$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

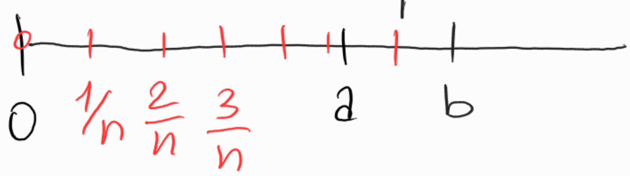
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{\text{irrazionali}\}$

Razionali e irrazionali sono mescolati "molto finemente".

PROPOSIZIONE (Densità dei razionali e degli irrazionali)

Ogni intervallo (a,b) con $a<b$ contiene infiniti razionali e infiniti irrazionali.

Cenno della dim. Siano $a<b$, dimostro che $\exists\, q$ razionale t.c. $a<q<b$



supponiamo $0 \le a < b$.

Fisso $\underset{\mathbb{N}}{\hat{n}} > \frac{1}{b-a} \iff \frac{1}{n} < b-a$

Considero la successione $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots$

Poiché $\frac{1}{n} < b-a$, tra questi numeri ce n'è almeno uno che cade tra (a,b)

Se a e b non sono entrambi positivi, si prende $M \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < a+M < b+M$, trovo un razionale q compreso tra $a+M$ e $b+M$. Allora $q-M \in (a,b)$.

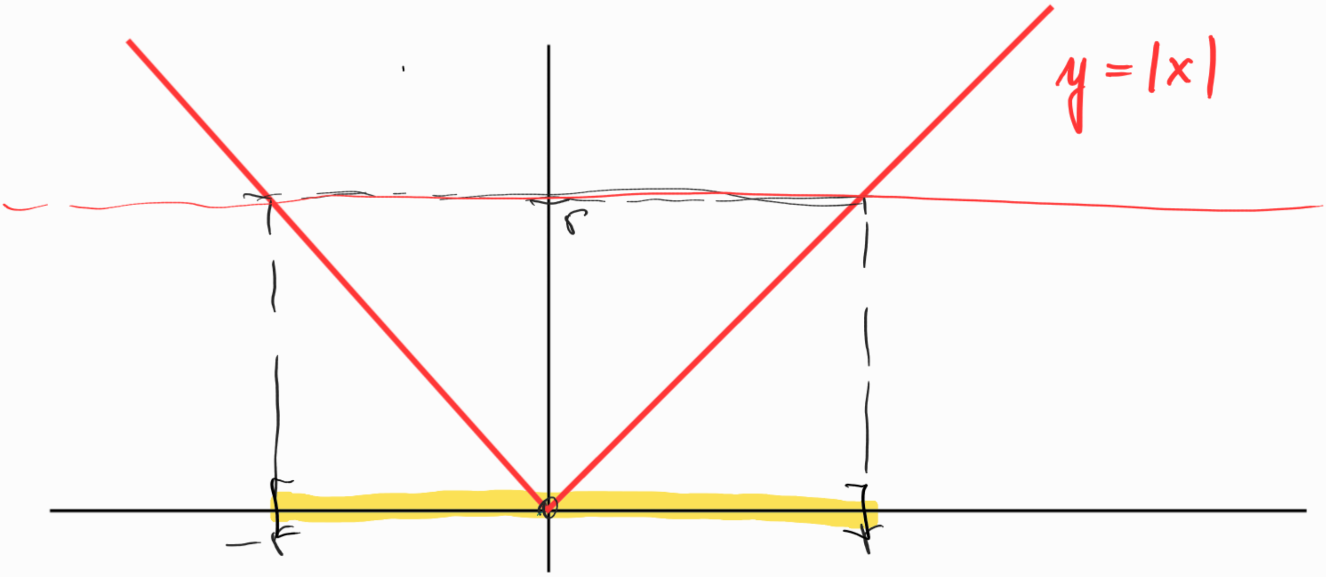
E per gli irrazionali? Voglio trovare z irrazionale compreso tra a e b. Considero $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow \exists\, \underline{q \in \mathbb{Q}}$ t.c.

