

## Esercizio 1

Per  $B=0$  l'Hamiltoniana è la somma della Hamiltoniana dell'oscillatore isotropo in 3D e di

$$H_{\text{spin}} = \frac{2\omega A}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{\omega A}{\hbar} (J^2 - L^2 - S^2) \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Lo spettro di  $H_{\text{osc}}$  nelle basi in cui sono diagonali  $L^2$  e  $L_z$  è dato da [le degenerazioni NON includono lo spin]

$n=0$   $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$  stato con  $L=L_z=0$  non deg.

$n=1$   $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$  stati con  $L=1, L_z=\pm 1, 0$  deg. 3

$n=2$   $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$  stati con  $\begin{cases} L=2 & L_z=\pm 2, \pm 1, 0 \\ L=0 & L_z=0 \end{cases}$  deg. 6

Gli stati successivi hanno  $E > 4\hbar\omega$

Aggiungendo il termine di spin abbiamo

• stato  $n=0$   $L=0 \Rightarrow J=\frac{1}{2}$

$$E_{\text{spin}} = \frac{\omega A}{\hbar} \hbar^2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) = 0 \Rightarrow E = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad \left( \begin{matrix} \text{deg. 2} \\ J_z = \pm \frac{1}{2} \end{matrix} \right)$$

• stati  $n=1$   $L=1$ . Due possibilità:  $\begin{cases} J = \frac{3}{2} \\ J = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Se } J = \frac{3}{2} \quad E_{\text{spin}} &= \frac{\omega A}{\hbar} \hbar^2 \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) \\ &= \hbar\omega A \left( \frac{15}{4} - 2 - \frac{3}{4} \right) = A\hbar\omega \end{aligned}$$

$$\text{Se } J = \frac{1}{2} \quad E_{\text{spin}} = \frac{\omega A}{\hbar} \hbar^2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) = -2A\hbar\omega$$

Quindi il livello  $n=1$  si separa in

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega - 2A\hbar\omega \quad J = \frac{1}{2} \quad J_z = \pm \frac{1}{2} \quad \text{deg. 2}$$

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega + A\hbar\omega \quad J = \frac{3}{2} \quad J_z = \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2} \quad \text{deg. 4}$$

• livello  $n=2$  stati con  $L=2$  :  $J = \begin{matrix} 5/2 \\ 3/2 \end{matrix}$

Se  $J = \frac{5}{2}$   $E_{\text{spin}} = \frac{\omega A}{\hbar} \hbar \left[ \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} - 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right] = 2A\hbar\omega$

Se  $J = \frac{3}{2}$   $E_{\text{spin}} = \frac{\omega A}{\hbar} \hbar \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right] = -3A\hbar\omega$

stato con  $L=0$   $J = \frac{1}{2}$   $E_{\text{spin}} = 0$

Quindi il livello si separa in

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega - 3A\hbar\omega$   $J = \frac{3}{2}$   $L=2$   $J_z = \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}$ ; deg 4

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega$   $J = \frac{1}{2}$   $L=0$   $J_z = \pm \frac{1}{2}$  deg. 2

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega + 2A\hbar\omega$   $J = \frac{5}{2}$   $L=2$   $J_z = \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}$  deg 6

Autoket. Base  $|n \ell j j_z\rangle$   
 $\uparrow$   
 oscill  
 armonico

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$   $|0 0 \frac{1}{2} j_z\rangle$   $J_z = \pm \frac{1}{2}$  deg. 2

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega - 2A\hbar\omega$   $|1 1 \frac{1}{2} j_z\rangle$   $J_z = \pm \frac{1}{2}$  deg. 2

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega + A\hbar\omega$   $|1 1 \frac{3}{2} j_z\rangle$   $J_z = \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}$  deg. 4

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega - 3A\hbar\omega$   $|2 2 \frac{3}{2} j_z\rangle$   $J_z = \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}$  deg 4

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega$   $|2 0 \frac{1}{2} j_z\rangle$   $J_z = \pm \frac{1}{2}$  deg. 2

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega + 2A\hbar\omega$   $|2 2 \frac{5}{2} j_z\rangle$   $J_z = \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}$  deg. 6

b)

