

ELETTROTECNICA

Principi ed applicazioni di Ingegneria Elettrica

Corso di Laurea in Ingegneria Civile (6 CFU)

Lezione 03 – *Richiami di elettromagnetismo*



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Prof. Alberto Geri

*Dipartimento di Ingegneria Astronautica, Elettrica ed Energetica
Area Ingegneria Elettrica - Via delle Sette Sale n° 12/b, Roma
T 06 44585.534/540 F 06 4883235 alberto.geri@uniroma1.it*

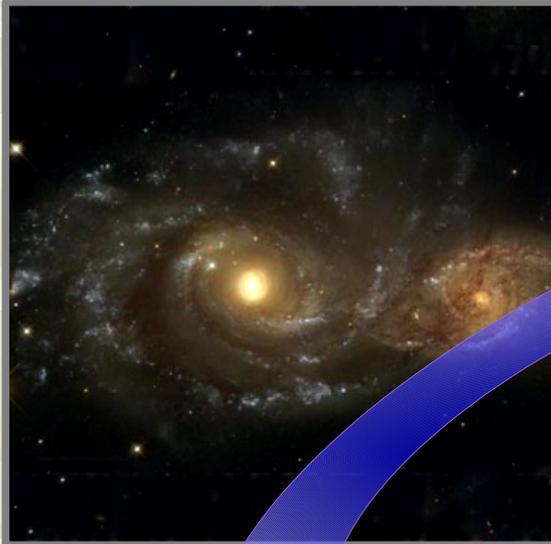
Richiami di elettromagnetismo

- **Interazione elettromagnetica**
 - Il campo elettrico
 - Il campo magnetico
 - Il campo elettromagnetico
- **Equazioni fondamentali**
 - Le equazioni di Maxwell
 - Il completamento del quadro
 - Il teorema di Poynting
- **Classificazione dei campi elettromagnetici**
 - I campi stazionari
 - I campi quasi-stazionari
 - I campi non-stazionari

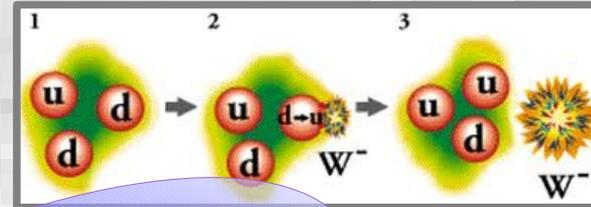
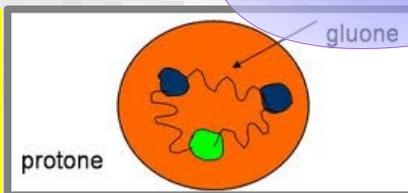


Interazione elettromagnetica

Gravitazionale

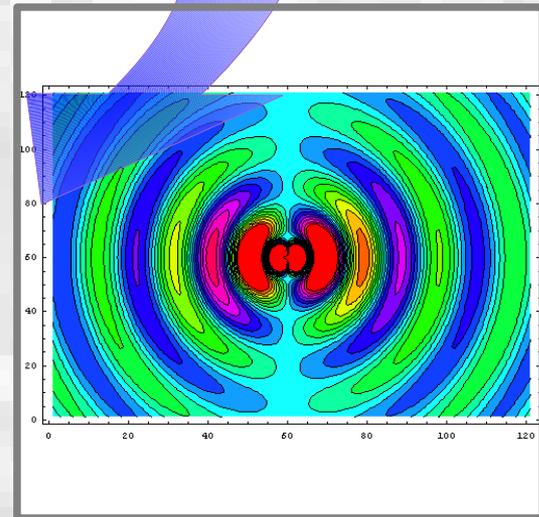


Forte



Debole

Elettromagnetica



Generalità

La struttura dell'universo ed ogni fenomeno fisico che in esso avviene, fino agli scambi di energia fra le particelle subatomiche elementari, sono riconducibili all'azione di **quattro interazioni (forze) fondamentali**:

- ***l'interazione gravitazionale***
 - intensità relativa = 10^0 raggio di azione = ∞
- ***l'interazione elettromagnetica***
 - intensità relativa = 10^{36} raggio di azione = ∞
- ***l'interazione debole***
 - intensità relativa = 10^{25} raggio di azione = 10^{-18} m
- ***l'interazione forte***
 - intensità relativa = 10^{38} raggio di azione = $1.4 \cdot 10^{-15}$ m



Generalità

La struttura dell'universo avviene, fino agli scarichi elementari, sono ricche di (**forze**) fondamentali:

- **l'interazione gravitazionale**
 - intensità relativa = 10^{-38}
- **l'interazione elettromagnetica**
 - intensità relativa = 10^{-2}
- **l'interazione debole**
 - intensità relativa = 10^{-25}
- **l'interazione forte**
 - intensità relativa = 10^{38}

È più opportuno utilizzare la dizione **interazione** in luogo di **forza** (si osservi che per forza la fisica classica intende *la causa delle variazioni di moto o forma di un corpo*, mentre nella fisica delle particelle è intesa come *il presupposto di ogni cambiamento*), in quanto, in ogni fenomeno, sono sempre presenti almeno due 'soggetti': uno che esercita la forza e un altro che la subisce, senza quest'ultimo non si potrebbe 'prendere coscienza' della forza stessa.



Generalità

La struttura dell'universo avviene, fino agli scarichi elementari, sono ricche di (**forze**) fondamentali:

- ***l'interazione gravitazionale***
 - intensità relativa
- ***l'interazione elettromagnetica***
 - intensità relativa
- ***l'interazione debole***
 - intensità relativa
- ***l'interazione forte***
 - intensità relativa

È più opportuno utilizzare la dizione "forze" che "interazioni". In apparenza alcuni tipi d'interazione sembrano richiedere un contatto tra i corpi (e.g., quando spingiamo un oggetto). Altre, invece, sembrano agire senza un contatto diretto (e.g., l'azione esercitata da una calamita sull'ago di una bussola). A livello microscopico si tratta invece sempre di interazioni a distanza: infatti, quando spingiamo un oggetto non c'è alcun contatto diretto tra gli atomi dell'oggetto e quelli della mano, anche se la distanza è talmente piccola che, senza alcuno strumento, i sensi non possono percepirla. In tutti e due i casi, perciò, l'interazione avviene tra le particelle dei corpi stessi.



Generalità

La struttura dell'universo avviene, fino agli scarichi elementari, sono ricche di (**forze**) fondamentali:

- ***l'interazione gravitazionale***
 - intensità relativa
- ***l'interazione elettromagnetica***
 - intensità relativa
- ***l'interazione debole***
 - intensità relativa
- ***l'interazione forte***
 - intensità relativa

È più opportuno utilizzare la dizione "forza" in apparenza alcuni tipi d'interazione. I tratti caratteristici di ogni interazione sono (***l'intensità relativa*** ed il ***raggio d'azione***). *L'intensità relativa* fornisce una misura dei rapporti di forza tra le interazioni di diversa natura rispetto a quella gravitazionale. Il ***raggio d'azione*** di un'interazione è la massima distanza alla quale può influire: l'interazione gravitazionale ha un raggio d'azione infinito; per questo motivo il Sole esercita la sua forza anche su corpi lontanissimi come Plutone, e qualunque atomo dell'universo esercita una forza, seppur minima, su ogni altro atomo dell'universo.