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < q < \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow a < q\sqrt{2} < b$$

$q\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Infatti se fosse $q\sqrt{2} = r \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{r}{q} \in \mathbb{Q} \quad \text{impossibile} \qquad \square$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$



Proprietà del valore assoluto

1) $|x| \geq 0$, $\quad |x| = 0 \iff x = 0$

2) $|x| = r > 0 \iff x = \pm r$

3) $|xy| = |x|\,|y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

dim Basta fare i vari casi

a) $x \geq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

$$\underbrace{|xy|}_{xy} = \underbrace{|x|}_{x}\underbrace{|y|}_{y} \qquad \text{OK.}$$

b) $x \geq 0 \quad y < 0 \Rightarrow xy \leq 0$

$$\underbrace{|xy|}_{-xy} \overset{?}{=} \underbrace{|x|}_{x}\ \underbrace{|y|}_{(-y)} \qquad \text{ok.}$$

c) $x < 0,\ y \geq 0$ $\quad$ uguale.

d) $x<0,\ y<0 \Rightarrow xy>0$

$$|xy| \overset{?}{=} |x|\,|y|$$

$$xy = (-x)(-y)$$ OK.

4) $$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \qquad \forall x,y\in\mathbb{R},\ y\neq 0$$

dim. uguali.

5) Sia $r\geq 0$. Allora

$$|x|\leq r \iff -r\leq x\leq r.$$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x\leq r \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ -x\leq r \end{cases} \quad x\geq -r$$

$$(0\leq x\leq r) \vee (-r\leq x<0)$$

5') Se $r>0$

$$|x|<r \iff -r<x<r$$

6) $$-|x| \leq \underbrace{x\leq |x|}$$ Poniamo $|x|=r\geq 0$

1ª dim. confrontare i grafici.

devo provare $-r\leq x\leq r \iff |x|\leq r=|x|$
vera!

7) Dis. triangolare

$$|x+y| \leq |x|+|y| \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

dim. sintetica

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

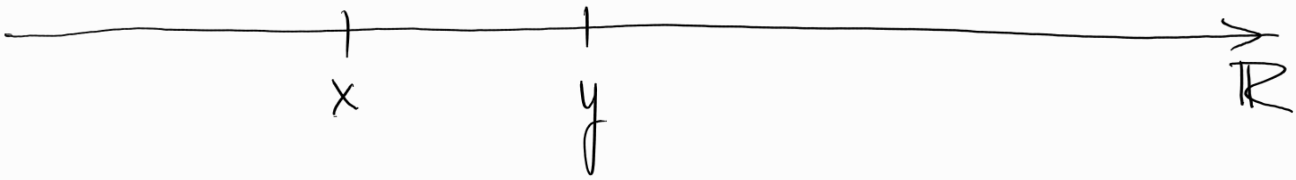
$$-\underbrace{(|x|+|y|)}_{r} \leq x+y \leq \underbrace{|x|+|y|}_{r}$$

$$-r \leq x+y \leq r \overset{(5)}{\iff} |x+y| \leq r = |x|+|y|$$

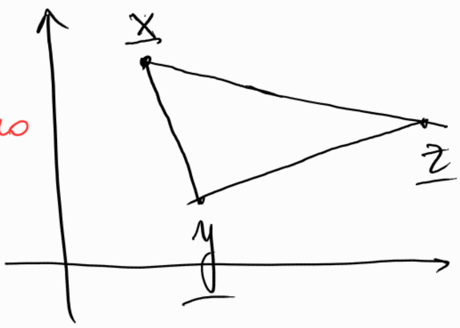
Spesso si scrive in questa forma.

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y| \qquad \forall x,y,z \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

$$|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y|$$



La quantità $|x-y|$ si interpreta come la "distanza" tra x e y.



Nel caso di due dimensioni introdurremo una simile distanza euclidea, e la dis. triangolare dice che il lato $\underline{xy}$ non ha lunghezza superiore alla somma degli altri due lati del triangolo.