AVVISO

Modifiche all'orario della prossima settimana:

Lunedì 2 ottobre:

- Niente Geometria
- 10:00 → 13:00 Analisi I (Aula Bianchi Bandinelli)
- 14:00 → 16:00 Esercitazione di Analisi I (Aula 7)

Martedì 3 ottobre:

- Niente Geometria
- 11:00 → 14:00 Analisi I (Aula Bianchi Bandinelli)
- 14:00 → 15:00 Laboratorio di Matematica (Aula 14)

Mercoledì 4 ottobre:

Tutto regolare

Giovedì 5 ottobre:

Niente Analisi I

- 14:00 → 18:00 Geometria (Aula 15)
- 18:00 → 19:00 Laboratorio di Matematica (Aula 15)

DEF. di limite di successione

$\{a_n\}$ successione di numeri reali, $\ell \in \mathbb{R}^*$.

Si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \iff \forall V$ intorno di ℓ si ha definitivamente $a_n \in V$

$\iff \forall V$ intorno di ℓ $\exists \underset{\overset{\parallel}{\nu}}{k} \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \in V \quad \forall n > k$

1) Se $\ell \in \mathbb{R}$, la def^{ne} diventa $\quad (V = B_\varepsilon(\ell))$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > k.$$

Verifichiamo che la definizione non funziona se prendo un limite sbagliato.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}$$

!!

Dovrei verificare che $\forall \varepsilon > 0$ $\quad \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon$ definitivamente

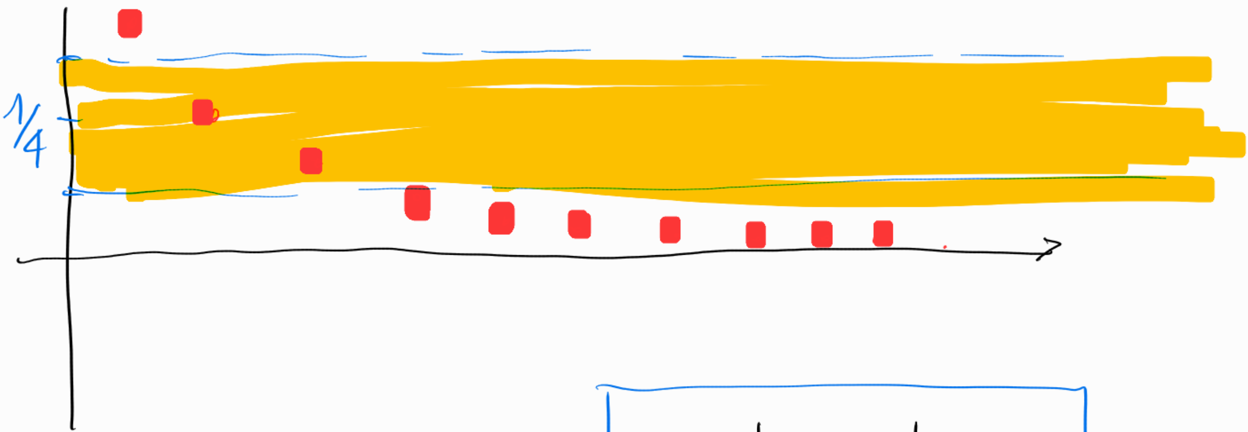
Vedremo che ciò è falso se ε è "piccolo"

Scelgo $\varepsilon = \frac{1}{8}$ (inferiore alla distanza tra $\frac{1}{4}$ e 0).

Dovrei tentare di provare che $\underbrace{\left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \right|}_{\text{è negativo se } n \geq 3 \text{ (supponiamolo!)}} < \frac{1}{8}$ definitivamente.

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} < \frac{1}{8} \quad \text{definitivamente}$$

$$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{8} \quad \text{falso } \forall n \geq 3 \Rightarrow \text{non è vera def}^{te}.$$



<u>OSS 1</u>

$$\underbrace{\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}} \iff \underbrace{\boxed{\lim_{n \to +\infty} |a_n - \ell| = 0}}$$

significa $\quad\quad\quad\quad$ significa

$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$ def^{te}. $\quad\quad$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{\big| |a_n - \ell| - \cancel{0} \big|}_{= |a_n - \ell|} < \varepsilon$ def^{te}

<u>OSS 2</u>

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \to +\infty} c a_n = c\ell .$$

<u>Dim</u>. se $c = 0$, è ovvio. Supponiamo $c \neq 0$.

