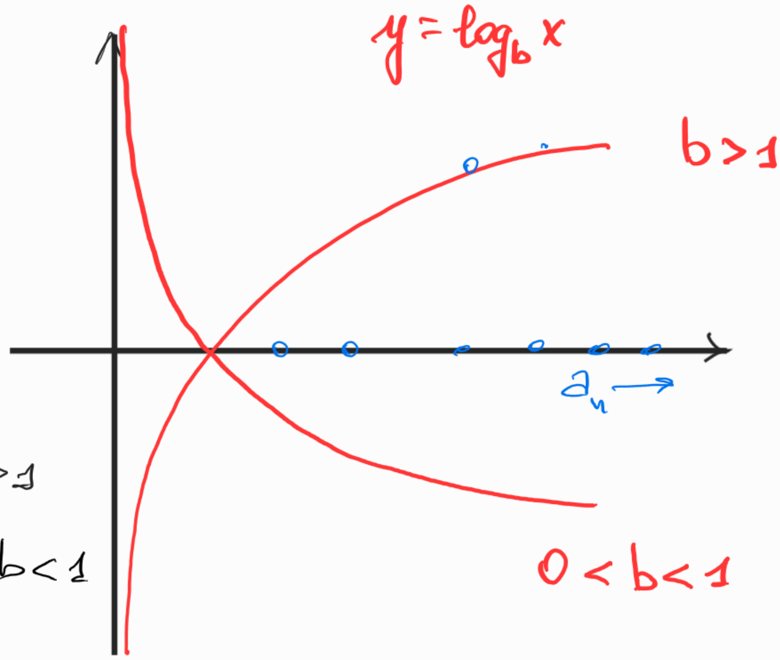
Limiti di logaritmi.

Sia $\{a_n\}$ una successione di reali positivi



1) se $a_n \to +\infty \implies$

$$\log_b a_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } b>1 \\ -\infty & \text{se } 0<b<1 \end{cases}$$

2) se $a_n \to 0 \implies$

$$\log_b a_n \longrightarrow \begin{cases} -\infty & \text{se } b>1 \\ +\infty & \text{se } 0<b<1 \end{cases}$$

3) se $a_n \to a \in (0,+\infty) \implies \log_b a_n \longrightarrow \log_b a$

Teorema della permanenza del segno:

Se $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in (0,+\infty] \implies a_n > 0$ def^{te}.

Il teorema si può generalizzare.

Teorema

Sia $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R}^*$.

1) se $m < \ell$, allora $a_n > m$ definitivamente.

Esempio se $a_n \to 4$, $a_n > 3$ def^{te}.

2) se $M > \ell$, allora $a_n < M$ definitivamente.

Questo implica, per esempio:

$$\left.\begin{array}{l} \text{se } a_n \le 10 \text{ def}^{te} \\ \ell = \lim_{n\to+\infty} a_n \end{array}\right| \Longrightarrow \ell \le 10$$

Ricordo che una successione $\{a_n\}$ è limitata se

$\exists\, M \ge 0$ t.c. $|a_n| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

TEOREMA Sia $\{a_n\}$ una successione **convergente**

(cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$).

Allora $\{a_n\}$ è limitata.

Dim. Proviamo prima che $\{a_n\}$ è limitata definitivamente.

Fissiamo ε a nostro piacimento (per es. $\varepsilon = 1$)

Poiché

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell. \Rightarrow$ def^{te} $|a_n - \ell| < 1$.

$\Rightarrow \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n - \ell| < 1 \quad \forall n \ge \bar{n}$.

$$\Longrightarrow \quad |a_n| = |(a_n - \ell) + \ell| \le \underbrace{|a_n - \ell| + |\ell|}_{\text{(dis. triangolare)}} \le 1 + |\ell| \quad \forall n \ge \bar{n}$$

$1 \quad \forall n \ge \bar{n}$

Adesso devo provare che una simile disuguaglianza vale anche per $n=0, n=1, \dots \; n = \bar{n}-1$

definisco $M = \max\{1+|\ell|, |a_0|, |a_1|, \dots |a_{\bar{n}-1}|\}$

Si ha $|a_n| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Infatti:

se $n \ge \bar{n} \qquad |a_n| \le 1 + |\ell| \le M$

$|a_0| \le M$

$|a_1| \le M$

$\vdots$

$|a_{\bar{n}-1}| \le M$. $\qquad \square$

OSS abbiamo provato che una succ^{ne} def^{te} limitata è limitata.

