Pagina web del corso: nel portale
www.elearning.uniroma1.it

Libro di testo: Bertsch - Dall'Aglio - Giacomelli:
Epsilon 1 - Primo corso di Analisi Matematica
Altri libri sono indicati nella pagina web.
Esercizi: Esercizi sul testo + Amar - Bersani
+ Marcellini - Sbordone Esercitazioni di Matematica
+ esercizi e testi di esame dalla pagina web.

Modalità di esame: · Prova scritta 2h 30'
· Prova di teoria scritta di 50' a piccoli gruppi
· Prova orale 10' - 20'

Orario di ricevimento: Mercoledì 11:00 - 13:00
Dip. Matematica (Città Universitaria), Piano terra, stanza 4.
(preferibilmente avvisando per mail il giorno prima)
email: dallaglio@mat.uniroma1.it

Esercitazione supplementare (facoltativa): Lunedì 14-16, Aula ??
a partire da lunedì 2 ottobre.

$\mathbb{R} = \{$ numeri reali $= \dots$ da vedere $\}$

Considereremo sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$

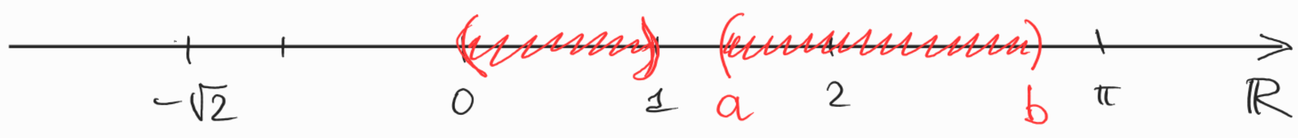
Esempi:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ numeri naturali

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ interi relativi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \text{ t.c. } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

$(0,1) =]0,1[= \{ x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1 \}$
intervallo aperto

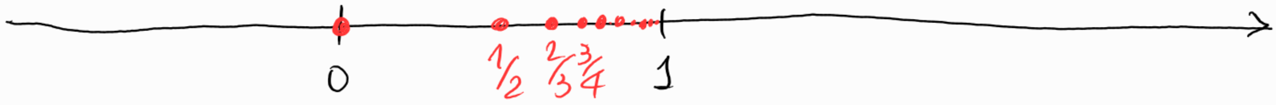


$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ intervallo chiuso

$(0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$

$E = \left\{ x = \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$



$F = \left\{ x = \frac{5}{n^2} : n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ 5, \frac{5}{4}, \frac{5}{9}, \frac{5}{16}, \frac{5}{25}, \dots \right\}$

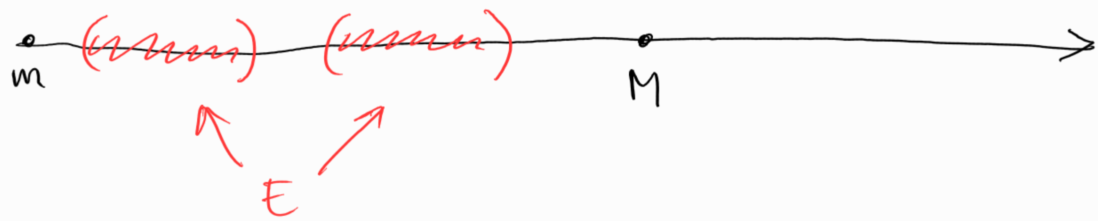
$G = \{ x = n^2 - 3n : n \in \mathbb{N} \} = \{ 0, -2, 4, \dots \}$

$H = \{ x = t^4 - 5t^3 + t^2 : t \in \mathbb{R} \}$

$K = [0,2] \cup (3,5]$

<u>DEFINIZIONE</u> Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che $M \in \mathbb{R}$ è un <u>maggiorante</u> di E se $M \geq x \quad \forall x \in E$

per ogni.



Diremo che $m \in \mathbb{R}$ è un <u>minorante</u> di E se

$m \leq x \quad \forall x \in E.$

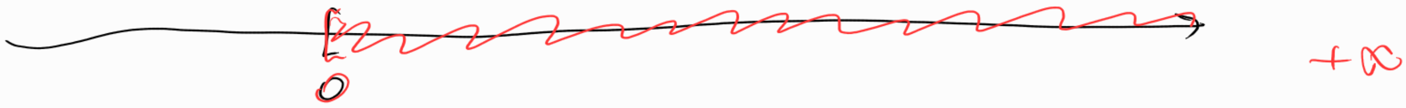
Non è detto che E ammetta maggioranti.

Per esempio $\mathbb{N}$ non ha maggioranti

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

$$[0,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq 0\}$$



Un insieme $E\subseteq\mathbb{R}$ si dice limitato superiormente se ammette almeno un maggiorante

Esempi: $(0,1)$

$(0,1]$

$[0,1]$

$(-\infty,1)=\{x\in\mathbb{R}:\ x<1\}$

sono limitati superiormente
ammettono un maggiorante
(per es. 14)

anche 1 è un maggiorante di questi insiemi.