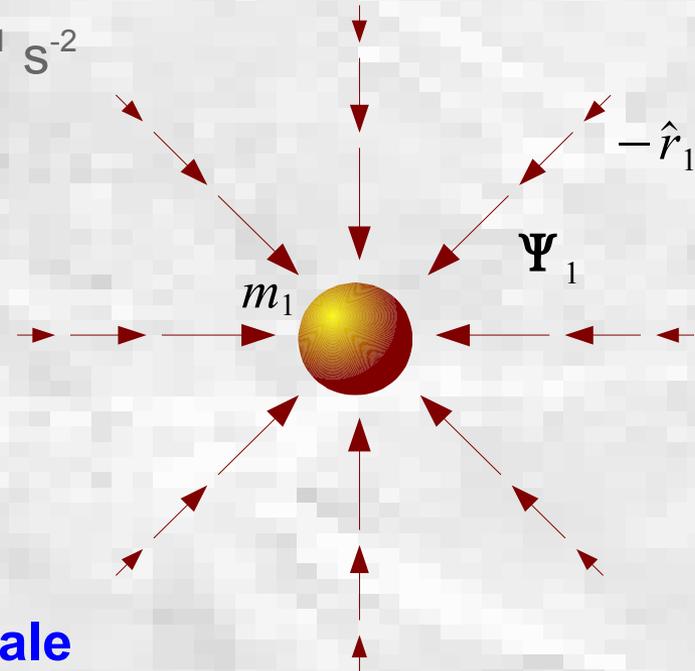
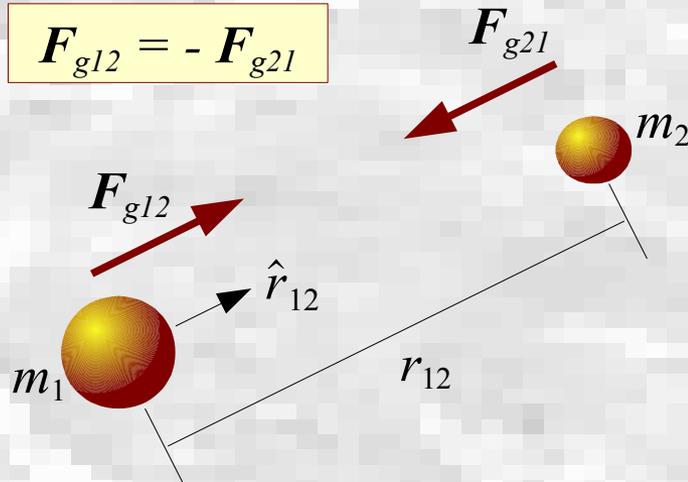


Le quattro interazione fondamentali

Interazione gravitazionale ... il campo gravitazionale

$$G = (6.67428 \pm 0.00067) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$\mathbf{F}_{g12} = -\mathbf{F}_{g21}$$



Legge della gravitazione universale

$$\mathbf{F}_{g21} = -\hat{\mathbf{r}}_{12} \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad (\text{N})$$

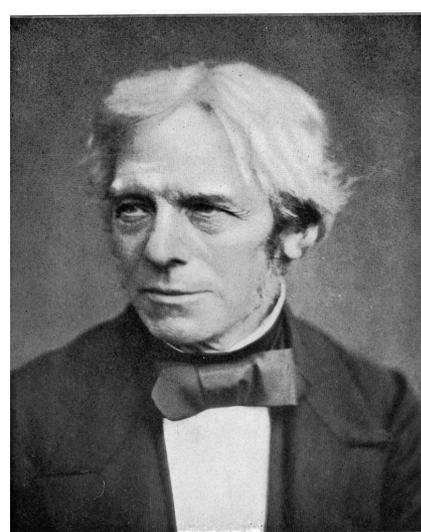
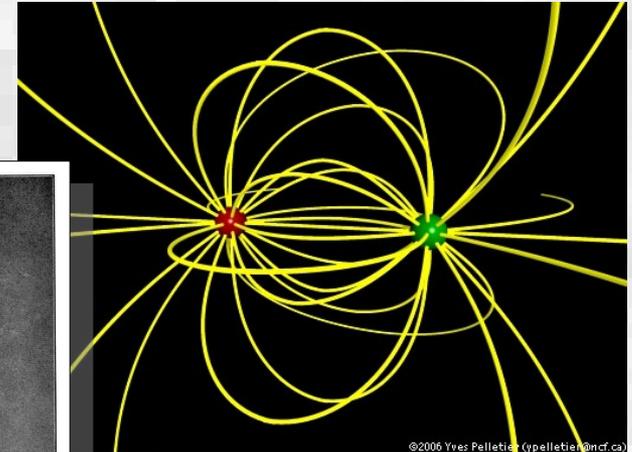
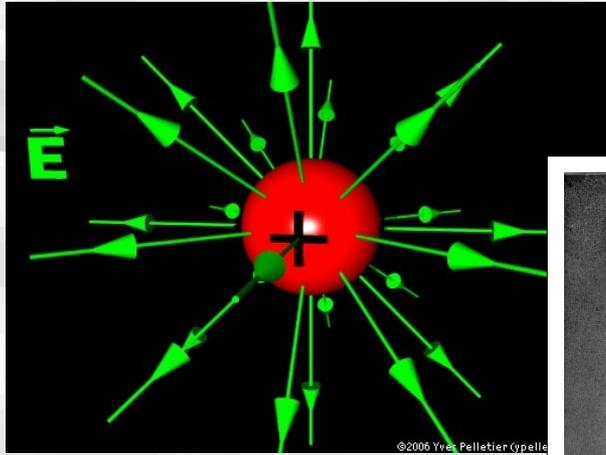
$$\mathbf{F}_{g21} = \Psi_1 m_2 = -\hat{\mathbf{r}}_{12} \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad (\text{N})$$

$$\Psi_1 = -\hat{\mathbf{r}}_1 \frac{G m_1}{r^2} \quad (\text{N kg}^{-1})$$

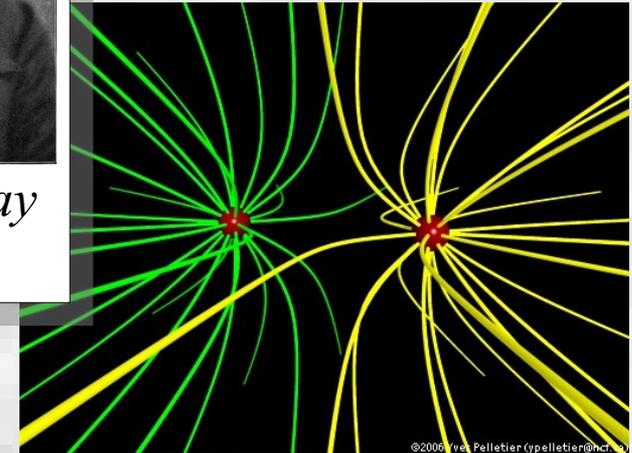
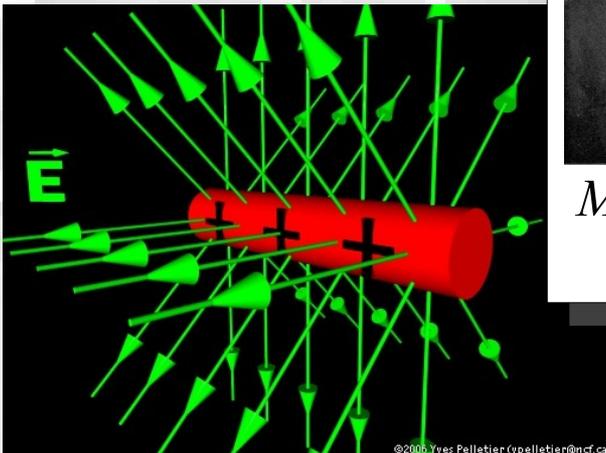
$$\Psi = \frac{\mathbf{F}_g}{m} \quad (\text{N kg}^{-1})$$