Devo provare che $\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{|c a_n - c\ell|}_{= |c(a_n - \ell)|} < \varepsilon$ def^{te}

$$|c|\,|a_n-\ell| \overset{?}{<} \varepsilon \quad \text{def}^{te}$$

$$\Updownarrow$$

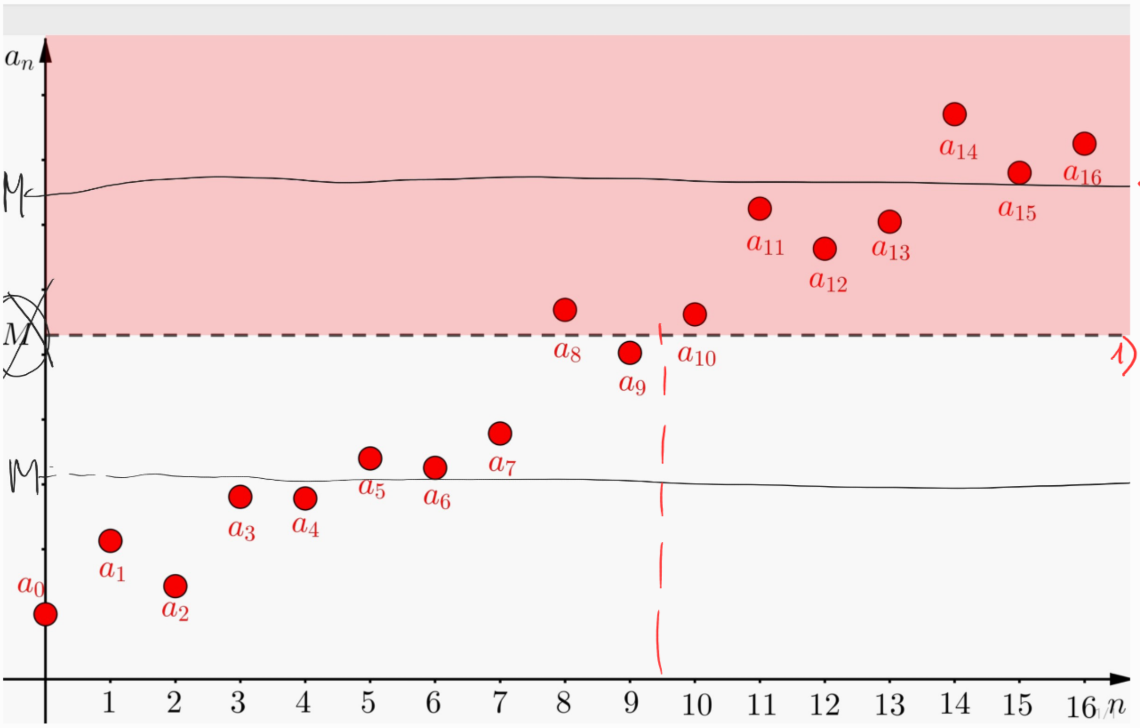
$$|a_n-\ell| < \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon' \quad \text{def}^{te}$$

e questo è vero perché $a_n \to \ell$.

---

2) $\ell = +\infty$. Gli intorni di $+\infty$ sono della forma $V = (M, +\infty]$. La def^{ne} diventa

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M\in\mathbb{R}\ \exists K\in\mathbb{R} \text{ t.c. } a_n > M \quad \forall n > K$$



2) con questo M devo prendere $\bar{n}$ almeno 14

1) con questo M devo prendere $\bar{n}$ almeno 10

3) con questo M va bene anche lo stesso $\bar{n}$ di prima

OSS se ho verificato la condizione per un certo $M_0 \in \mathbb{R}$ automaticamente essa risulta verificata per ogni $M < M_0$.
Quindi possiamo limitarci a verificare la condizione
$\forall M \geq M_0$
$>$

Spesso la def^{ne} si trova in questa forma

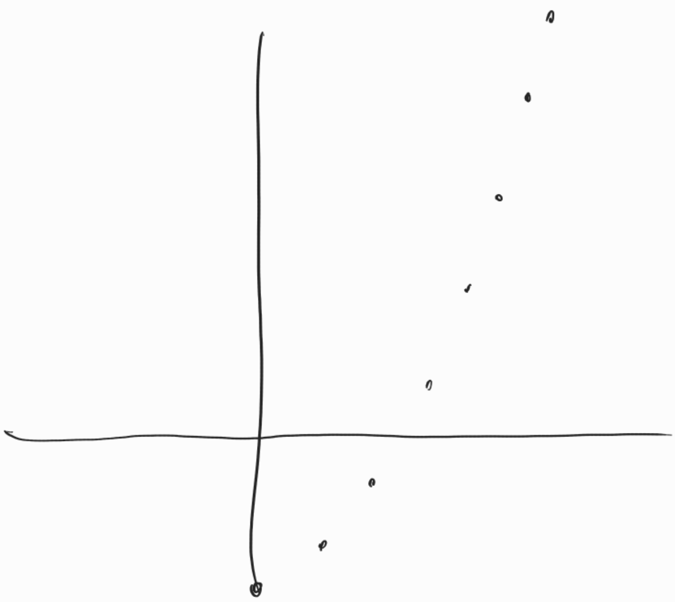
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M>0 \ \exists K_M \text{ t.c. } \forall n > K_M \ a_n > M$$

