Analisi Matematica II
Esercizi sulle funzioni di più variabili

• Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x\,y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Discutere continuità, derivabilità e differenziabilità di f nell'origine.

• Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x\,y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Discutere continuità, derivabilità e differenziabilità di f nell'origine.

• Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x\,y)}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Discutere continuità, derivabilità e differenziabilità di f nell'origine.

• Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2\,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Discutere continuità, derivabilità e differenziabilità di f nell'origine.

• Dimostrare che se $|f(x,y)| \leq x^2+y^2$, allora f è differenziabile nell'origine. Trovare un esempio di funzione che soddisfa tale ipotesi ma è discontinua in ogni punto diverso dall'origine.

• Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } y \geq 0, \\ y & \text{se } y < 0. \end{cases}$$
Discutere continuità, derivabilità e differenziabilità di f nell'origine. Esistono punti dell'asse x in cui la funzione è continua? E derivabile?

• Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{se } y \geq 0, \\ x & \text{se } y < 0. \end{cases}$$
Discutere continuità, derivabilità e differenziabilità di f nell'origine. Esistono punti dell'asse x in cui la funzione è continua? E derivabile?

- Sia
$$f(x,y)=\int_{-x^2}^{y^2}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t^{\frac{4}{3}}}\,dt\,.$$
Dopo aver mostrato che f è definita su $\mathbb{R}^2$, provare che è differenziabile e calcolare
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

- Sia
$$f(x,y)=\frac{[\cos(x+y)-\mathrm{e}^{x+y}]\operatorname{sen}(x-y)}{x^2-y^2}\,.$$
Determinare:
  a) il dominio di f;
  b) il più grande insieme in cui f è prolungabile per continuità;
  c) il prolungamento.

- Stabilire per quali $a\in\mathbb{R}^+$ la funzione
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-xy)}{|x|^a} & \text{se } x\neq 0,\\ 0 & \text{se } x=0.\end{cases}$$
  a) è continua in $(0,y_0)$, $y_0\in\mathbb{R}$;
  b) è differenziabile in $(0,y_0)$, $y_0\in\mathbb{R}$.

- Sia
$$f(x,y)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+y^4}) & \text{se } x\neq 0,\\ 0 & \text{se } x=0.\end{cases}$$
Studiare la continuità e la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$ ($\exp(x)=\mathrm{e}^x$).

- Sia
$$f(x,y)=\begin{cases}y\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\log|x-y|}\right) & \text{se } x\neq y,\ |x-y|\neq 1,\\ 0 & \text{se } x=y,\ |x-y|=1.\end{cases}$$
Studiare la continuità e la differenziabilità di f nei punti (x_0,x_0), $x_0\in\mathbb{R}$, e in $(1,0)$.

- Studiare, per $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, la continuità della funzione
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(x\,|y|^{\frac{\alpha}{2}})}{\frac{1}{2}\,(x^2+y^2)} & \text{se } y\neq 0,\\ 0 & \text{se } y=0,\end{cases}$$
al variare del parametro reale α.

• Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{4}{3}}\, y}{x^2 + y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.

• Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} (y-x)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{y^2 - x^2}\right) & \text{se } x \neq \pm y, \\ 0 & \text{se } x = \pm y. \end{cases}$$

Studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$.

• Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)\,\mathrm{sen}[(x+y)^2]}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

• Siano

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\, x\,\mathrm{sen}(x^2 + y^4)}{(x^2 + y^4)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\, x^3\,\mathrm{sen}(x^2 + y^4)}{(x^2 + y^4)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità e la differenziabilità di f e g nell'origine.

• Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(xy)}{y} & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.

• Sia

$$F(x,y) = \int_x^{x-y} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\, dt\,.$$

Verificare che F è ben definita in $\mathbb{R}^2$, che F appartiene a $C^1(\mathbb{R}^2)$ e calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y) + y/2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

• Sia
$$f(x,y) = \frac{x^2 \operatorname{sen}(xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$
Calcolare, se esiste, il limite di $f(x,y)$ per (x,y) tendenti a $(0,0)$.

• Sia
$$f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{\operatorname{sen}(x-y)}\,.$$
Determinare l'insieme di definizione di f e stabilire se può essere prolungata per continuità sulla retta $x=y$.