Il campo elettrico



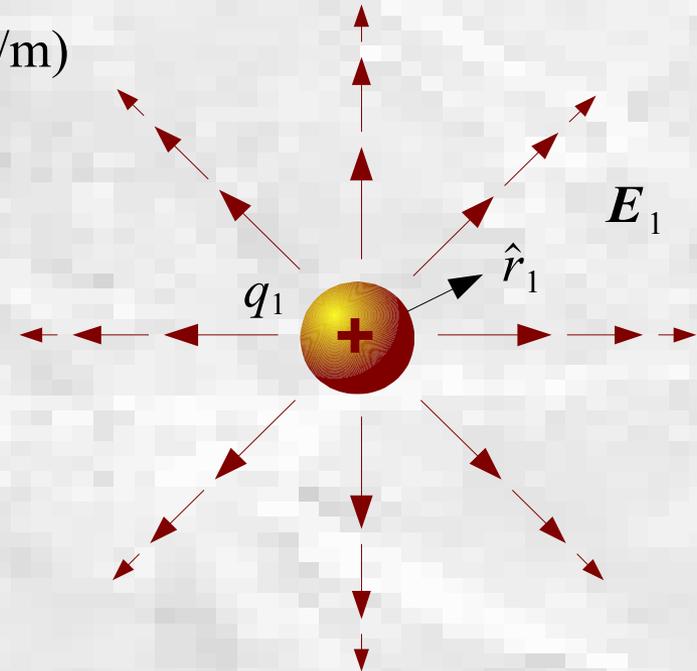
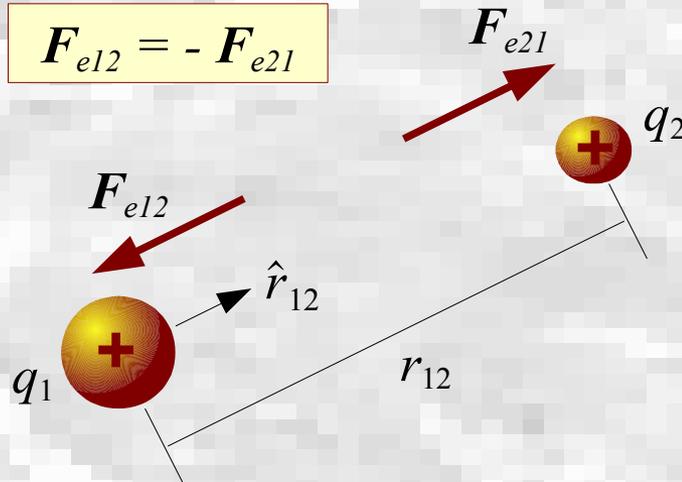
Michael Faraday
(1791-1867)



Il campo elettrico ... nel vuoto

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ (C)} \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ (F/m)}$$

$$\mathbf{F}_{e12} = -\mathbf{F}_{e21}$$



Legge di Coulomb

$$\mathbf{F}_{e21} = \hat{\mathbf{r}}_{12} \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}^2} \quad (\text{N})$$

$$\mathbf{F}_{e21} = \mathbf{E}_1 q_2 = \hat{\mathbf{r}}_{12} \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}^2} \quad (\text{N})$$

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{r}}_1 \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_1^2} \quad (\text{V/m})$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_e}{q} \quad (\text{V/m})$$

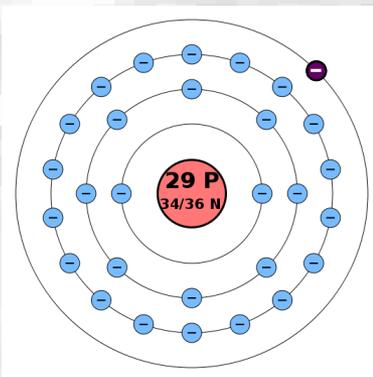


Interazione elettromagnetica

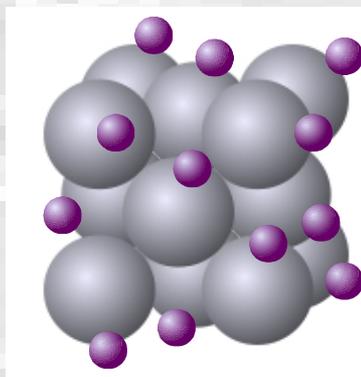
Il campo elettrico ... nei mezzi conduttori

- Nei mezzi conduttori (e.g. nei metalli come il rame, l'argento, l'alluminio, ecc.) gli elettroni più esterni degli atomi che compongono il reticolo cristallino sono liberi di muoversi.
- Nel reticolo cristallino del Cu ci sono circa 10^{23} atomi per cm^3 e quindi altrettanti elettroni liberi (*in moto caotico* 100 km s^{-1}).

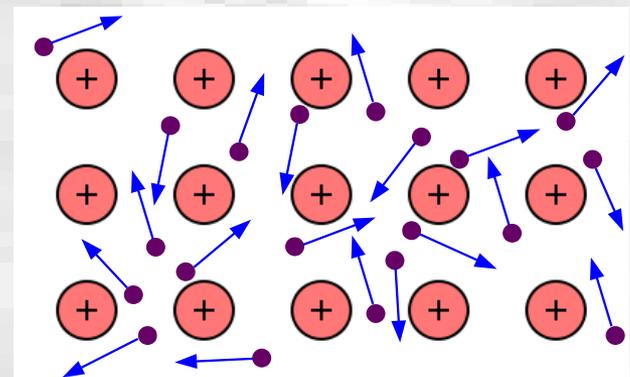
Atomo di Cu
elettrone libero



Reticolo cristallino Cu struttura cubica a facce centrate



Moto caotico della nuvola elettronica nel reticolo cristallino



Interazione elettromagnetica

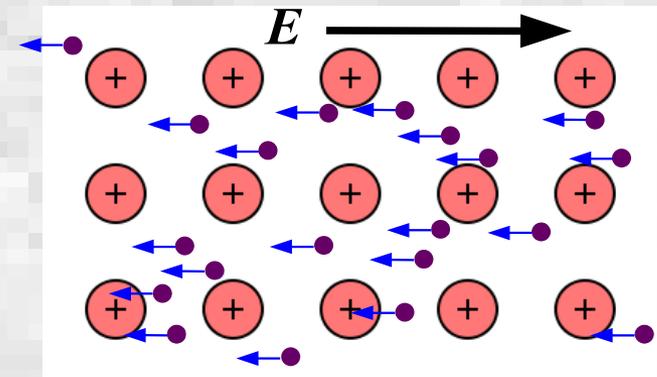
Il campo elettrico ... nei mezzi conduttori (la legge di Ohm)

- Applicando un campo elettrico esterno, E , gli elettroni liberi iniziano a muoversi con un moto ordinato nel verso opposto a quello del campo e con una velocità, in prima approssimazione, direttamente proporzionale al modulo dello stesso $v_e = -\mu_e E$ al moto ordinato degli elettroni rimane associata una densità di corrente elettrica data da

$$J = \rho_e v_e = e n_0 \mu_e E = \sigma E$$

$$\text{con } \mu_e = \frac{e\tau}{m_e} \quad \text{e} \quad \sigma = e n_0 \mu_e \quad (= \rho_e^{-1})$$

Moto ordinato della nuvola elettronica nel reticolo cristallino



Legge di Ohm puntuale

$$J = \sigma E \quad \text{oppure} \quad E = \rho_e J$$

Conduttori perfetti $\rho_e \rightarrow 0$

Dielettrici perfetti $\sigma \rightarrow 0$



Interazione elettromagnetica

Il campo elettrico ... nei mezzi conduttori (la resistività)

- La resistività dei conduttori, a causa dell'agitazione termica degli atomi nel reticolo cristallino varia con la temperatura secondo la legge

$$\rho_T = \rho_{20} (1 + \alpha_{20} (T - 20))$$

METALLO	ρ_{20} ($\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$)	σ_{20} (S m^{-1})	α_{20} ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)
Argento	0.0159÷0.017	(5.9÷6.3) 10^7	3.8 10^{-3}
Rame	0.0170÷0.0178	(5.6÷5.9) 10^7	3.9 10^{-3}
Alluminio	0.028÷0.03	(3.3÷3.6) 10^7	3.7 10^{-3}
Zinco	0.063	1.6 10^7	3.7 10^{-3}
Ottone	0.07÷0.09	(1.1÷1.4) 10^7	1.5 10^{-3}
Ferro	0.09÷0.15	(0.6÷1.1) 10^7	4.5 10^{-3}