Notiamo che la perturbazione commuta con  $J_z$ .  
Si ricordi che se  $[A, J_z] = 0$  (A ogni operatore)  
nella base  $|J J_z\rangle$  abbiamo

$$\langle J' J_z' | [A, J_z] | J J_z \rangle = 0$$

$$(J_z - J_z') \langle J' J_z' | A | J J_z \rangle = 0$$

che implica  $\langle J' J_z' | A | J J_z \rangle = 0$  se  $J_z' \neq J_z$

SONO NON NULLI SOLO GLI ELEMENTI DIAGONALI

• Stato fondamentale

$$\text{Abbiamo } |0 \ 0 \ \frac{1}{2} \ J_z\rangle = |0 \ 0 \ 0\rangle \left| \frac{1}{2} \ J_z \right\rangle$$

Quindi

$$\langle 0 \ 0 \ \frac{1}{2} \ J_z | L_z + 2S_z | 0 \ 0 \ \frac{1}{2} \ J_z \rangle = 0 + 2\hbar J_z \begin{cases} \hbar & J_z = \frac{1}{2} \\ -\hbar & J_z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la matrice della perturbazione è

$$Bw \begin{pmatrix} \hbar & 0 \\ 0 & -\hbar \end{pmatrix} \rightarrow \text{Il livello si separa in}$$

$$E = \begin{cases} \frac{3}{2}\hbar\omega - B\hbar\omega & J_z = -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\hbar\omega + B\hbar\omega & J_z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

• Primo stato eccitato

Si tratta di stati con  $L=1$   $J=\frac{1}{2}$ . Vogliamo passare

$$\text{dalla base } |n \ l \ j \ J_z\rangle \longrightarrow |n \ l \ l_z\rangle_L |s \ s_z\rangle_s$$

$$\begin{matrix} \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \uparrow \\ n=1 & l=1 & n=1 & l=1 & s=\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Scriviamo per semplicità  $|1 \ 1 \ l_z\rangle \left| \frac{1}{2} \ s_z \right\rangle = |l_z \ s_z\rangle_{LS}$

Dalle tabelle CG  $1 \times \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} |1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1 \ -\frac{1}{2}\rangle_{LS} - \sqrt{\frac{1}{3}} |0 \ \frac{1}{2}\rangle_{LS} \\ |1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |0 \ -\frac{1}{2}\rangle_{LS} - \sqrt{\frac{2}{3}} |1 \ -1 \ \frac{1}{2}\rangle_{LS} \end{cases}$$

Quindi

$$(L_z + 2S_z) \left| 1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle = \hbar \left( -\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \left| 0 \ \frac{1}{2} \right\rangle_{LS}$$

$$(L_z + 2S_z) \left| 1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle = \hbar \left( -\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \left| 0 \ -\frac{1}{2} \right\rangle_{LS}$$

$$\left\langle 1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right| (L_z + 2S_z) \left| 1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle = -\hbar \sqrt{\frac{1}{3}} \left( -\sqrt{\frac{1}{3}} \right) = \frac{\hbar}{3}$$

$$\left\langle 1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \right| (L_z + 2S_z) \left| 1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} \right\rangle = -\hbar \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\hbar}{3}$$

Quindi la matrice della perturbazione è

$$B\omega \begin{pmatrix} \hbar/3 & 0 \\ 0 & -\hbar/3 \end{pmatrix} \quad \text{Il livello si separa} \quad E = \frac{5}{2} \hbar\omega - 2A\hbar\omega \begin{matrix} +\frac{1}{3} B\hbar\omega \\ -\frac{1}{3} B\hbar\omega \end{matrix}$$

c)

La condizione i) implica che lo stato è combinazione lineare dei livelli con  $n \leq 2$

Per applicare la condizione ii) ricordiamo che  
 gli stati con  $n$  pari sono pari sotto parità  
 {  $n$  dispari sono dispari sotto parità

Quindi sono da considerare solo gli stati con  $n=1$

La condizione iii) implica  $L_z = J_z - S_z = 0$  con certezza.