• Sia
$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2\,y^{\frac{2}{3}}}\,.$$
Calcolare, se esistono, i limiti di $f(x,y)$ per (x,y) tendente a $(0,0)$ e a $(\sqrt{\pi},0)$.

• Sia
$$f(x,y) = \frac{x^2\,(1-\cos(xy))}{(x^2+y^2)\,\ln(x^2+y^2)}\,.$$
Determinare l'insieme di definizione di f e calcolare, se esiste, il limite di $f(x,y)$ per (x,y) tendente a $(0,0)$.

• Sia
$$f(x,y) = \frac{\operatorname{arc\,tg}(x^2-xy)}{x^2(x^2-y^2)}\,.$$
Determinare l'insieme di definizione di f e calcolare, se esistono, i limiti di $f(x,y)$ per (x,y) tendente a $(0,0)$ e a $(1,1)$.

• Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2y)}{x^2+y^2} & \text{se } y>0, \\ y\,\ln(1+|x|) & \text{se } y\le 0. \end{cases}$$
Studiare la continuità di f su $\mathbb{R}^2$.

• Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+|y|} & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$
Studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$.

• Sia
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x^2-y} & \text{se } 0<y<x^2,\\ 0 & \text{se } y\le 0 \text{ oppure } y\ge x^2.\end{cases}$$
Studiare la continuità di f nell'origine.

• Sia
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(y-\operatorname{sen}(x))}{\mathrm{e}^{y-\operatorname{sen}(x)}-1} & \text{se } y>\operatorname{sen}(x),\\ a & \text{se } y\le\operatorname{sen}(x).\end{cases}$$
È possibile determinare a in modo che f sia continua in $\mathbb{R}^2$?

• Sia
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\ne(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
Calcolare (se esistono) le derivate direzionali di f nell'origine.

• Sia
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\operatorname{sen}(xy)}{y(x^2+y^2)} & \text{se } y\ne 0,\\ 0 & \text{se } y=0.\end{cases}$$
La funzione f è continua nell'origine? Calcolare (se esistono) $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

• Sia
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(\mathrm{e}^x-1)\ln(1+|y|)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\ne(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
La funzione f è continua nell'origine? Calcolare (se esistono) $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

• Sia
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}(x))}{y-x^2} & \text{se } y<x^2,\\ 0 & \text{se } y\ge x^2.\end{cases}$$
Calcolare (se esistono) $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

• Stabilire se la funzione
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2y)}{x^2+y^2} & \text{se } y>0,\\ y\,\ln(1+|x|) & \text{se } y\le 0,\end{cases}$$
è differenziabile nell'origine.

• Sia
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-2x+1)\,y^2}{x^2-2x+\mathrm{e}^{y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(1,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(1,0).\end{cases}$$
Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di f nel punto $(1,0)$.

• Sia
$$f(x,y)=\begin{cases}x & \text{se } y<x^3,\\ y & \text{se } y\geq x^3.\end{cases}$$
Studiare la continuità e la derivabilità di f su $\mathbb{R}^2$.

• Sia
$$f(x,y)=\begin{cases}1-(x^2+y^2) & \text{se } x^2+y^2<1,\\ \operatorname{sen}^2(\pi(x^2+y^2)) & \text{se } x^2+y^2\geq 1.\end{cases}$$
Studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$ e la derivabilità di f in $(0,1)$ e $(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$.

• Sia
$$f(x,y)=\begin{cases}x & \text{se } |x|+|y|\leq 1,\\ x\,\dfrac{\mathrm{e}^{(|x|+|y|-1)}-1}{|x|+|y|-1} & \text{se } |x|+|y|>1.\end{cases}$$
Studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$ e la derivabilità e differenziabilità in $(0,1)$.

• Sia
$$f(x,y)=\begin{cases}\operatorname{sen}(2\pi(x^2+y^2)) & \text{se } x^2<y<x(1-x),\\ 0 & \text{se } y\leq x^2 \text{ oppure } y\geq x(1-x).\end{cases}$$
Studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$.

• Siano α, β e γ tre numeri reali strettamente positivi. Dimostrare, usando la definizione di limite, che la funzione
$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{|x|^\alpha\,|y|^\beta\,|z|^\gamma}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0),\end{cases}$$
è continua nell'origine se $\alpha+\beta+\gamma>2$, ed è differenziabile se $\alpha+\beta+\gamma>3$.