Interazione elettromagnetica

Il campo elettrico ... nei mezzi conduttori (la resistività)

- A titolo indicativo sono di seguito riportate le resistività e permittività a 50-100 Hz di alcuni terreni e la conducibilità di alcuni materiali isolanti comunemente impiegati

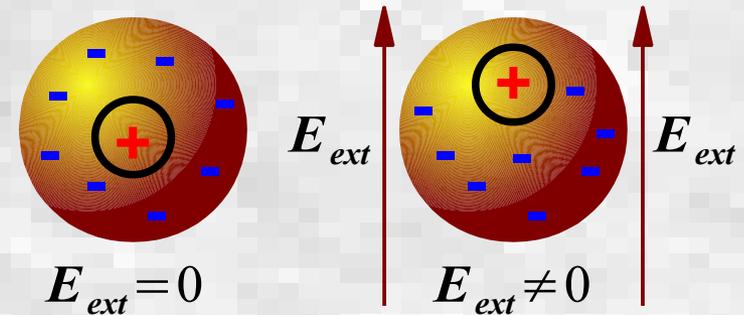
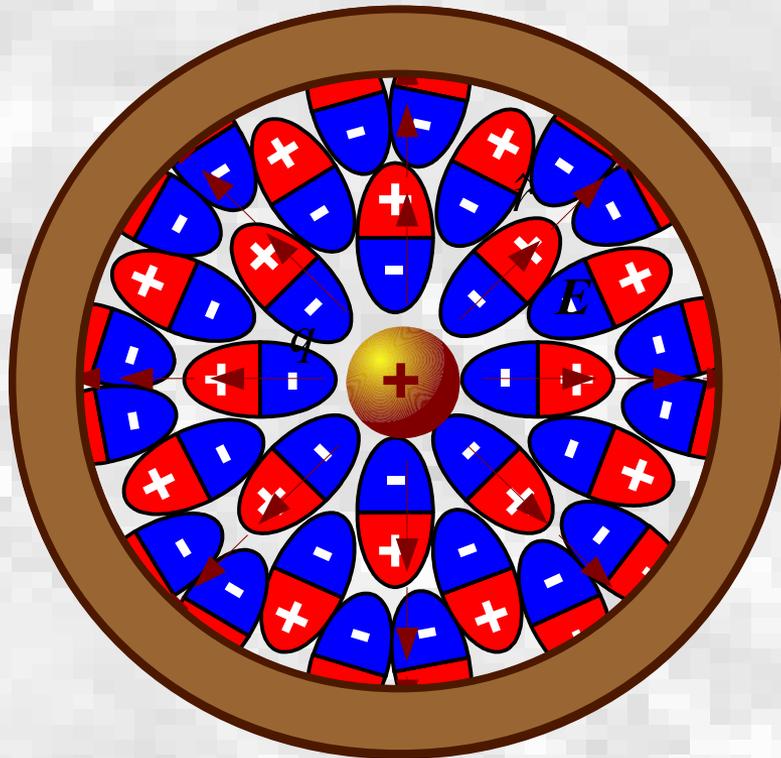
TERRENI			ISOLANTI	
MATERIALE	ρ_t (Ω m)	ϵ_r	MATERIALE	σ (S m ⁻¹)
Caolite	5÷20	67	Vetro	$10^{-14} \div 10^{-11}$
Argillite	35÷350	105	Porcellana	$10^{-13} \div 10^{-12}$
Calcare	100÷1000	92	Ebanite	$10^{-16} \div 10^{-13}$
Scisto	100÷500	86	Mica	$10^{-13} \div 10^{-11}$
Talco	350÷3500	279	Quarzo	10^{-17}
Granito	$1000 \div 10^{10}$	75	Olio per TR	$10^{-11} \div 10^{-10}$



Interazione elettromagnetica

Il campo elettrico ... nei mezzi dielettrici

Polarizzazione, P , dei mezzi dielettrici (i.e. isolanti, $\sigma = 0$) per deformazione ed allineamento dovute ad un E_{ext} .



$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_{ext} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_{ext} = \\ &= \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}_{ext} \quad (\text{C m}^{-2}) \end{aligned}$$

Suscettività elettrica χ_e (mezzo lineare, isotropo, omogeneo)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = (1 + \chi_e)$$

Relazione costitutiva dei mezzi dielettrici

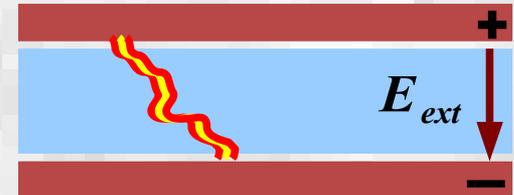
$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$$



Interazione elettromagnetica

Il campo elettrico ... nei mezzi dielettrici (il breakdown)

- Se il campo elettrico supera la **rigidità dielettrica** dell'isolante si ha una **scarica disruptiva (breakdown)**.

