Numeri razionali
(due modi di considerarli)

$\left\{ \pm \frac{m}{n} \; ; \; m, n \in \mathbb{N} \; , \; n \neq 0 \right\}$ dopo aver identificato tra loro frazioni equivalenti

$\left\{ \pm \text{ sviluppi decimali finiti o periodici} \right\}$

Eccezione: non consideriamo sviluppi decimali che terminano con $\bar{9}$

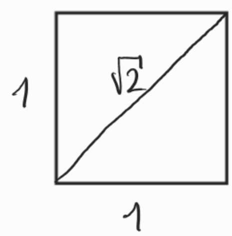
$$0,\bar{9} = 0,99999\ldots = \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}}_{\text{serie}} =$$

$$= 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \, \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \underset{\text{Analisi}}{=} \frac{r}{1-r} \quad \forall \, r \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{4} = 0,25 = \cancel{0,24\bar{9}}$$ Scegliamo di non usare questa notazione

Problema: i numeri razionali non permettono di risolvere alcuni problemi molto semplici.



$\sqrt{2}$ non esiste nei numeri razionali.

Più precisamente: $\nexists \, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$.

Per assurdo, supponiamo che $\exists \, q = \pm \frac{m}{n}$ t.c. $q^2 = 2$

Posso supporre che $q = \frac{m}{n}$, e posso supporre che m e n siano interi primi tra loro (senza divisori in comune), in particolare non sono entrambi pari.

$$q^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = \underbrace{2n^2}_{\text{pari}} \Rightarrow m \text{ pari}, \; m = 2k \quad k \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \cancel{4}^{2} k^2 = \cancel{2} n^2 \Rightarrow n$ pari. Assurdo $\square$

Dim. che $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ non sono razionali.

Per poter parlare, per esempio, di radici quadrate, devo "estendere" i numeri razionali.

Un modo per farlo è introdurre i numeri reali, per esempio come

$$\mathbb{R} = \{\pm \text{ sviluppi decimali qualsiasi (finiti, periodici, non periodici)}\}$$

Tra questi ce ne sono alcuni molto conosciuti

$\pi = 3{,}1415926\ldots$ (*)

$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$

$e = 2{,}7182818284\ldots$

Cosa vuol dire (*)

$$3 < \pi < 4$$
$$3{,}1 < \pi < 3{,}2$$
$$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$
$$3{,}141 < \pi < 3{,}142$$

Pb. come si fanno le operazioni?

$\pi + \sqrt{2}$

$\pi = 3{,}1415926\ldots$

$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$

0) $3+1=4$

1) $3{,}1+1{,}4=4{,}5$

2) $3{,}14+1{,}41=4{,}55$

3) $\begin{array}{r} 3{,}141 \\ 1{,}414 \\ \hline 4{,}555 \end{array}$

4) $\begin{array}{r} 3{,}1415 \\ 1{,}4142 \\ \hline 4{,}5557 \end{array}$

5) $\begin{array}{r} 3{,}14159 \\ 1{,}41421 \\ \hline 4{,}55580 \end{array}$

stabili

Man mano che procediamo le cifre si "stabilizzano" $\Rightarrow$

$0,\bar{4} + 0,\bar{5} = 0,\bar{9} = 1$

↑ con questo metodo

$\Rightarrow$ lo sviluppo decimale che si ottiene è la somma di π e $\sqrt{2}$.

Dopo aver definito queste operazioni, si verifica che continuano a valere le proprietà P1) – P15)
In altre parole, i reali verificano le stesse proprietà dei razionali; ma in più ne verificano un'altra (Proprietà di completezza) che si può enunciare in vari modi:

1) Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $a \leq b$ $\forall a \in A, \forall b \in B$.

Allora $\exists$ $c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A, \forall b \in B$

OSS Questa proprietà è falsa nei razionali.

$A = \{\underset{a}{x} \in \mathbb{Q} : \underset{a}{x} > 0, \underset{a^2}{x^2} < 2\}$, $B = \{\underset{b}{x} \in \mathbb{Q} : \overset{b}{x} > 0, \underset{b^2}{x^2} > 2\}$

Si può dimostrare che un elemento "separatore", cioè un elemento c t.c. $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$ deve verificare $c^2 = 2 \Rightarrow c \notin \mathbb{Q}$

Un altro modo equivalente di enunciare questa proprietà è

2) Ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore.