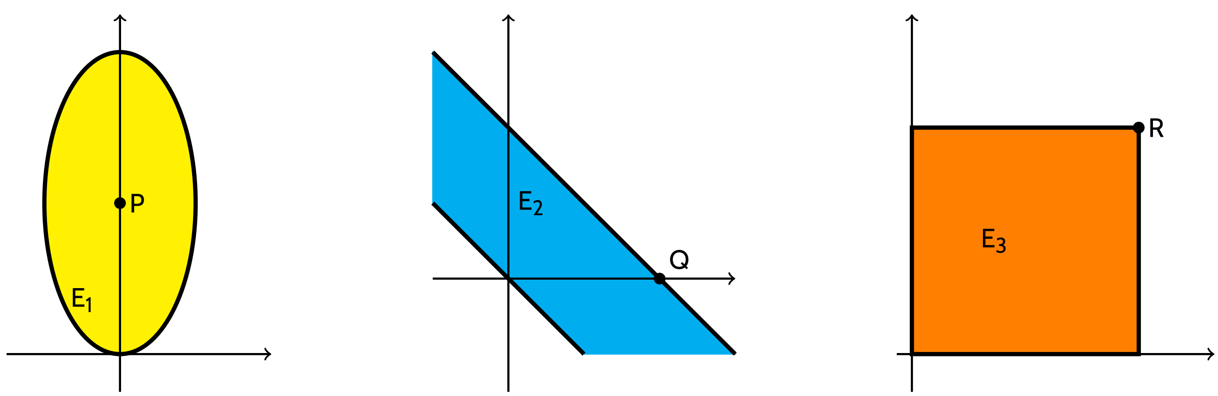
$$\|y - p\|_2 = \|y - x + x - p\|_2 \leq \|y - x\|_2 + \|x - p\|_2 < r + \delta = \frac{R + 2\delta}{3} < R$$

quindi $B(x, r) \subseteq B(p, R)$, come affermato. Ragionando come sopra $B^c = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \geq 1\}$ non è un insieme convesso, per esempio i punti $p_1 = (0, 0, 2)$ e $p_2 = (0, 0, -2)$ appartengono entrambi a B^c, però il segmento che li unisce contiene il punto $0 \in B$. ■

Esercizio 8. *Disegnare nel piano gli insiemi seguenti e riconoscere se sono aperti o chiusi e se sono limitati o meno.*

$$E_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 < 0\right\}$$
$$E_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 + x_2 \leq 4\right\}$$
$$E_3 = [0, 1]^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\right\}$$

Discussione. premettiamo alle dimostrazioni formali alcune schizzi degli insiemi che ci interessano, nella speranza che aiutino il ragionamento astratto



dove i punti indicati nei tre grafici hanno le seguenti coordinate $P = (0, 1) = e_2$, $Q = (4, 0)$ e $R = (1, 1)$.
E_1: iniziamo osservando che l'insieme è un'ellisse aperta nel piano, infatti vale che

$$E_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + (x_2 - 2)^2 < 4\right\} = \left\{(x_1 - 0)^2 + \left(\frac{x_2}{2} - 1\right)^2 < 1\right\} = \left\{\left\|\left(x_1, \frac{x_2}{2}\right) - (0, 1)\right\|_2 < 1\right\}$$

per verificare che l'insieme è aperto dobbiamo mostrare che, per ogni $p \in E_1$, esiste una palla $B(p, r) \subseteq E_1$, cioè che se r è sufficientemente piccolo le informazioni

$$\left\{\begin{array}{ll} p \in E_1 \quad \text{cioè} & \left\|\left(p_1, \frac{p_2}{2}\right) - e_2\right\|_2 = \delta < 1 \\ x \in B(p, r) \quad \text{cioè} & \|x - p\|_2 < r \end{array}\right\} \qquad \text{implicano} \qquad x \in E_1 \quad \text{cioè} \quad \left\|\left(x_1, \frac{x_2}{2}\right) - e_2\right\|_2 < 1$$