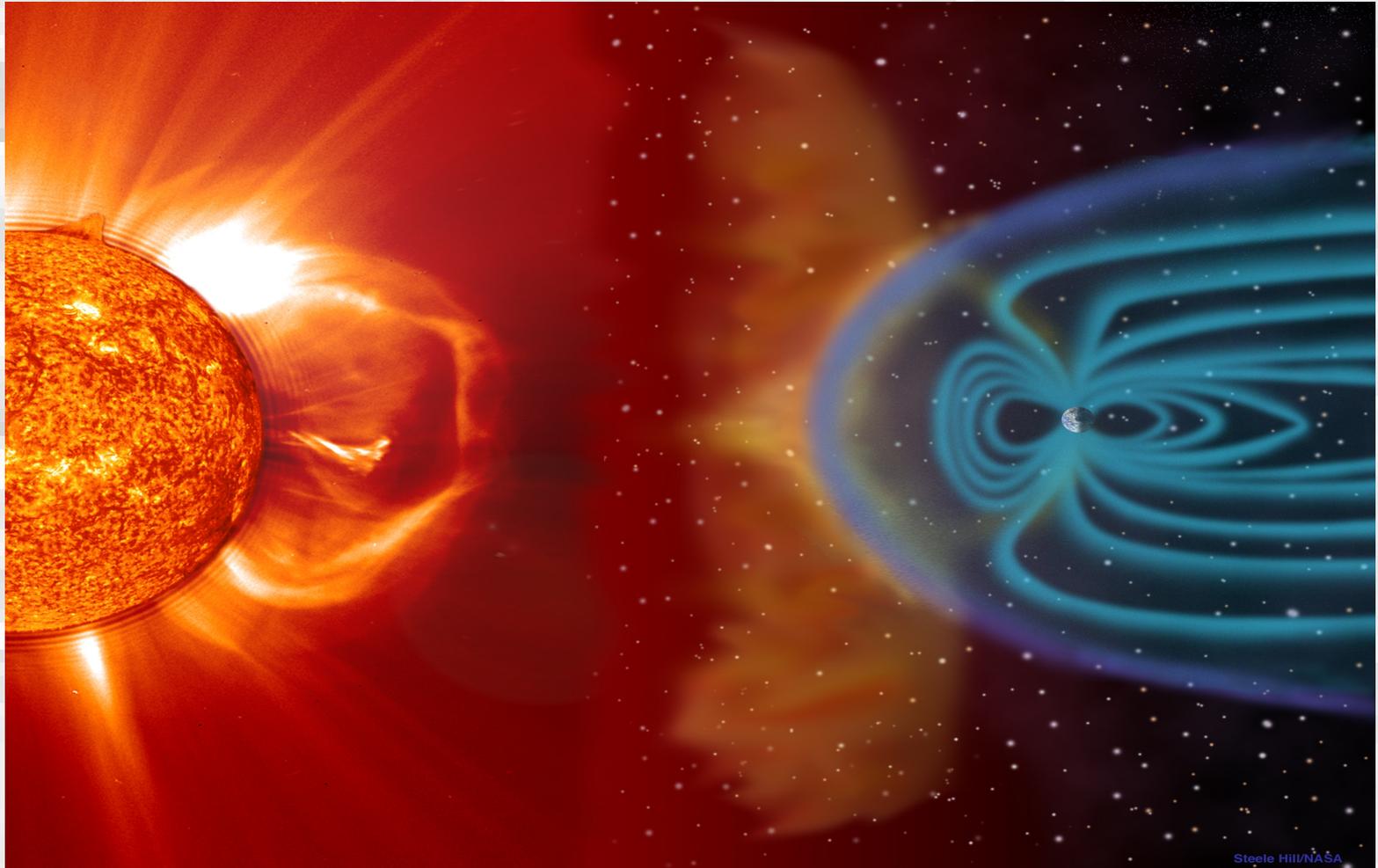


MATERIALE	ϵ_r	E_{cr} kV/cm	MATERIALE	ϵ_r	E_{cr} kV/cm
Aria	1	30	Porcellana	4,5÷6,5	200÷380
Acqua	81	50÷100	Nylon	4,5	200
Olio	2÷2,5	120÷180	Mica	5÷7	400÷2000
Carta imp.	3÷4	350÷450	Silicone	2,8	250÷300
Cartone	3÷5	100	Polistirolo	2,4÷2,8	500÷700
Ebanite	2÷3	100÷200	Plexiglass	3	400
Bachelite	5÷7	100÷300	Teflon	2	500
Vetro	4,5÷10	100÷400	SF6	1	60÷90



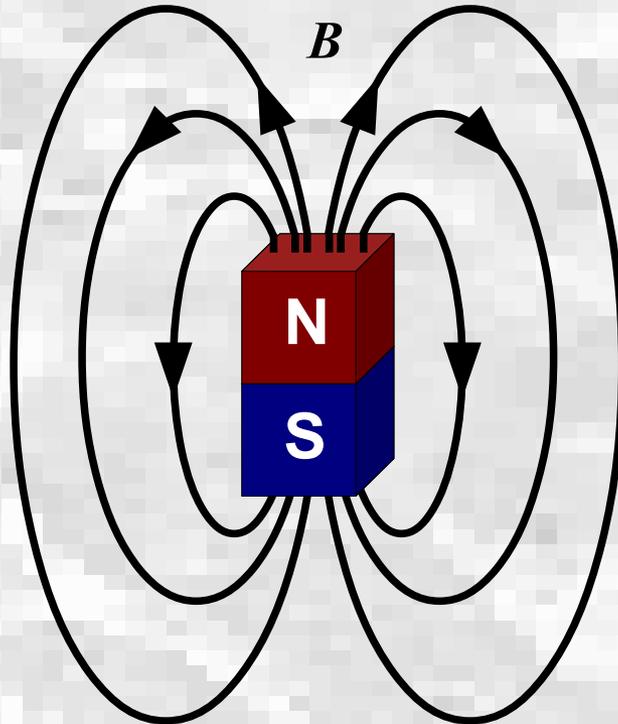
Interazione elettromagnetica

Il campo magnetico

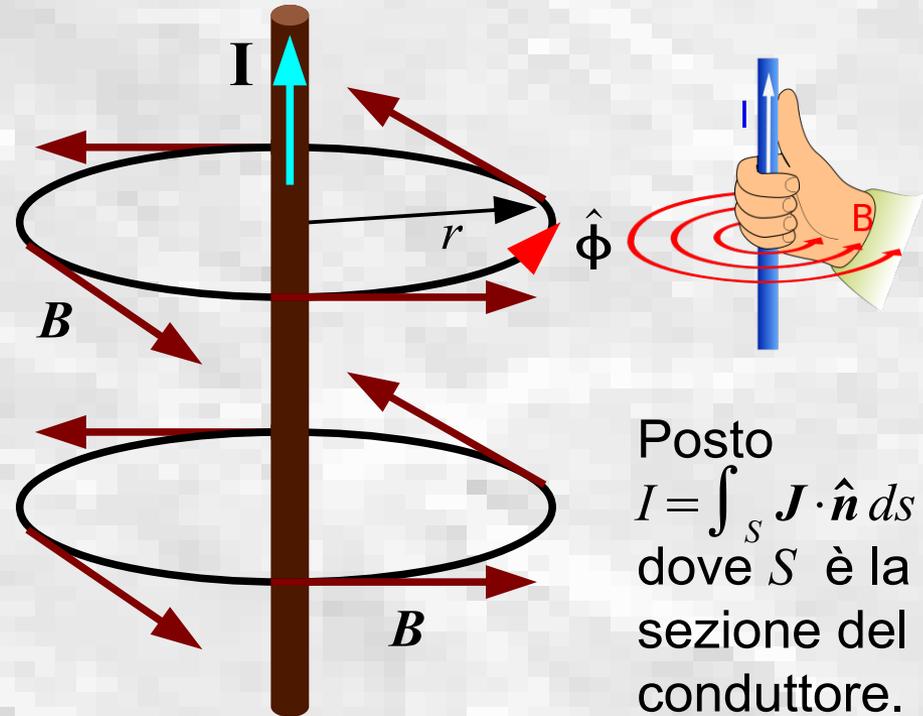


Interazione elettromagnetica

Il campo magnetico ... nel vuoto



Contrariamente alle cariche elettriche, i poli magnetici non possono esistere separatamente.



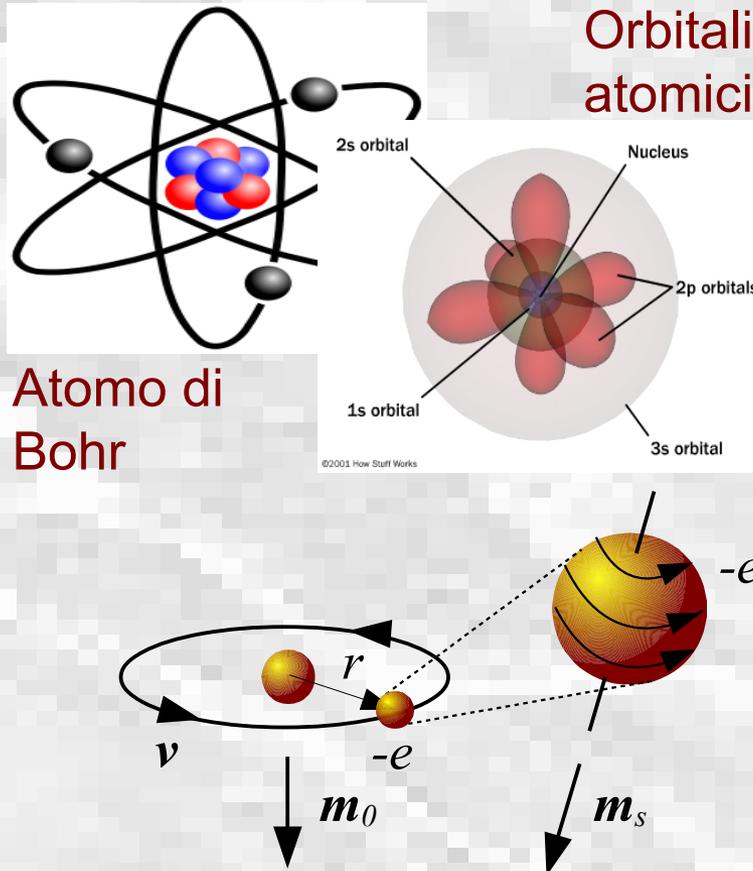
Posto
$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$$
dove S è la sezione del conduttore.