ESEMPI Verifichiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} (n^2-4) = +\infty.$$

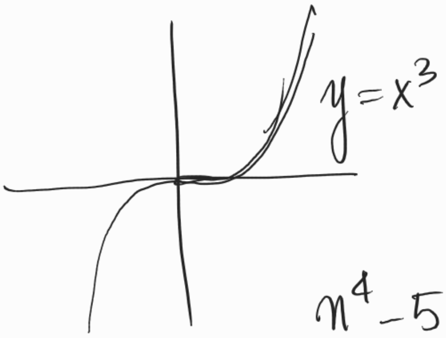
$\forall M>0$ cerco K_M t.c. $\quad n^2-4 > M \quad \forall n > K_M$

$$n^2-4 > M$$
$$\Updownarrow$$
$$n^2 > M+4$$
$$\Updownarrow$$
$$n > \sqrt{M+4} =: K_M$$



Verifica che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^4-5n} = +\infty$

Fisso $M>0$, cerco K_M t.c. $\sqrt[3]{n^4-5n} > M \quad \forall n > K_M$



$$\Updownarrow$$

$$n^4-5n > M^3$$

$$n^4-5n = n\underbrace{(n^3-5)}_{\geq 3 \text{ se } n\geq 2} \overset{\boxed{n\geq 2}}{\geq} 3n > M^3 \quad \boxed{n > \frac{M^3}{3}}$$

Basta scegliere $K_M = \max\left\{2, \frac{M^3}{3}\right\}$

Se $n > K_M \Rightarrow (n>2) \vee \left(n > \frac{M^3}{3}\right) \Rightarrow \sqrt[3]{n^4-5n} > M$

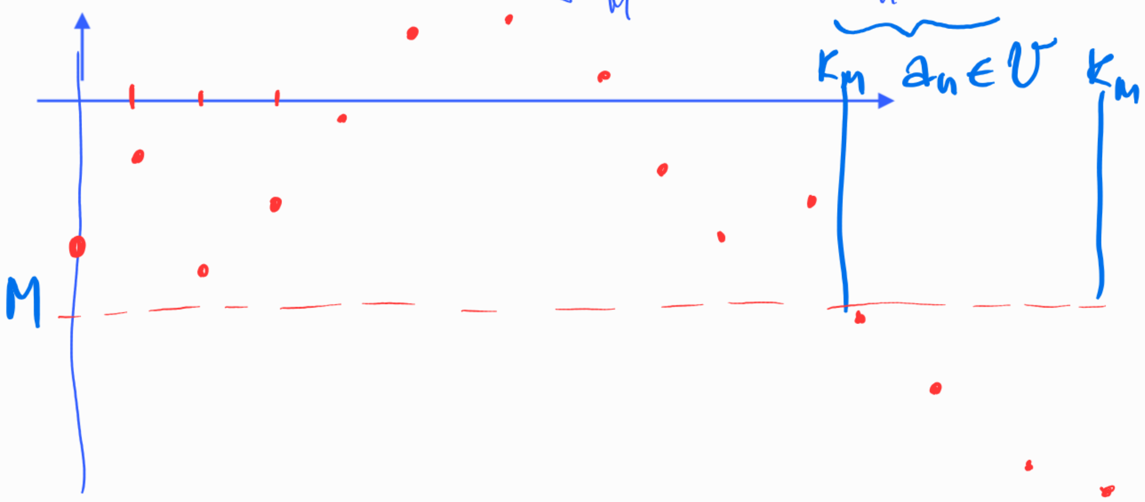
Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$, la successione si dice **convergente**

se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, " " " " **divergente a $+\infty$**

Resta da vedere il caso $\ell = -\infty$ (**succ^{ne} divergente a $-\infty$**)

3) $\ell = -\infty$. Gli intorni di $-\infty$ sono della forma $[-\infty, M)$
U "

$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists K_M \in \mathbb{R}$ t.c. $\underbrace{a_n < M}$ $\forall n > K_M$