Dunque, grazie alla disuguaglianza triangolare, possiamo svolgere le seguenti maggiorazioni

$$\left\|\left(x_1, \frac{x_2}{2}\right) - e_2\right\|_2 = \left\|\left(x_1, \frac{x_2}{2}\right) \pm \left(p_1, \frac{p_2}{2}\right) - e_2\right\|_2 \leq \left\|\left(x_1, \frac{x_2}{2}\right) - \left(p_1, \frac{p_2}{2}\right)\right\|_2 + \left\|\left(p_1, \frac{p_2}{2}\right) - e_2\right\|_2$$
$$= \left\|\left(x_1, \frac{x_2}{2}\right) - \left(p_1, \frac{p_2}{2}\right)\right\|_2 + \delta \leq \left\|(x_1, x_2) - (p_1, p_2)\right\|_2 + \delta < r + \delta < 1$$

dove l'ultima disuguaglianza è vera a patto di scegliere $r < (1 - \delta)$. E_1 è anche limitato infatti possiamo scrivere che

$$\left\|\left(x_1, \frac{x_2}{2}\right) - e_2\right\|_2 < 1 \qquad \text{equivale a} \qquad x_1^2 + \left(\frac{x_2}{2} - 1\right)^2 < 1$$

da cui ricaviamo le seguenti stime

$$|x_1| < 1 \qquad \text{cioè } -1 < x < 1 \qquad \text{e} \qquad |x_2 - 2| < 2 \quad \text{da cui} \quad 0 < x_2 < 4$$

e questo significa che $E_1 \subseteq [-1, 1] \times [0, 4] \subseteq B(0, \sqrt{17})$.
E_2: questo insieme è un chiuso di $\mathbb{R}^2$, visto che $E_2^c = A_1 \cup A_2 = \{x_1 + x_2 < 0\} \cup \{x_1 + x_2 > 4\}$ e che i due insiemi sono entrambi aperti. Proviamo che $\{x_1 + x_2 < 0\}$ ragionando come nella prima parte dell'esercizio, quindi vogliamo mostrare che, per r sufficientemente piccolo, vale

$$\left\{ \begin{array}{l} p \in A_1 \quad \text{cioè} \quad p_1 + p_2 = \delta < 0 \\ x \in B(p, r) \quad \text{cioè} \quad \|x - p\|_2 < r \end{array} \right\} \qquad \text{implicano} \qquad x \in A_1 \quad \text{cioè} \quad x_1 + x_2 < 0$$

a questo punto possiamo scrivere che

$$x_1 + x_2 = p_1 + (x_1 - p_1) + p_2 + (x_2 - p_2) \leq p_1 + |x_1 - p_1| + p_2 + |x_2 - p_2|$$
$$\leq p_1 + \|x - p\|_2 + p_2 + \|x - p\|_2 < \delta + 2r < 0$$

scegliendo $r = |\delta|/4 > 0$, i calcoli fatti e l'arbitrarietà di x significano che $B(p, r) \subseteq A_1$, quindi A_1 è aperto visto che anche p è arbitrario. Ripetendo l'argomento per A_2 e ricordando che l'unione di aperti è sempre un aperto, otteniamo che E_2^c è aperto, cioè che E_2 è chiuso. E_2 non è limitato, perché i vettori del tipo $p_k = (k, -k) \in E_2$, con $k \in \mathbb{N}$, hanno norma non limitata, infatti vale $\|p_k\|_2 = \sqrt{2}k$.
E_3: nell'esercizio precedente abbiamo dimostrato che gli insiemi del tipo $\{x_j > c\}$ o $\{x_i < c\}$ sono aperti in $\mathbb{R}^n$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ e per ogni $j = 1, 2, ..., n$, dunque gli insiemi che hanno una rappresentazione come $\{x_j \leq c\}$ o $\{x_i \geq c\}$ sono chiusi, in quanto complementari di insiemi aperti. A questo punto possiamo notare che