Legge di Biot-Savart
$$\mathbf{B} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{T})$$



Interazione elettromagnetica

Il campo magnetico ... nei mezzi magnetici



Polarizzazione magnetica, M , dei mezzi materiali per interazione con un campo magnetico esterno H_{ext} .

$$B = \mu_0 H_{ext} + M = \mu_0 H_{ext} + \mu_0 \chi_m H_{ext} = \mu_0 (1 + \chi_m) H_{ext} = \mu H_{ext} \quad (\text{T})$$

Suscettività magnetica χ_m (mezzo lineare, isotropo, omogeneo)

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = (1 + \chi_m)$$

$$\mu_r \approx 1 \quad (\chi_m < 0) \quad \text{m. diamagnetici}$$

$$\mu_r \approx 1 \quad (\chi_m > 0) \quad \text{m. paramagnetici}$$

Relazione costitutiva dei mezzi magnetici

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$$



Interazione elettromagnetica

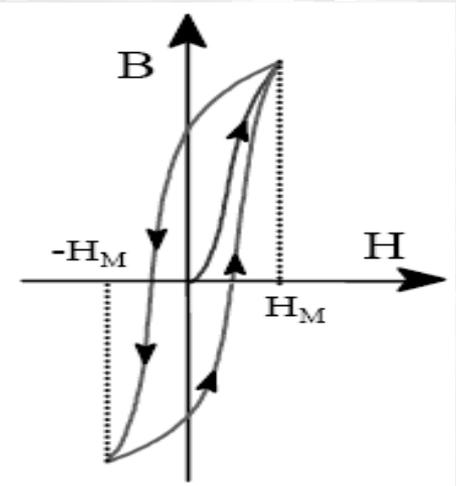
Il campo magnetico ... nei mezzi magnetici

Nei mezzi ferromagnetici $B = f(H)$ essendo

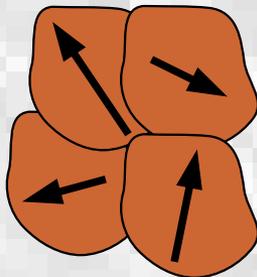
$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{dM}{dH} \right) = \mu_0 \underbrace{\left(1 + \chi_m(H) \right)}_{\mu_r \gg 1}$$

Polarizzazione magnetica, M , nei mezzi ferromagnetici per allineamento dei **domini di Weiss** (aggregazioni - $10^{-3} \div 10^{-6}$ m - di atomi o molecole con un momento magnetico proprio) dovuto all'azione di un campo magnetico esterno H_{ext} .

CICLO DI ISTERESI



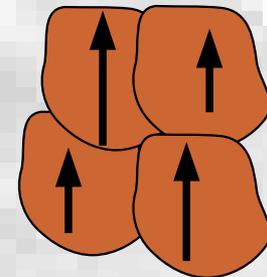
Stato nativo



Magnetizzazione dei domini di Weiss



H_{ext}



Magnetizzato



Il campo elettrico, il campo magnetico e la forza di Lorentz

- Del *campo elettrico* e del *campo magnetico* si può dare una **definizione operativa** attraverso la **forza di Lorentz**, che è la *forza risultante* $F(\mathbf{r},t)$ che agisce su una *carica puntiforme* q in moto con *velocità* $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, rispetto al sistema di riferimento inerziale dell'osservatore, quando passa, per un generico punto $P(\mathbf{r})$ all'istante di tempo t , cioè

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{v}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t))$$

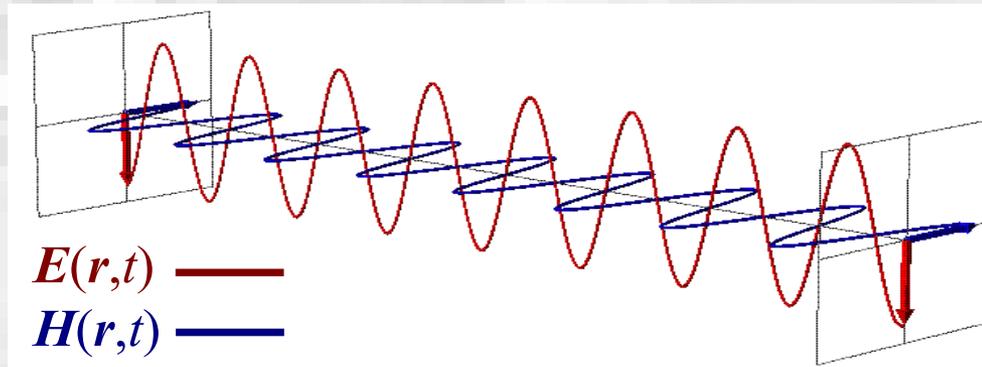
- Per misurare $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ basta mantenere la carica q ferma nel punto $P(\mathbf{r})$ e misurare la forza $\mathbf{F}_0(\mathbf{r},t)$ che agisce, in queste condizioni, su q . Il rapporto $\mathbf{F}_0(\mathbf{r},t) / q$ fornisce $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$.
- Per misurare $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, una volta misurato $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, si attribuisca a q dapprima una velocità $\mathbf{v}_1(\mathbf{r},t)$, e si misuri la forza $\mathbf{F}_1(\mathbf{r},t)$ che, in queste condizioni, si esercita su q , e poi una velocità $\mathbf{v}_2(\mathbf{r},t)$ non parallela a $\mathbf{v}_1(\mathbf{r},t)$ e si misuri $\mathbf{F}_2(\mathbf{r},t)$; con $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ nell'ipotesi che, nell'intervallo di tempo della misura, non cambino significativamente.



Interazione elettromagnetica

Il campo elettromagnetico

Nel 1873 **James Clerk Maxwell** (1831-1879) pubblicò "A Treatise on Electricity and Magnetism" dove per la prima volta apparve quel sistema di quattro equazioni, che oggi porta il suo nome, ed attraverso il quale descrisse la **propagazione delle onde elettromagnetiche**. La formulazione moderna delle equazioni di Maxwell è dovuta al fisico matematico **Oliver Hevside**, e costituisce il nucleo fondamentale delle equazioni che descrivono l'**interazione elettromagnetica**.



L'esistenza di queste onde fu poi dimostrata sperimentalmente per la prima volta da **Heinrich Rudolf Hertz** nel 1887.



Il campo elettromagnetico

- Il **campo elettromagnetico (e.m.)** è, in generale, un campo *tensoriale* responsabile dell'*interazione elettromagnetica*. Il campo è generato nello spazio dalla presenza di cariche elettriche fisse e/o in movimento, ma può manifestarsi anche *in assenza* di esse, trattandosi di un'**entità fisica che può essere definita indipendentemente dalle sorgenti che lo hanno prodotto**.
- Il *campo elettromagnetico* può agire (e quindi anche propagarsi) sia nel vuoto che nei mezzi materiali.
- Il *campo elettromagnetico* è dato dalla combinazione del *campo elettrico* e del *campo magnetico*, ed è classicamente descritto e caratterizzato attraverso la **forza di Lorentz** e le **equazioni di Maxwell**.



