Testi: • Libri del liceo
- Prima parte di un testo di Analisi I.
- Libri di "precorso"
- Materiali che posterò sulla pagina web del corso sul portale www.elearning.uniroma1.it

• Ricevimento studenti: merc. 11-13 dip. di Matematica (Città Universitaria), st. 4 pianterreno
mail: dallaglio@mat.uniroma1.it

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \pm \frac{m}{n} \quad \text{t.c. } m, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \right\}$$

N.B. devo identificare fra loro frazioni che corrispondono allo stesso numero (per es. $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{10}{30}$)

$$\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q} \iff mq = np$$

Una volta fatto questo si definiscono delle operazioni

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$$ è ben posta.

Rappresentazione dei razionali come sviluppi decimali

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 = \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

1

$$
\begin{array}{l|l}
1, & 4 \\
\hline
10 & 0{,}25 \\
\ \ 20 & \\
\ \ \ \ 0 &
\end{array}
$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0{,}\overline{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{\ldots} + \ldots$$

$$= \frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k}$$ serie numerica (oggetto del corso di Analisi)

$$\frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}$$

Prop Lo sviluppo decimale corrispondente a un numero razionale è sempre finito (con un numero finito di cifre decimali) oppure periodico.

Idea della dim.:

$$\frac{9}{7} = 1{,}\overline{285714}$$

$$
\begin{array}{l|l}
9 & 7 \\
\hline
20 & 1{,}28571428571 4\ldots \\
\ \ 60 & \\
\ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \ \ 50 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 10 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 20 &
\end{array}
$$

E' vero anche il contrario: ogni sviluppo decimale periodico corrisponde a una frazione generatrice.

$$3,82\overline{12} = 3,82121212\ldots =$$

$$= 3 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100} + \underbrace{\frac{12}{10000}}_{10^4} + \underbrace{\frac{12}{1000000}}_{10^6} + \cdots$$

$$= 3 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{12}{10^{2k}} =$$

$$= \frac{382}{100} + 12 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{10^{2k}} =$$

$$= \frac{382}{100} + \frac{12}{10^4} \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{100^k}} = \frac{382}{100} + \frac{12}{100 \cdot 99} = \_\_\_\_\_\_$$

corso di Analisi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{100^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \forall q \in (-1,1)}$$

$$0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

Attenzione: $0,\overline{9}$ è esattamente pari a 1. !!

$$0,24\overline{9} = \frac{1}{4}$$

P1. $x + y = y + x \;\; \forall x, y$ (proprietà commutativa);
P2. $(x + y) + z = x + (y + z) \;\; \forall x, y, z$ (proprietà associativa);
P3. $\exists!$ elemento, detto **zero** e indicato con 0, tale che $x + 0 = x$ $\forall x$ (esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma);
P4. $\forall x \; \exists!$ elemento, detto **opposto** di x e indicato con $-x$, tale che $x + (-x) = 0$ (esistenza dell'opposto).

proprietà della somma

P5. $x \cdot y = y \cdot x \;\; \forall x, y$ (proprietà commutativa);
P6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \;\; \forall x, y, z$ (proprietà associativa);
P7. $\exists!$ elemento $\neq 0$, detto **unità** e indicato con 1, tale che $x \cdot 1 = x \;\; \forall x$ (esistenza dell'elemento neutro rispetto al prodotto);
P8. $\forall x \neq 0 \; \exists!$ elemento, detto **reciproco** di x e indicato con x^{-1} o $1/x$, tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esistenza del reciproco).

proprietà del prodotto

P9. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \;\; \forall x, y, z$ (proprietà distributiva).

Negli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ è definita una **relazione d'ordine** (totale), indicata con il simbolo "$\leq$", che gode delle seguenti proprietà:

P10. $\forall x, y$ vale almeno una delle due relazioni $x \leq y$ o $y \leq x$ (dicotomia);
P11. $x \leq x \;\; \forall x$ (proprietà riflessiva);
P12. se valgono $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (antisimmetria);
P13. se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

ordinamento

P14. se $x \leq y$, allora $x + z \leq y + z \;\; \forall z$;
P15. se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, allora $x \cdot y \geq 0$.
È anche utile introdurre il simbolo $<$ (e ovviamente $>$) di "disuguaglianza stretta", che verifica ancora (P13)–(P.15):

$$x < y \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad x \leq y \;\text{ e }\; x \neq y\,.$$

ordinamento + operazioni