$$E_3 = \{x_1 \leq 1\} \cap \{x_1 \geq 0\} \cap \{x_2 \leq 1\} \cap \{x_2 \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

quindi è chiuso, perché intersezione di chiusi. Inoltre possiamo osservare che

$$|x_1|, |x_2| \leq 1 \qquad \text{quindi} \qquad x_1^2 + x_2^2 \leq 2$$

per cui $E_3 \subseteq B(0, 2)$, quindi è un insieme limitato. ■

Esercizio 9. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *un insieme aperto,* $w \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *(con* $\lambda \neq 0$*) e* R *una rotazione nello spazio, allora si mostri che gli insiemi*

$$A + w := \{x + w : x \in A\} \qquad \lambda A := \{\lambda x : x \in A\} \qquad A^R := \{Rx : x \in A\}$$

sono aperti.
Si ripeta l'esercizio sostituendo all'aggettivo aperto gli aggettivi chiuso, convesso, compatto, se possibile.

Discussione. $A+w$: la prima affermazione può essere riletta dicendo che "la traslazione di un aperto è ancora un aperto". Sia $q \in (A + w)$ per definizione abbiamo $p = (q - w) \in A$ e, essendo A aperto, esiste $R > 0$ tale che $B(p, r) \subseteq A$, traslando entrambi gli insiemi ricaviamo che $(B(p, r) + w) \subseteq (A + w)$, la tesi è raggiunta mostrando che $B(p, r) + w = B(q, r)$. Ricordiamo che $q = (p + w)$ e sia $x \in B(p, r)$ allora segue che $y = (x + w) \in (B(p, r) + w)$ e vale

$$\|y - q\|_2 = \|(x + w) - (p + w)\|_2 = \|x - p\|_2 < r$$

quindi $(B(p, r) + w) \subseteq B(q, r)$, viceversa se $y \in B(q, r)$, posto $x = y - w$ abbiamo che

$$\|x - p\|_2 = \|y - w - (q - w)\|_2 = \|y - q\|_2 < r$$

il che implica $B(q, r) \subseteq (B(p, r) + w)$. La traslazione è sempre una isometria dello spazio, in generale tutte le isometrie conservano l'essere aperto di un insieme.

A^R: la dimostrazione appena conclusa si può ripetere per le rotazioni, che sono delle isometrie, infatti detti $y = Rx$ e $q = Rp$, abbiamo che

$$\|y - q\|_2 = \|Rx - Rp\|_2 = \|R(x - p)\|_2 = \|x - p\|_2 < r$$

questo perché le matrici che rappresentano le rotazioni godono della seguente proprietà

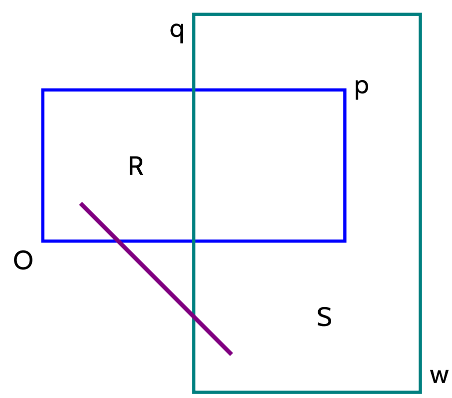
$$\|Rx\|_2^2 = Rx \cdot Rx = (R^t)Rx \cdot x = (R^{-1})Rx \cdot x = x \cdot x = \|x\|_2^2 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^3$$

Quindi questa affermazione può essere riformulata dicendo che "la rotazione di un aperto è ancora un aperto" e la chiave della dimostrazione, parlando in termini approssimativi, è che la rotazione di una palla è una palla.

■

Esercizio 10. *Siano* A_1 *e* A_2 *due sottoinsiemi aperti di* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$*, si mostri che gli insiemi* $A_1 \cap A_2$ *e* $A_1 \cup A_2$ *sono aperti.*
Si concluda l'esercizio provando quali tra gli aggettivi chiuso, convesso e compatto possono sostituire l'aggettivo aperto nell'affermazione della prima parte del quesito.