Il campo elettromagnetico

- Il **campo elettromagnetico** è descritto attraverso:
 - il campo elettrico $E(\mathbf{r}, t)$ (V m^{-1})
 - il campo magnetico $H(\mathbf{r}, t)$ (A m^{-1})
 - l'induzione elettrica $D(\mathbf{r}, t)$ (C m^{-2})
 - l'induzione magnetica $B(\mathbf{r}, t)$ (Wb m^{-2} op. T)
- Le **sorgenti** di campo sono:
 - la densità di carica elettrica $\rho(\mathbf{r}, t)$ (C m^{-3})
 - la densità di corrente elettrica $J(\mathbf{r}, t)$ (A m^{-2})
- La soluzione di molti problemi è descritta attraverso l'introduzione di **potenziali elettromagnetici**:
 - il potenziale vettore magnetico $A(\mathbf{r}, t)$ (Wb m^{-1})
 - i potenziali scalari elettrico $V(\mathbf{r})$ (V) e magnetico $\varphi(\mathbf{r})$ (A)



Il campo elettromagnetico

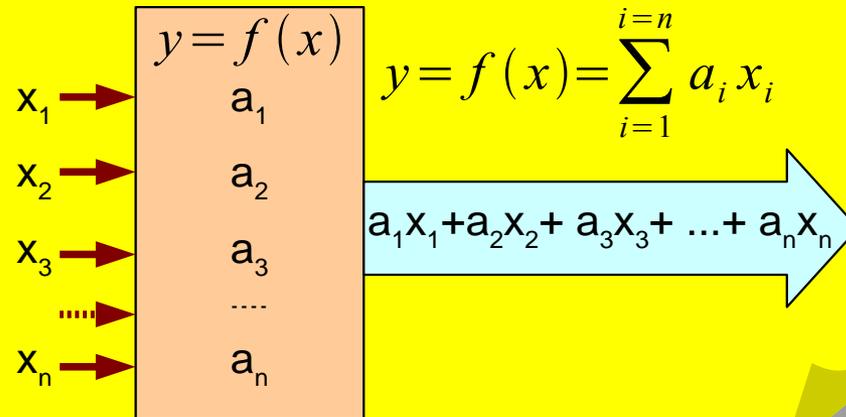
- Il **mezzo vuoto** ed i **mezzi materiali** su cui un campo elettromagnetico può agire sono caratterizzati dai seguenti parametri costitutivi:
 - ε , permittività dielettrica $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ (F m}^{-1}\text{)}$
 - μ , permeabilità magnetica $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ (H m}^{-1}\text{)}$
 - σ , conducibilità elettrica ($\rho = \sigma^{-1}$, resistività elettrica) $\sigma_0 = 0 \text{ (}\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}\text{)}$
- Un mezzo è detto **omogeneo** se i suoi parametri costitutivi *non variano da punto a punto*, è detto **isotropo** se i suoi parametri costitutivi *sono indipendenti dalla direzione*, ed è detto **lineare** se per esso vale il *principio di sovrapposizione degli effetti* (ovvero, il legame causa effetto è una costante).
- Salvo diversa specificazione si farà sempre riferimento a mezzi *lineari, isotropi ed omogenei*.



Il campo elettromagnetico

- Il mezzo vuoto ed i mezzi materiali su cui un campo elettromagnetico può propagarsi sono caratterizzati da parametri costitutivi:
 - ϵ , permittività dielettrica
 - μ , permeabilità magnetica
 - σ , conducibilità elettrica
- Un mezzo è detto **lineare** se per esso i parametri costitutivi non variano da punto a punto e gli effetti (ovvero, i campi) sono proporzionali alle cause (ovvero, ai campi applicati).
- Salvo diversa specificazione si farà sempre riferimento a mezzi *lineari, isotropi ed omogenei*.

Principio di sovrapposizione degli effetti:
“Alla combinazione lineare delle cause, secondo assegnati coefficienti, corrisponde la combinazione lineare degli effetti secondo gli stessi coefficienti”.

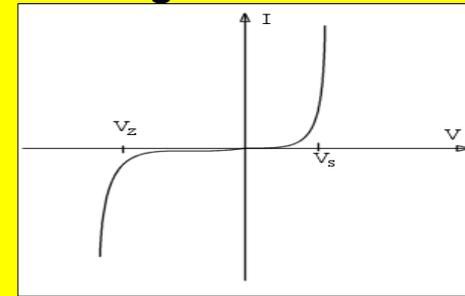
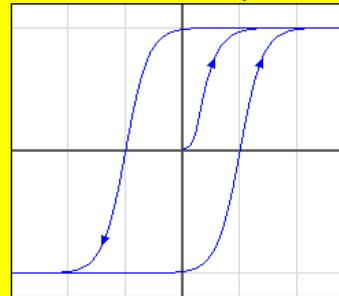


Il campo elettromagnetico

- Il mezzo vuoto ed i mezzi materiali su cui un campo elettromagnetico può propagarsi sono caratterizzati da parametri costitutivi:
 - ϵ , permittività dielettrica
 - μ , permeabilità magnetica
 - σ , conducibilità elettrica
- Un mezzo è detto **lineare** se per ogni valore del campo di ingresso, i parametri costitutivi **non variano da punto a punto** e **degli effetti** (ovvero, se per ogni valore del campo di ingresso, i parametri costitutivi sono **valori costanti**).
- Salvo diversa specificazione, si considerano mezzi **lineari, isotropi ed omogenei**.

Principio di sovrapposizione degli effetti:

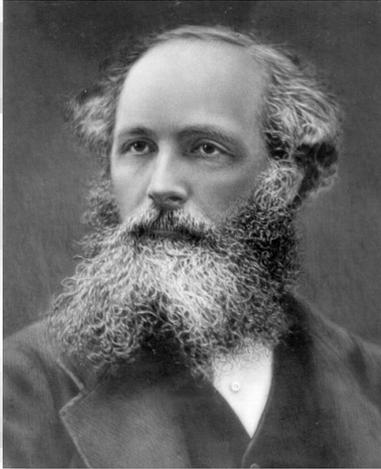
“Tranne il vuoto, nessun mezzo è lineare per qualunque valore del campo di ingresso, ma si possono presentare fenomeni quali **saturazione, isteresi e soglia**.”



Spesso, per piccoli valori dei campi in ingresso si può ritenere la risposta del mezzo lineare, e quindi assumere, per i parametri costitutivi dei **valori costanti**.



Le equazioni fondamentali



Le equazioni di Maxwell

- **Legge di Gauss per il campo elettrico** (1^a equazione)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \oiint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \iiint_V \rho \, dv = Q$$

- **Legge di Gauss per il campo magnetico** (2^a equazione)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0$$

- **Legge di Faraday (-Neumann-Lenz)** (3^a equazione)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \oint_L \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds \quad e = -\frac{d\phi}{dt}$$

- **Legge di Ampere-Maxwell** (4^a equazione)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \oint_L \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$$



Le equazioni di Maxwell

- Legge di Gauss per il campo elettrico

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\oiint_S$$

- Legge di Gauss per il campo magnetico

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oiint_S$$

- Legge di Faraday (-Neumann)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint_L$$

- Legge di Ampere-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\oint_L$$

Il passaggio dalla formulazione **differenziale** (o *locale*) a quella **integrale** è possibile mediante il **teorema della divergenza** (o **di Gauss**) ed il **teorema della circuitazione** (o **di Stokes**).

Le quattro equazioni di Maxwell non sono fra loro indipendenti, ma la 1^a e la 2^a equazione si **deducono** rispettivamente dalla 4^a e dalla 3^a equazione.



Le equazioni di Maxwell ... prima equazione

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \iiint_V \rho \, dv = Q$$

- La prima equazione (i.e. **legge di Gauss** per il campo elettrico) afferma che il flusso dell'induzione elettrica, \mathbf{D} , attraverso una superficie chiusa, S , è proporzionale alla carica totale, $Q(t)$, contenuta nel volume, V , racchiuso dalla medesima superficie, S .
- Ciò significa che il campo elettrico si origina da sorgenti e termina in pozzi (ovvero le linee di forza del campo escono dalle cariche elettriche positive ed entrano in quelle negative). La *legge di Gauss* vale sia per i campi elettrostatici (cariche elettriche ferme e tempo-invarianti) che, più in generale, per i campi elettrici variabili nel tempo.



Le equazioni di Maxwell ... seconda equazione

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0$$

- La seconda equazione (i.e. **legge di Gauss** per il campo magnetico) afferma che il flusso dell'induzione magnetica, \mathbf{B} , attraverso una superficie chiusa, S , è sempre nullo.
- Ciò significa che le linee di campo dell'induzione magnetica non hanno né inizio né fine, sono quindi delle linee chiuse (ovvero iniziano e finiscono all'infinito). Il campo magnetico, contrariamente al campo elettrico, non ha origine da sorgenti né termina in pozzi. Anche questa equazione vale sia in condizioni stazionarie che in presenza di campi temporvarianti. In forma differenziale esprime la solenoidalità del campo magnetico.