OSS E' falso il viceversa del teorema.

$$\{a_n\} \text{ limitata } \not\Rightarrow \{a_n\} \text{ convergente}$$

Per es. $a_n = (-1)^n$ è limitata $\quad (|a_n| = 1)$
ma non è convergente (non ha limite).

TEOREMA (algebra dei limiti).

Sia $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \to m \in \mathbb{R}$. Allora.

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \ell + m$.

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \ell + \beta m$ linearità del limite.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = \ell m$.

4) se $m \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{m}$

5) se $m \neq 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\ell}{m}$

dim 5)
$$\frac{a_n}{b_n} = \underset{\substack{\downarrow \\ \ell}}{a_n} \cdot \underset{\substack{\downarrow (4) \\ 1/m}}{\left(\frac{1}{b_n}\right)} \xrightarrow{(3)} \ell \cdot \frac{1}{m} = \frac{\ell}{m}$$

DIM 1). Scriviamo le ipotesi.

H1) $\forall \varepsilon_1 > 0 \quad |a_n - \ell| < \varepsilon_1$ def^{te}.

H2) $\forall \varepsilon_2 > 0 \quad |b_n - m| < \varepsilon_2$ def^{te}.

Tesi) $\forall \varepsilon > 0 \quad |(a_n + b_n) - (\ell + m)| < \varepsilon$ def^{te}.

$$|(a_n+b_n)-(\ell+m)| = |(a_n-\ell)+(b_n-m)| \leq \text{[dis. triangolare]}$$

$$\leq \underbrace{|a_n-\ell|}_{\varepsilon/2 \text{ def}^{te}} + \underbrace{|b_n-m|}_{\varepsilon/2 \text{ def}^{te}} \overset{\text{def}^{te}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Scelgo ε_1 in H1) $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$

Scelgo $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ in H2)

dim 2) Abbiamo già provato che $\alpha a_n \to \alpha \ell$, $\beta b_n \to \beta m$ quindi basta applicare la parte 1).

dim 3) devo provare che $a_n b_n \to \ell m$.

Devo provare che $|a_n b_n - \ell m| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$0 \leq |a_n b_n - \ell m| = |(a_n b_n - a_n m) + (a_n m - \ell m)| \leq \text{[dis. triang]}$$

$$\leq |a_n(b_n - m)| + |m(a_n - \ell)| =$$

$$= \underbrace{|a_n|}_{\leq M} \underbrace{|b_n - m|}_{\to 0} + |m| \underbrace{|a_n - \ell|}_{\to 0} \xrightarrow{(1)} 0 + 0 = 0$$

in quanto una succ^{ne} conv. è limitata.

Teorema dei carabinieri $\Rightarrow |a_n b_n - \ell m| \to 0$

dim 4) $\quad m \neq 0$ (supp. per ora $m > 0$)

$$0 \leq \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{m} \right| = \left| \frac{m - b_n}{b_n m} \right| = \frac{|b_n - m|}{|b_n||m|} \underset{\text{def}^{te}}{=} \frac{|b_n - m|}{b_n \, m} \leq$$

oss $b_n \to m > 0$

$\Rightarrow b_n > \frac{m}{2} > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{b_n} < \frac{2}{m}$

$$\underset{\text{def}^{te}}{\leq} \frac{2}{m^2} \underbrace{|b_n - m|}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

Se $m < 0$, considero $-\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\underbrace{(-b_n)}_{\to -m > 0}} \longrightarrow \frac{1}{-m} = -\frac{1}{m}$

$$\Rightarrow \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{m}.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \Bigg(2 - \underbrace{\frac{7}{\underbrace{\underbrace{n^{-\pi}}_{\to 0} + 1}_{\to 1}}}_{\to 7} \Bigg) = 2 - 7 = -5$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\overbrace{5 - \underbrace{3^{-n}}_{\to 0}}^{\to 5}}{\underbrace{-1 + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0}}_{\to -1}} = -5$$

Il prossimo obiettivo è estendere l'aritmetica dei limiti a casi che non rientrano nel Teorema precedente. per es. se una delle succ^{ni} tende a $\pm\infty$.

Per es. se $\left. \begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ b_n \to -2 \end{array} \right| \Rightarrow a_n + b_n \longrightarrow +\infty$

PROP. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = m \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Allora
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = +\infty$$

Dim
$$a_n + b_n \underset{def^{te}}{>} a_n + K \to +\infty \quad \text{Quindi } a_n+b_n \to +\infty.$$

OSS $\exists K\in\mathbb{R}$ t.c. $b_n > K$ def^{te} $\quad b_n \to m$

se $m\in\mathbb{R} \Rightarrow b_n > m-1$ def^{te}

$m = +\infty \Rightarrow b_n > 1$ def^{te}

OSS Se $a_n \to +\infty$, e $K\in\mathbb{R}$, $a_n + K \to +\infty$

$a_n + K > M \iff a_n > M - K$ vera def^{te}. $\square$

L'enunciato precedente si scrive sinteticamente

"$+\infty + m = +\infty$" $\forall m \in \mathbb{R}$

"$+\infty + \infty = +\infty$"

OSS In realtà abbiamo provato di più: non occorre che b_n ammetta limite. Basta che sia limitata inferiormente

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\underbrace{n^4}_{\to+\infty} + \underbrace{(-1)^n}_{\text{limitata inf.}}\Big) = +\infty$$

PROP $a_n \to +\infty$, b_n limitata inferiormente $\Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$

Analogamente

PROP $a_n \to -\infty$, $b_n \to m \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ (ma basta b_n limitata superiormente) $\Rightarrow a_n + b_n \to -\infty$

" $-\infty + m = -\infty \quad \forall m \in \mathbb{R}$ "

" $-\infty - \infty = -\infty$ "

OSS se $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, in generale non si può dire nulla su $a_n + b_n$.

1) $\left.\begin{array}{l} a_n = 2n \to +\infty \\ b_n = -n \to -\infty \end{array}\right| \Rightarrow a_n + b_n = 2n - n = n \to +\infty$

2) $\left.\begin{array}{l} a_n = n \to +\infty \\ b_n = -2n \to -\infty \end{array}\right| \Rightarrow a_n + b_n = n - 2n = -n \to -\infty$

3) $\left.\begin{array}{l} a_n = n+5 \to +\infty \\ b_n = -n \to -\infty \end{array}\right| \Rightarrow a_n + b_n = n+5-n = 5 \to 5$

4) $\left.\begin{array}{l} a_n = n + (-1)^n \to +\infty \\ b_n = -n \to -\infty \end{array}\right| \Rightarrow a_n + b_n = (-1)^n$ non ha limite.

Vediamo i prodotti

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ b_n \to m \in \mathbb{R} \end{array}\right| \Longrightarrow a_n b_n \to \begin{cases} +\infty & \text{se } m > 0 \\ -\infty & \text{se } m < 0 \end{cases}}$$

Dim $\quad a_n \to +\infty$
$\quad b_n \to m > 0$

$a_n b_n \overset{\text{def}^{te}}{>} a_n \dfrac{m}{2} \longrightarrow +\infty$

oss a_n def^{te} > 0

$b_n > \dfrac{m}{2} > 0$ def^{te}

OSS se $a_n \to +\infty$ e $c > 0$ costante

$\Rightarrow c a_n \to +\infty$

OSS In realtà abbiamo provato di più:

$$\boxed{\text{se } \left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ b_n \geq c > 0 \end{array}\right| \Rightarrow a_n b_n \longrightarrow +\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to -\infty \\ b_n \to m \neq 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \quad a_n b_n \longrightarrow \begin{cases} -\infty & \text{se } m > 0 \\ +\infty & \text{se } m < 0. \end{cases}$$