Discussione. Per ipotesi A_1 e A_2 sono aperti, interessiamoci dell'insieme $A = A_1 \cup A_2$. Per mostrare che A è aperto è necessario (e sufficiente) provare che per ogni punto $p \in A$ esiste una palla, eventualmente molto piccola, $B(p, r) = \{x : \|x - p\|_2 < r\}$ contenuta interamente in A. Sia $p \in A$, allora $p \in A_i$ per almeno un indice (l'unione di due insiemi contiene i punti che appartengono almeno ad uno dei due insiemi), siccome A_i è aperto allora esiste $r_0 > 0$ tale che $B(p, r_0) \subseteq A_i \subseteq A$, quindi $A = A_1 \cup A_2$ è aperto.
Adesso concentriamoci su $B = A_1 \cup A_2$. Poiché tutti i punti dell'intersezione sono punti che appartengono ad entrambi gli insiemi A_i che sono aperti, possiamo dire che esistono due raggi $r_1, r_2 > 0$ tali che $B(p, r_i) \subseteq A_i$ per $i = 1, 2$. È facile verificare che se $r_1 \leq r_2$ allora $B(p, r_1) \subseteq B(p, r_2)$ e se $r_2 \leq r_1$ allora $B(p, r_2) \subseteq B(p, r_1)$, quindi la palla di raggio più piccolo è contenuta in entrambi gli aperti A_i e quindi nella loro intersezione, il che prova che B è aperto.
Se A_1 e A_2 sono chiusi allora A_1^c e A_2^c sono aperti e siccome $(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c$ segue, dalla prima parte dell'esercizio, che $(A_1 \cup A_2)^c$ è aperto, cio che $A_1 \cup A_2$ è chiuso. Analogamente l'osservazione $(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$ permette di provare che l'intersezione di due chiusi è un chiuso.
Se A_1 e A_2 sono convessi non è possibile concludere nulla per la loro unione, infatti è sufficiente considerare i seguenti esempi: se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ l'unione dei due convessi non può produrre un insieme convesso, scegliendo un punto in un insieme e un altro punto nel secondo insieme il segmento che li congiunge non può essere contenuto nell'unione, altrimenti dovrebbero esistere punti comuni ai due convessi. In $\mathbb{R}^2$ è sufficiente considerare due rettangoli R, avente due vertici opposti nei punti $O(0, 0)$, $p(4, 2)$, e S (con vertici in $q(2, 3)$ e $w(5, -2)$). Dopo aver notato che i rettangoli sono degli insiemi convessi del piano si consideri il segmento di estremi $(1/2, 1/2)$ e $5/2, -3/2$: per esempio il suo punto medio non appartiene all'unione dei due rettangoli come suggerisce il seguente disegno



Al contrario l'intersezione di due insiemi convessi è ancora un insieme convesso, infatti presi due punti $p, q \in A_1 \cap A_2$ osserviamo che $p, q \in A_1$ e, siccome A_1 è convesso, abbiamo che $\overline{pq} \subseteq A_1$, ma è vero anche che $p, q \in A_2$ e, siccome A_2 è convesso, abbiamo che $\overline{pq} \subseteq A_1$, e questo significa che $\overline{pq} \subseteq A_1 \cap A_2$.
Se A_1 e A_2 sono compatti entrambe le affermazioni sono vere, infatti se $\{x_k\} \subseteq A_1 \cap A_2$ allora è vero che $\{x_k\} \subseteq A_1$ e, poiché A_1 è compatto, esiste $\{x_{k(j)}\} \subseteq \{x_k\}\}$ tale che $x_{k(j)} \longrightarrow p \in A_1$, però è anche vero che $\{x_k\} \subseteq A_2$, quindi $\{x_{k(j)} \subseteq A_2$ e $x_{k(j)} \longrightarrow p \in A_2$, visto che la sottosuccessione è convergente e la compattezza di A_2 ci permette di dire che il punto limite appartiene all'insieme. Se $\{x_k\} \subseteq A_1 \cup A_2$ deve esistere una sottosuccessione