Quindi

$$| \psi \rangle = \begin{matrix} n & l & l_z & s & s_z \\ | 1 \ 1 \ 0 \rangle & | \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \rangle \end{matrix}$$

Per determinare i valori misurabili di  $J^2$  passiamo alle pare  $| n \ l \ j \ m_j \rangle$ . Tavole CG  $1 \times \frac{1}{2}$ :

$$| \psi \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1 \ 1 \ \frac{3}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right\rangle$$

Quindi i valori misurabili sono

$$J = \frac{3}{2} \quad J^2 = \frac{15}{4} \hbar^2 \quad \text{e} \quad J = \frac{1}{2} \quad J^2 = \frac{3}{4} \hbar^2$$

$$\text{Prob}(J^2 = \frac{15}{4} \hbar^2) = \frac{2}{3} \quad \text{Prob}(J^2 = \frac{3}{4} \hbar^2) = \frac{1}{3}$$

d)

$$\text{Energie di } |1 \ 1 \ \frac{3}{2} \ \frac{1}{2}\rangle \quad E_{3/2} = \frac{5}{2} \hbar \omega + A \hbar \omega$$

$$|1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}\rangle \quad E_{1/2} = \frac{5}{2} \hbar \omega - 2A \hbar \omega$$

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-iE_{3/2}t/\hbar} |1 \ 1 \ \frac{3}{2} \ \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} e^{-iE_{1/2}t/\hbar} |1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}\rangle$$

divido  
per  $e^{-iE_{3/2}t/\hbar}$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} |1 \ 1 \ \frac{3}{2} \ \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} e^{3iA\omega t} |1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}\rangle$$

Gli operatori  $H, J^2, L^2$  commutano con  $H$ . Quindi i valori medi non dipendono da  $t$ .

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle &= \frac{2}{3} E_{3/2} + \frac{1}{3} E_{1/2} = \frac{2}{3} \left( \frac{5}{2} \hbar \omega + A \hbar \omega \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{5}{2} \hbar \omega - 2A \hbar \omega \right) \\ &= \frac{5}{2} \hbar \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | J^2 | \psi(t) \rangle &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \hbar^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \hbar^2 \\ &= \hbar^2 \left( \frac{5}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{11}{4} \hbar^2 \end{aligned}$$

$$\langle \psi(t) | L^2 | \psi(t) \rangle = 2 \hbar^2 \quad [1\psi\rangle \text{ è autostato di } L^2]$$

## Esercizio 2

$$1) \quad H \sim \alpha S^2 \Rightarrow [E] = [\alpha][S]^2$$

$$[E] = [ML^2T^{-2}] \quad [S] = [\hbar] = [ML^2T^{-1}]$$

$$[\alpha] = [E][S^{-2}] = [ML^2T^{-2} M^{-2} L^{-4} T^2] = [M^{-1} L^{-2}]$$

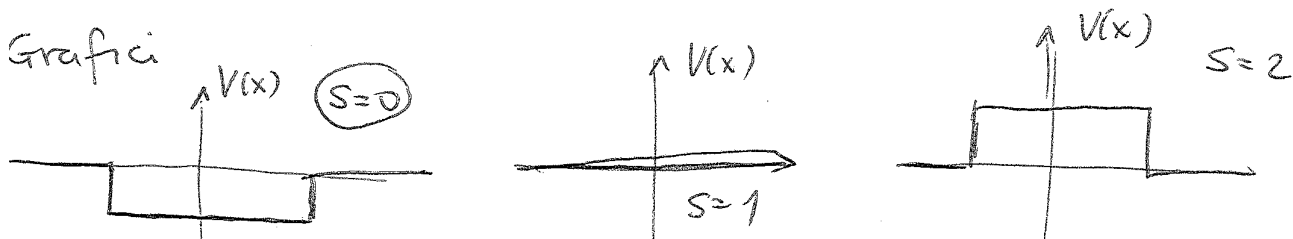
Quindi  $\alpha = \frac{c}{mL^2} \quad [a=0, b=-2, c=-1]$

2) Lo spin totale può assumere i valori  $S=0,1,2$ . (6)

$$\text{Se } V_0 = \frac{\alpha}{4} \left[ S^2 - \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2) \right] = \frac{\alpha}{4} [S^2 - 2\hbar^2]$$

$$V_0 = \begin{cases} -\hbar^2 \alpha / 2 & S=0 \\ 0 & S=1 \\ \hbar^2 \alpha & S=2 \end{cases}$$

Grafici



Stati legati sono possibili SOLO per  $S=0$ .