I primi 3 sono anche limitati inferiormente,

OSS. se E ammette un maggiorante (minorante), allora ne ammette infiniti.

DEF E si dice limitato se è limitato sia superiormente che inferiormente.

E è illimitato superiormente (inferiormente) se non ammette maggioranti (minoranti)

E è illimitato se è illimitato superiormente oppure inferiormente, ossia se non è limitato.

$$E=\left\{x=\frac{n-1}{n}\ :\ n=1,2,3,\dots\right\}=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots\right\}$$

E' limitato superiormente? sì perché 1 è un maggiorante di E.

Infatti $\text{¿}\ x\leq 1 \quad \forall x\in E$?

$\text{¿}\ \frac{n-1}{n}\leq 1 \quad \forall n=1,2,\dots$?

$\text{¿}\ \cancel{n}-1\leq \cancel{n} \quad \forall n\dots$?

$-1\leq 0$ OK!

E è anche limitato inferiormente, infatti 0 è un minorante.

OSS 0 è un minorante che appartiene all'insieme

DEF. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$

~~Un~~ Il massimo di E è un maggiorante di E che appartiene a E

~~Un~~ Il minimo " " minorante " " "

OSS Il massimo di E, se esiste è unico.

Dim Supponiamo che $x_1, x_2 \in E$ siano due massimi di E.

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 \text{ è un maggiorante}, & x_2 \in E & \Rightarrow x_1 \geq x_2 \\ x_2 \quad \text{"} \quad \text{"} & x_1 \in E & \Rightarrow x_2 \geq x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

$\square$

$$E = \{x = n^3 - 3n, \quad n = 1, 2, \dots\} = \{-2, 2, 18, 52, \dots\}$$

E' illimitato superiormente? Sì devo provare che non ha maggioranti,

cioè: $\forall M \in \mathbb{R}$, M non è maggiorante di E

$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists x \in E : x > M$

$x = n^3 - 3n$

[M è maggiorante di E $\iff$ $M \geq x \ \forall x \in E$

M non è maggiorante di E $\iff$ $\exists x \in E : x > M$]

esiste

$$\forall M \in \mathbb{R} \qquad \exists n \in \mathbb{N}^* : \quad n^3 - 3n > M$$

Fissato $M \in \mathbb{R}$ devo trovare n : $n^3 - 3n > M$

$$n^3 - 3n = n \underbrace{(n^2 - 3)}_{\substack{\geq 1 \\ \text{se } n \geq 2}} \overset{n \geq 2}{\geq} n > M$$

Basta prendere $n > \max\{2, M\}$

E' limitato inferiormente? Proviamo a verificare che la successione $a_n = n^3 - 3n$ è crescente, cioè

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (*)$$

Se provo (*) $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_1 = -2$

$$\underbrace{(n+1)^3 - 3(n+1)}_{a_{n+1}} \overset{?}{\geq} n^3 - 3n$$

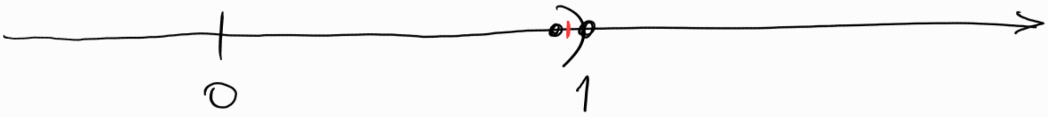
$$\cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 - \cancel{3n} - 3 \overset{?}{\geq} \cancel{n^3} - \cancel{3n}$$

$3n^2 + 3n - 2 \overset{?}{\geq} 0$ vera, perché per $n \geq 1$

$\underbrace{3n^2}_{\geq 3} + \underbrace{3n}_{\geq 3} - 2 \geq 3 + 3 - 2 = 4 \geq 0$ ok!

Esempio: $E = [0,1)$ ammette minimo 0

ammette massimo? No.



DEF Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente.
Si dice **Estremo superiore di E** il più piccolo (il minimo) dei maggioranti di E. (nel caso di $E = [0,1)$, 1 è l'estremo sup. di E)
(si indica con $\sup E$)

Supponiamo che E sia limitato inferiormente.
Si dice **estremo inferiore di E = inf E** il più grande (il massimo) dei minoranti.

Prendendo $E = [0,1)$ $\sup E = 1$

$\inf E = 0$? vediamo

1) 0 è un minorante di E ? sì.

2) 0 è il più grande dei minoranti.

Sia $m > 0$. Esso non è un minorante di E in quanto

$m > 0 \in E$ Quindi $0 = \inf E$

Ragionando alla stessa maniera, si prova:

se E ammette massimo, questo è anche $\sup E$

minimo $\qquad$ $\inf E$.

Riferimento sul testo consigliato: § 1.4.