$\{x_{k(j)}\} \subseteq A_1$ o $\{x_{k(j)}\} \subseteq A_2$ (altrimenti la successione avrebbe solo un numero finito di elementi), la tesi segue dalla compattezza di A_1 o A_2. ■

ESERCIZIO 11. *È vero che se* $K \subseteq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *è compatto, allora* $E \subseteq K$ *è compatto? Si argomenti esaustivamente ogni affermazione.*

DISCUSSIONE. È noto (dalle lezioni) che nello spazio di Banach $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ gli insiemi compatti sono gli insiemi chiusi e limitati, quindi (per ipotesi) K è chiuso e limitato. Poiché K è limitato abbiamo che $K \subseteq B(O,R)$, per un opportuno $R > 0$, quindi $E \subseteq B(O,R)$, cioè E è limitato. Dunque la compattezza di E dipende esclusivamente dal fatto che E sia chiuso o meno, naturalmente non tutti gli insiemi contenuti in K sono chiusi, quindi non è detto che E sia compatto! Per fissare le idee facciamo un esempio ”concreto”: prendiamo in esame l'insieme $K = [-2,2]^3 = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^n : -2 \leq x_1,x_2,x_3 \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R}^n : -2 \leq x_1 \leq 2; -2 \leq x_2 \leq 2; -2 \leq x_3 \leq 2\}$ che è un cubo nello spazio tridimensionale ed è compatto per quanto detto precedentemente, $B(O,1)$ pur essendo contenuta in K non è compatta perché è un aperto di $\mathbb{R}^3$. ■

ESERCIZIO 12. *Si provi che* $E = \{p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *è chiuso e compatto.*

DISCUSSIONE. Cominciamo osservando che E è limitato, in quanto posto $r = \|p\|_2$ vale che $p \in B(O;2r)$, dunque se E è chiuso risulta automaticamente anche compatto. Per mostrare che E è chiuso dobbiamo provare che il suo complementare $E^c = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x-p\|_2 > 0\}$ è aperto. Sia $x \in E^c$ e poniamo $\rho = \|x-p\|_2 > 0$, allora mostriamo che la palla $B(x,r)$, con $r = \rho/2$, è contenuta in E^c: infatti dato $y \in B(x,r)$ abbiamo che

$$\|y-p\|_2 = \|y-x+x-p\|_2 \geq \|x-p\|_2 - \|y-x\|_2 > \rho - r = \frac{1}{2}\rho > 0$$

visto che, per la disuguaglianza triangolare, vale

$$\|x-p\|_2 = \|x-y+y-p\|_2 \leq \|x-y\|_2 + \|y-p\|_2 \qquad \text{da cui segue} \qquad \|x-p\|_2 - \|x-y\|_2 \leq \|y-p\|_2$$

quindi E^c è aperto, per cui ogni insieme costituito da un solo punto dello spazio è chiuso. ■

ESERCIZIO 13. *Si provi che* $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ *è chiuso.*

DISCUSSIONE. L'insieme $E = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\right\}$ è, intuitivamente, la palla di raggio 1 unita alla sfera unitario dello spazio, ragioniamo come nell'esercizio precedente considerando $p \in E^c$, $r = (\|p\|_2 - 1)/4 > 0$ e mostriamo che $B(p,r) \subseteq E^c$. Infatti, per $y \in B(p,r)$ possiamo scrivere

$$\|y\|_2 = \|y-p+p\|_2 \geq \|p\|_2 - \|y-p\|_2 = \|p\|_2 - \frac{1}{4}(\|p\|_2 - 1) = \frac{3\|p\|_2 + 1}{4} > 1$$

il che conclude l'esercizio. ■