OSS Come nel caso precedente, se ho verificato la condizione per un certo M_0, essa sarà a maggior ragione verificata per tutti gli $M > M_0$.
Quindi basterà verificare la def^{ne} $\forall M<0$.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M<0 \quad \exists K \text{ t.c. } a_n < M \quad \forall n>K$$

ossia (sostituendo $M<0$ con $-M$ (dove $M>0$))

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M>0 \quad \exists K \text{ t.c. } a_n < -M \quad \forall n>K}$$

Verifichiamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} (3+2n^2-n^4) = -\infty$

Fix $M>0$, cerco K t.c. $\underbrace{3+2n^2-n^4 < -M}_{(*)} \quad \forall n>K$.

$$(*) \iff n^4-2n^2 > M+3$$

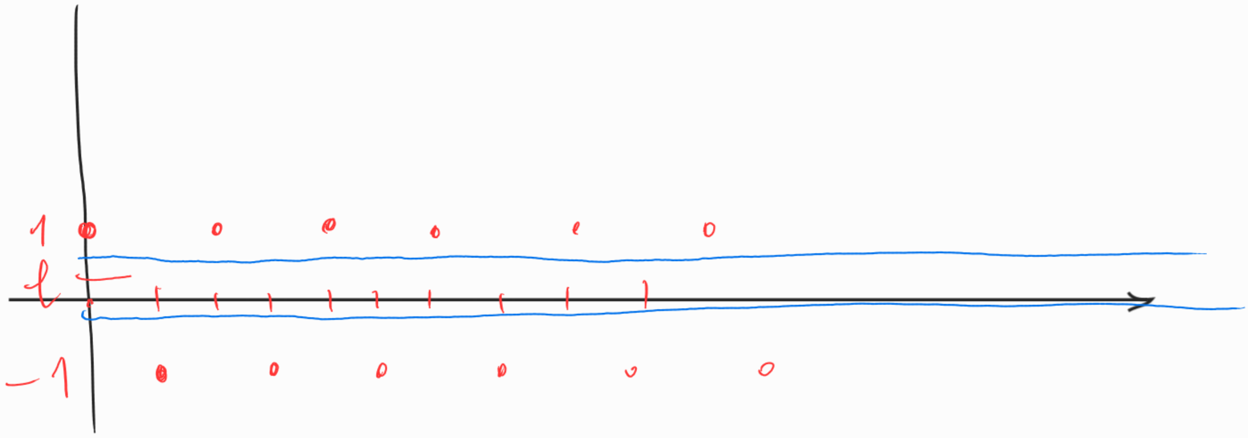
$$n^4-2n^2 = n^2\underbrace{(n^2-2)}_{\substack{\vee\!\vert \\ 2}} \underset{n\geq 2}{\overset{\boxed{n\geq 2}}{\geq}} 2n^2 > M+3$$

$$n > \sqrt{\frac{M+3}{2}}$$

Basta prendere $K = \max\left\{2, \sqrt{\frac{M+3}{2}}\right\}$

4) Successioni che non ammettono limite (successioni irregolari).