3) Nel centro di massa (CM) è sufficiente considerare il moto relativo. Inoltre, dovendo considerare stati legati, dobbiamo porre  $S=0$ . Quindi gli stati legati hanno funzione d'onda

$$\psi_n(x) |0 \ 0\rangle_{S \ S_z}$$

dove  $\psi_n(x)$  sono autofunzioni di  $H = \frac{p^2}{2\mu} + V(x)$  con  $\mu = m/2$  massa ridotta e

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > L \\ -\frac{\hbar^2 \alpha}{2} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{C}{mL^2} = -\frac{\hbar^2}{4\mu L^2} C & -L < x < L \end{cases}$$

Il principio di Pauli richiede che la funzione d'onda totale sia pari sotto scambio. Dato che  $|0 \ 0\rangle$  è pari sotto scambio, anche  $\psi_n(x)$  deve essere pari sotto scambio ( $x \rightarrow -x$ ).

Quindi dobbiamo determinare gli stati legati per una buca finita che sono simmetriche sotto parità.

Se  $V_0 = +\frac{\hbar^2}{4\mu L^2} C$ , l'energia dello stato legato è in  $-V_0 < E < 0$

[NOTA: cambio di convenzione per  $V_0$ ]

Per la soluzione seguiamo il Picasso

Per  $x > L$   $V(x) = 0$  per cui

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \psi'' = E\psi \quad \lambda = \sqrt{-\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$$

$$\psi'' = \lambda^2 \psi \rightarrow \psi = A e^{-\lambda x} + B e^{\lambda x} \rightarrow \text{non accettabile}$$

in  $-L < x < L$ ,  $V(x) = -V_0$  per cui

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \psi'' - V_0 \psi = E\psi \quad k = \sqrt{\frac{2\mu(V_0 + E)}{\hbar^2}}$$

$$\psi'' + k^2 \psi = 0 \quad \psi = \underset{\substack{\text{dispari} \\ \text{sotto } x \rightarrow -x}}{C \sin kx} + \underset{\text{pari}}{D \cos kx}$$

Quindi

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{-\lambda x} & x > L \\ D \cos kx & -L < x < L \\ A e^{\lambda x} & x < -L \end{cases} \quad (\text{per parit\`e})$$

Condizioni di raccordo in  $x = L$

$$\begin{cases} A e^{-\lambda L} = B \cos kL \\ -\lambda A e^{-\lambda L} = B k \sin kL \end{cases} \quad \begin{array}{l} \psi \text{ continua} \\ \psi' \text{ continua} \end{array}$$

Dividendo  $k \tan kL = \lambda$

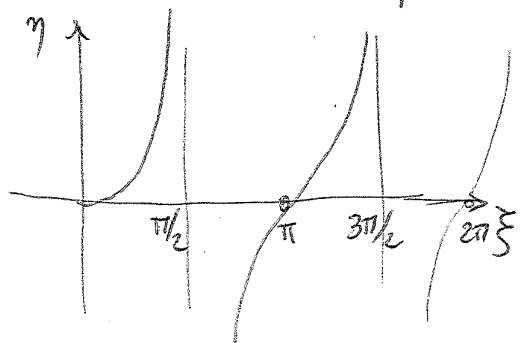
Definiamo  $\eta = L\lambda$ ,  $\xi = kL$  e notiamo

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 &= + \frac{2\mu(V_0 + E)}{\hbar^2} L^2 - \frac{2\mu E}{\hbar^2} L^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} L^2 \\ &= \frac{2\mu}{\hbar^2} L^2 \frac{\hbar^2}{4\mu L^2} C = \frac{C}{2} \end{aligned}$$

Quindi cerchiamo soluzioni di

$$\begin{cases} \eta = \xi \tan \xi \\ \xi^2 + \eta^2 = \frac{C}{2} = R^2 \end{cases} \quad \text{in } \xi, \eta \geq 0$$

Grafico di  $\eta = \xi \tan \xi$



1 stato legato per  $R \leq \pi$   
 2 stati legati per  $\pi \leq R < 2\pi$   
 ecc.

La condizione richiesta è  $R \leq \pi$

$$R' \leq \pi^2$$

$$\frac{C}{2} < \pi^2$$

$$C_{\max} = 2\pi^2$$

NOTA: Per la buca finita, vi è un solo stato legato per  $R < \frac{\pi}{2}$ . Infatti ad  $R = \frac{\pi}{2}$  appare un secondo stato legato. Questo stato legato ha  $\psi(x)$  dispari sotto  $x \leftrightarrow -x$  e non è quindi ammesso per il principio di Pauli.