

ANALISI VETTORIALE per Fisica

– Diario delle lezioni - Settimana n. 2–

I risultati si intendono con dimostrazione, tranne ove diversamente indicato (s.d.). Tutte le definizioni e i teoremi sono accompagnati da esempi ed esercizi, di cui sono riportati qui solo i più elaborati.

Questo documento è curato da Andrea Dall'Aglio¹, docente del corso.

Lunedì 6 ottobre 2014 - Venerdì 10 ottobre 2014

- **Successioni a valori in \mathbb{R}^N .**
- **Osservazione:** Una successione \mathbf{x}_n a valori in \mathbb{R}^N tende a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ se e solo se ciascuna delle componenti di \mathbf{x}_n converge alla corrispondente componente di \mathbf{x} . In formule:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^k = x^k, \quad k = 1, \dots, N,$$
 dove $\mathbf{x}_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$, $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N)$.
- **Successioni di Cauchy in \mathbb{R}^N .**
- **Teorema:** una successione converge in \mathbb{R}^N se e solo se è di Cauchy (*dim. non fatta, perché è sostanzialmente identica a quella in \mathbb{R}*).
- **Insiemi sequenzialmente compatti.** Esempi.
- **Teorema di Bolzano-Weierstrass.**
- **Massimo (minimo) assoluto di una funzione definita in un insieme di \mathbb{R}^n .**
- **Teorema di Weierstrass.**
- **Esempio:** la funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$ ammette massimo e minimo assoluti sull'insieme

$$E = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, y \geq 0\}.$$
- **Insiemi connessi per archi.** Esempi.
- **Teorema di esistenza degli zeri.**
- **Teorema dei valori intermedi.**

¹Con qualche aiuto da:

Pink Floyd - Atom Heart Mother
 Lee Konitz/Jimmy Giuffre - Lee Konitz meets Jimmy Giuffre
 Lou Reed - Transformer
 Ben Folds Five - Live
 Mike Keneally and Beer for Dolphins - Sluggo!

- **Direzioni. Derivata direzionale di una funzione di due o più variabili.** Esempi
- **Derivate parziali.**
- **Gradiente di una funzione.**

• **Osservazione importante:** per funzioni di più variabili non è più vero che la derivabilità in un punto implica la continuità.

- **Esempio:** La funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è derivabile in tutte le direzioni nell'origine (con derivata nulla), ma non è continua.

- **Esempio:** La funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è derivabile in tutte le direzioni nell'origine (con derivata nulla), ma non è continua.

- **Funzione differenziabile in un punto. Piano tangente.**
- **Teorema:** Se f è differenziabile in un punto, allora in quel punto è anche continua.
- **Teorema:** Se f è differenziabile in un punto, allora in quel punto è anche derivabile in tutte le direzioni. Inoltre in quel punto si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \nabla f \cdot \mathbf{v}.$$

- **Osservazione importante:** Il gradiente punta nella direzione di "massima crescita" della funzione.
- **Equazione del piano tangente** al grafico di una funzione differenziabile.
- **Esercizio:** Verificare la differenziabilità della funzione $f(x, y) = x^2 y$ nel punto $(1, 2)$ e trovare il piano tangente al grafico in quel punto. Calcolare la derivata direzionale in quel punto lungo la direzione individuata dal vettore $(6, 5)$.
- Funzioni di classe $C^1(D)$.
- **Teorema del differenziale totale.**
- Schema delle implicazioni tra regolarità C^1 , differenziabilità, continuità, derivabilità.
- **Proposizione:** Somma, prodotto, rapporto, composizione di funzioni differenziabili (risp. di classe C^1) sono differenziabili (risp. di classe C^1) (s.d.).

- Esempi.
 - **Punti critici (o stazionari). Punti di massimo e minimo relativo.**
 - **Teorema di Fermat (c.n. per gli estremi locali)**
 - **Esercizi vari (completare)**
-