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

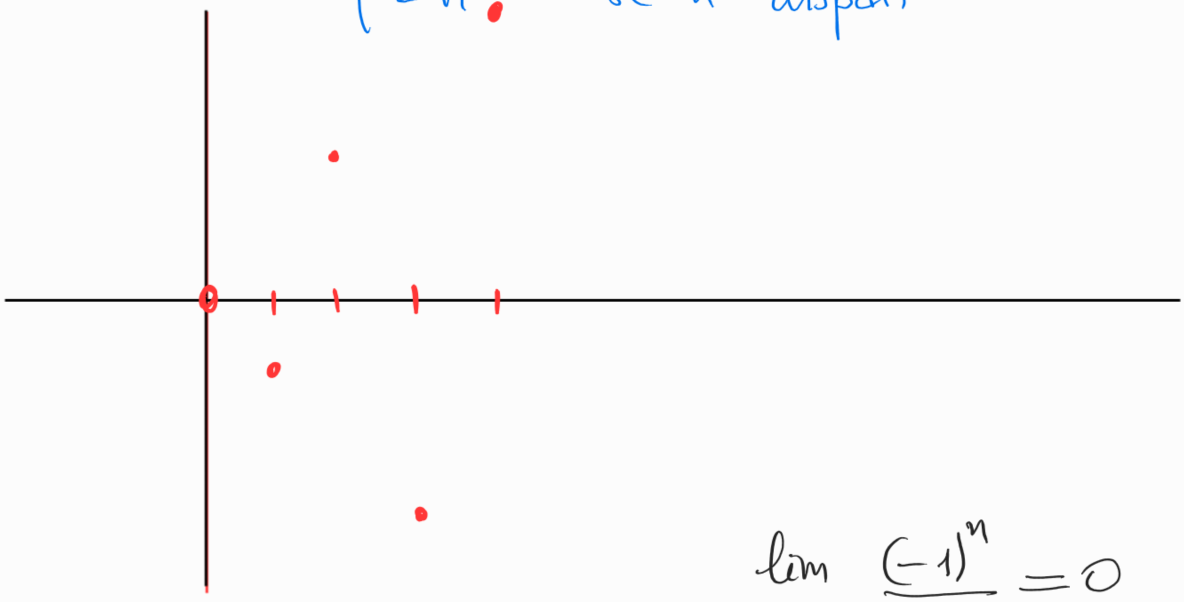


Chiaramente non può essere $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ opp. $-\infty$
(perché è limitata).

Non può essere neanche $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$, perché, scelto $\varepsilon = 1/2$, la successione dovrebbe stare definitivamente in $\left(l-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}\right)$, ma è impossibile perché continua ad assumere i valori $+1$ e -1 che distano 2 tra loro

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \nexists$$

$$a_n = (-1)^n n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ pari} \\ -n & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$



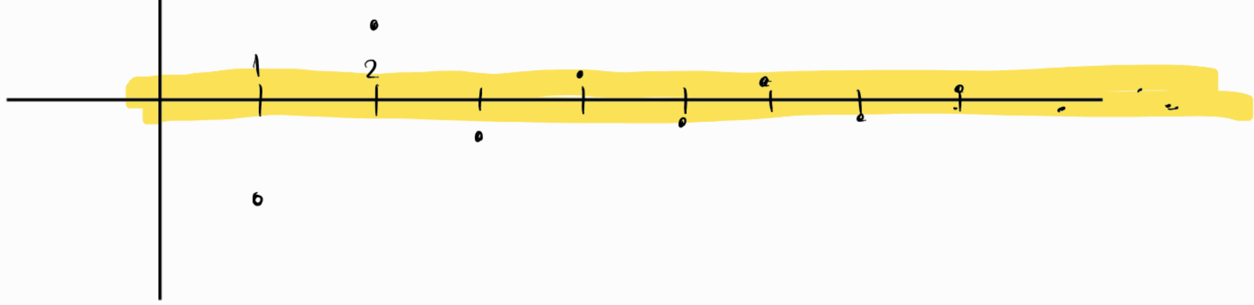
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

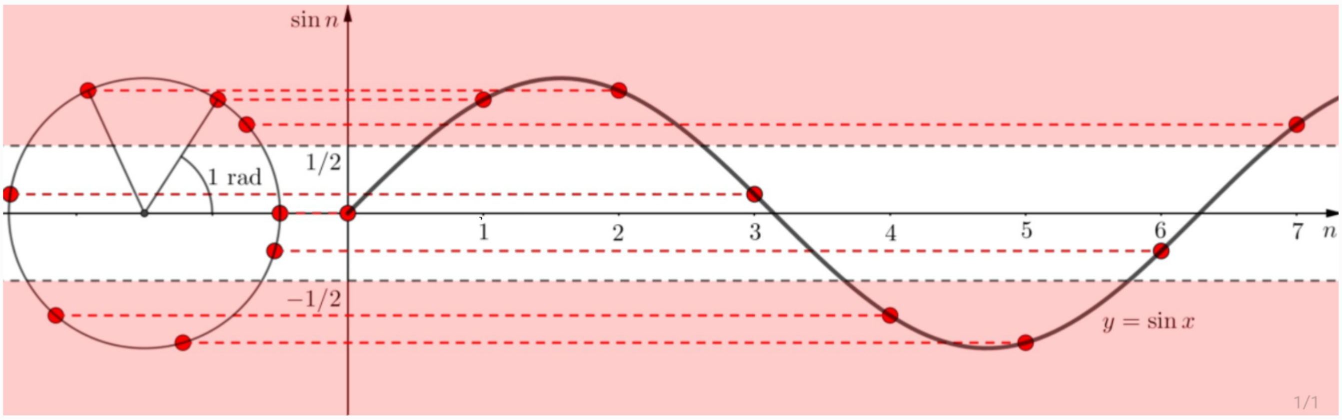
Fix $\varepsilon > 0$. cerco k t.c. $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon \quad \forall n > k$

$1/n$ "

$n > \frac{1}{\varepsilon}$

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$





$a_n = \sin n$ non ha limite. Infatti, come si vede dalla figura, assume infinite volte valori $> 1/2$ e anche valori $< -1/2$.