In modo sintetico

$$\text{"} +\infty \cdot m = \begin{cases} +\infty & \text{se } m > 0 \\ -\infty & \text{se } m < 0 \end{cases} \text{"}$$

$$\text{"} -\infty \cdot m = \begin{cases} -\infty & \text{se } m > 0 \\ +\infty & \text{se } m < 0 \end{cases} \text{"}$$

$$\text{"}(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\text{"}$$

$$\text{"}(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty\text{"}$$

$$\text{"}(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty\text{"}$$

Resta fuori il caso "$\infty \cdot 0$" in cui <u>in generale</u> può succedere di tutto

$$\left.\begin{array}{l} a_n = n^2 \to +\infty \\ b_n = \frac{1}{n} \to 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \quad a_n b_n = n^2 \frac{1}{n} = n \to +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = n \to +\infty \\ b_n = \frac{1}{n^2} \to 0 \end{array}\right| \Rightarrow \quad a_n b_n = n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$$

Estensione dell'aritmetica dei limiti per rapporti di successioni.

PROP Se $|b_n| \to +\infty$ allora $\dfrac{1}{b_n} \to 0$

Per esempio $\quad \dfrac{1}{n^2+4} \to 0 \qquad \dfrac{1}{4-n^2} \to 0$

Dim. $0 \leq \left|\dfrac{1}{b_n}\right| = \dfrac{1}{|b_n|} \overset{?}{<} \varepsilon \iff |b_n| \overset{?}{>} \dfrac{1}{\varepsilon}$ vero def$^{\text{te}}$ perché $|b_n| \to +\infty$

$\square$

$$a_n \to \ell, \quad b_n \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} = \underbrace{a_n}_{\to \ell} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{b_n}\right)}_{\to 0} \to 0 \quad \forall \ell \in \mathbb{R}$$

$$\text{“} \frac{\ell}{\pm\infty} = 0 \qquad \forall \ell \in \mathbb{R} \text{”}$$

In realtà basta che a_n sia limitata.

Esempio
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{\sin(n^2) - 3\cos^3 n}^{\text{limitata}}}{\underbrace{4 - n^5}_{\to -\infty}} = 0$$

$$|\sin(n^2) - 3\cos^3 n| \le \underbrace{|\sin(n^2)|}_{\le 1} + \underbrace{3|\cos^3 n|}_{\le 3} \le 4$$

Per trattare il caso di una frazione in cui il denominatore va a zero ho bisogno di capire se va a zero "da numeri positivi" o "da numeri negativi"

DEF Sia $\{a_n\}$ una successione, e sia $\ell \in \mathbb{R}$.
Diremo che $\{a_n\}$ tende a ℓ "per eccesso", in simboli

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell^+ \quad , \text{ oppure } \quad a_n \to \ell^+$$

se $\quad a_n \to \ell$

e $\quad a_n > \ell$ def^{te}

o, equivalentemente, se $\forall \varepsilon > 0 \quad \ell < a_n < \ell + \varepsilon$ def^{te}.

Per esempio $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, ma possiamo essere più precisi e dire $\frac{1}{n} \to 0^+$

$a_n \to \ell$ per difetto, o in simboli

$a_n \to \ell^-$ $\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell^-$ $\quad$ se

$a_n \to \ell$ e inoltre $a_n < \ell$ def^{te},

ossia se

$\forall \varepsilon > 0$ si ha def^{te} $\ell - \varepsilon < a_n < \ell$

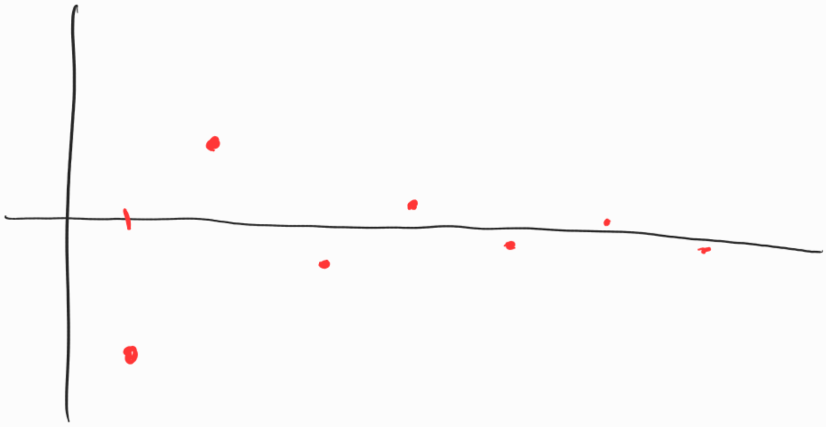
<u>Esempio</u> $\quad -\dfrac{1}{n} \to 0^-$

$$\frac{1}{5-n^3} \to 0^-$$

$\dfrac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$ ma non si ha né $\dfrac{(-1)^n}{n} \to 0^+$

né $\dfrac{(-1)^n}{n} \to 0^-$

$$-1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$$

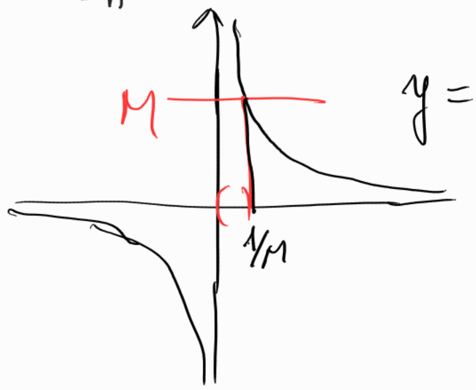


$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{PROP.}} \text{ se } 1)\ b_n \to 0^+, \text{ allora } \dfrac{1}{b_n} \to +\infty \\ \qquad\qquad b_n \to 0^- \quad \text{''} \quad \dfrac{1}{b_n} \to -\infty \end{array}}$

DIM. 1) sappiamo che $\forall \varepsilon > 0$ def^{te} $0 < b_n < \varepsilon$

Fix $M > 0$, voglio provare che definitivamente

$$\frac{1}{b_n} > M \iff 0 < b_n < \frac{1}{M} =: \varepsilon \quad \text{vera def}^{te}.$$



$y = 1/x$

$$\frac{1}{x} > M > 0 \iff 0 < x < \frac{1}{M}$$

OSS se $b_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \frac{1}{b_n} = \frac{n}{(-1)^n} = (-1)^n n$ non ha limite!

PROP

se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0^+$ $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell \in (0, +\infty] \\ -\infty & \text{se } \ell \in [-\infty, 0) \end{cases}$

se $\lim a_n = \ell$, $\lim b_n = 0^-$ $\Longrightarrow$ $\lim \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \ell \in (0, +\infty] \\ +\infty & \text{se } \ell \in [-\infty, 0) \end{cases}$

$$\text{"}\frac{\ell}{0^+}\text{"} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell > 0 \\ -\infty & \text{se } \ell < 0 \end{cases} \qquad \frac{\pm\infty}{0^+} = \pm\infty$$

Restano scoperte le cosiddette forme indeterminate

$$\text{"}+\infty - \infty\text{"}, \quad \text{"}\infty \cdot 0\text{"}, \quad \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \quad \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

per le quali non c'è una tabella di risultati, ma bisogna vedere caso per caso.

Esercizio

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{(n-5)^2}_{\to +\infty} \underbrace{(1-n)}_{\to -\infty} = -\infty$$

Esercizio

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{1}{x^n}\right) = \begin{cases} +\infty & x>1 \\ 0 & x=1 \\ -\infty & 0<x<1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} x>0 \\ \text{parametro} \end{array}\right)$$

$$\lim x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x>1 \\ 1 & x=1 \\ 0^+ & 0<x<1 \end{cases}$$

(oss. se $x=1$, $x^n \equiv 1$)

$$\frac{1}{x^n} \begin{cases} \to 0^+ & x>1 \\ \equiv 1 & x=1 \\ +\infty & 0<x<1 \end{cases}$$

$$1-\frac{1}{x^n} \begin{cases} \to 1 & x>1 \\ \equiv 0 & x=1 \\ \to -\infty & 0<x<1 \end{cases}$$