Le equazioni di Maxwell ... terza equazione

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \oint_L \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds \quad e = -\frac{d\phi}{dt}$$

- La terza equazione (i.e. **legge di Faraday**) stabilisce che la circuitazione del campo elettrico, \mathbf{E} , ovvero l'integrale lungo una linea chiusa, L , è proporzionale alla derivata rispetto al tempo del flusso dell'induzione magnetica, \mathbf{B} , attraverso una qualunque superficie, S , che ha per contorno la medesima linea chiusa.
- Quindi, mentre in condizioni stazionarie il campo elettrico, $\mathbf{E}(r)$ (*campo elettrostatico*), è conservativo, **in condizioni dinamiche il campo elettrico non è più conservativo, e può essere generato anche da un campo magnetico variabile nel tempo.**



Le equazioni di Maxwell ... quarta equazione

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \oint_L \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$$

- La quarta equazione (i.e. **legge di Ampère-Maxwell**) afferma che la circuitazione del campo magnetico, \mathbf{H} , lungo una linea chiusa, L , è pari alla corrente totale concatenata con la medesima linea chiusa.
- La corrente totale è la somma di due termini: il primo termine, corrisponde alla corrente di conduzione; il secondo termine corrisponde invece alla corrente di spostamento, ovvero alla derivata temporale del flusso del campo elettrico attraverso la superficie S che ha per contorno la curva L considerata la cui divergenza è identicamente nulla.

$$i_c = \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds \quad \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$



Le equazioni di Maxwell ... quarta equazione

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \oint_L \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$$

- La quarta equazione (i.e. **legge di Ampère-Maxwell**) afferma che la circuitazione del campo magnetico \mathbf{H} lungo una linea chiusa L è uguale alla somma delle correnti di conduzione \mathbf{J} e di spostamento $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ che attraversano la superficie S delimitata da L .
Pertanto, mentre in condizioni stazionarie il campo magnetico \mathbf{H} può essere generato da correnti elettriche (stazionarie), in condizioni dinamiche il campo magnetico può essere generato oltre che da correnti di conduzione tempo varianti anche da un campo elettrico variabile nel tempo.

In condizioni dinamiche, campo elettrico e campo magnetico sono quindi interdipendenti e si possono autosostenere anche nel “vuoto”.

$$i_c = \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds \qquad \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$



Il completamento del quadro ... le equazioni

- Completano il quadro delle **equazioni fondamentali** dell'elettromagnetismo

- le **relazioni costitutive**

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (\text{per i mezzi dielettrici})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (\text{per i mezzi magnetici})$$

- la **legge di Ohm in forma puntuale**

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_s) = \sigma \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E}_s \quad (= \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s)$$

- l'**equazione di continuità (conservazione della carica)**

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \oiint_s \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_v \rho dv = -\frac{dQ}{dt} = i$$

- la **forza di Lorentz**

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$



Le equazioni fondamentali

Il completamento del quadro ... le equazioni

- Completano il quadro delle **equazioni fondamentali** dell'elettromagnetismo

- le **relazioni costitutive**

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (\text{per i mezzi dielettrici})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (\text{per i mezzi magnetici})$$

- la **legge di Ohm in forma puntuale**

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- l'**equazione di continuità** (o legge di conservazione della carica elettrica)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

- la **forza di Lorentz**

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

Si osservi che pur essendo antecedente, l'**equazione di continuità** (o **legge della conservazione della carica elettrica**) può essere vista come una conseguenza diretta delle **equazioni di Maxwell**, in particolare della 4^a e della 1^a equazione.



Il completamento del quadro ... le condizioni all'interfaccia

- L'integrazione del set di equazioni fondamentali richiede che siano soddisfatte le condizioni all'interfaccia delle componenti tangenziali e normali del campo elettrico e magnetico.

Componenti	Forma generale	$\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$	$\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2 = \infty$
Tangenziale di E	$\hat{n} \times (E_1 - E_2) = 0$	$E_{1t} = E_{2t}$	$E_{1t} = E_{2t} = 0$
Normale di D	$\hat{n} \cdot (D_1 - D_2) = \rho_s$	$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$	$D_{1n} = \rho_s$ $D_{2n} = 0$
Tangenziale di H	$\hat{n} \times (H_1 - H_2) = J_s$	$H_{1t} = H_{2t}$	$H_{1t} = J_s$ $H_{2t} = 0$
Normale di B	$\hat{n} \cdot (B_1 - B_2) = 0$	$B_{1n} = B_{2n}$	$B_{1n} = B_{2n} = 0$

Note: (1) ρ_s è la densità di carica superficiale all'interfaccia; (2) J_s è la densità di corrente superficiale all'interfaccia; (3) \hat{n} componente normale all'interfaccia uscente dal mezzo 2 verso il mezzo 1; (4) $E_{1t} = E_{2t}$ implica che siano uguali le ampiezze e parallele le direzioni; (5) la direzione di J_s è ortogonale a $(H_1 - H_2)$.



Il teorema di Poynting

- Il teorema di Poynting descrive il **bilancio energetico fondamentale** dei fenomeni elettromagnetici fornendo un'espressione che descrive la conservazione dell'energia nei sistemi elettromagnetici. Analiticamente si deduce dalla 3^a dalla 4^a equazione di Maxwell. Con riferimento al volume finito V delimitato da una superficie chiusa S questo bilancio è esprimibile come

$$\iiint_V \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{J} dv = \iiint_V \rho J^2 dv + \iiint_V \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv + \iint_S \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

essendo $\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ il **vettore di Poynting**, dimensionalmente omogeneo a $[W m^{-2}]$



Il teorema di Poynting

... l'interpretazione fisica dell'equazione integrale a cui si è pervenuti (**equazione di Poynting**) costituisce il **teorema di Poynting** che stabilisce il seguente bilancio energetico

$$P_{gen}(t) = P_{dis}(t) + P_{em}(t) + P_{usc}(t)$$

ed i cui singoli addendi hanno il significato di seguito descritto

— $P_{gen}(t) = \iiint_V \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{J} dv$ **potenza generata** dalle sorgenti presenti nel volume V ed associata alla trasformazione di energia di altra natura in energia elettrica, $P_{gen}(t) > 0$, o alla trasformazione inversa, $P_{gen}(t) < 0$;

— $P_{dis}(t) = \iiint_V \rho J^2 dv$ **potenza dissipata** per effetto Joule nel volume V ed associata a trasformazioni irreversibili di potenza elettrica (e.g. in potenza termica);...



Il teorema di Poynting

... l'interpretazione fisica dell'equazione integrale a cui si è pervenuti (**equazione di Poynting**) costituisce il **teorema di Poynting** che stabilisce il seguente bilancio energetico:

$$P_{gen}(t) = \iiint_V \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{J} dv$$

ed i cui singoli addendi sono:

$$- P_{gen}(t) = \iiint_V \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{J} dv$$

presenti nel volume V (potenza generata);
energia di altre sorgenti (potenza dissipata);
alla trasformazione in altre forme di energia (potenza dissipata).

$$- P_{dis}(t) = \iiint_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_s dv$$

Joule nel volume V (potenza dissipata);
irreversibili di potenza elettrica (e.g. in potenza termica);...

Moltiplicando la *forza di Lorentz specifica* $\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E}_s + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ che il campo esercita sulle cariche elettriche, aventi densità ρ , per la velocità di spostamento \mathbf{v} delle cariche

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \rho(\mathbf{E}_s + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E}_s \cdot (\rho \mathbf{v}) + 0 = \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{J}$$

si ottiene il lavoro compiuto nell'unità di tempo e nell'unità di volume dal campo; ovvero, integrando nel volume V , si ottiene *la potenza erogata dalle sorgenti*

$$P_{gen}(t) = \iiint_V \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{J} dv$$



Il teorema di Poynting

... —
$$P_{em}(t) = \iiint_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dv$$
 potenza assorbita

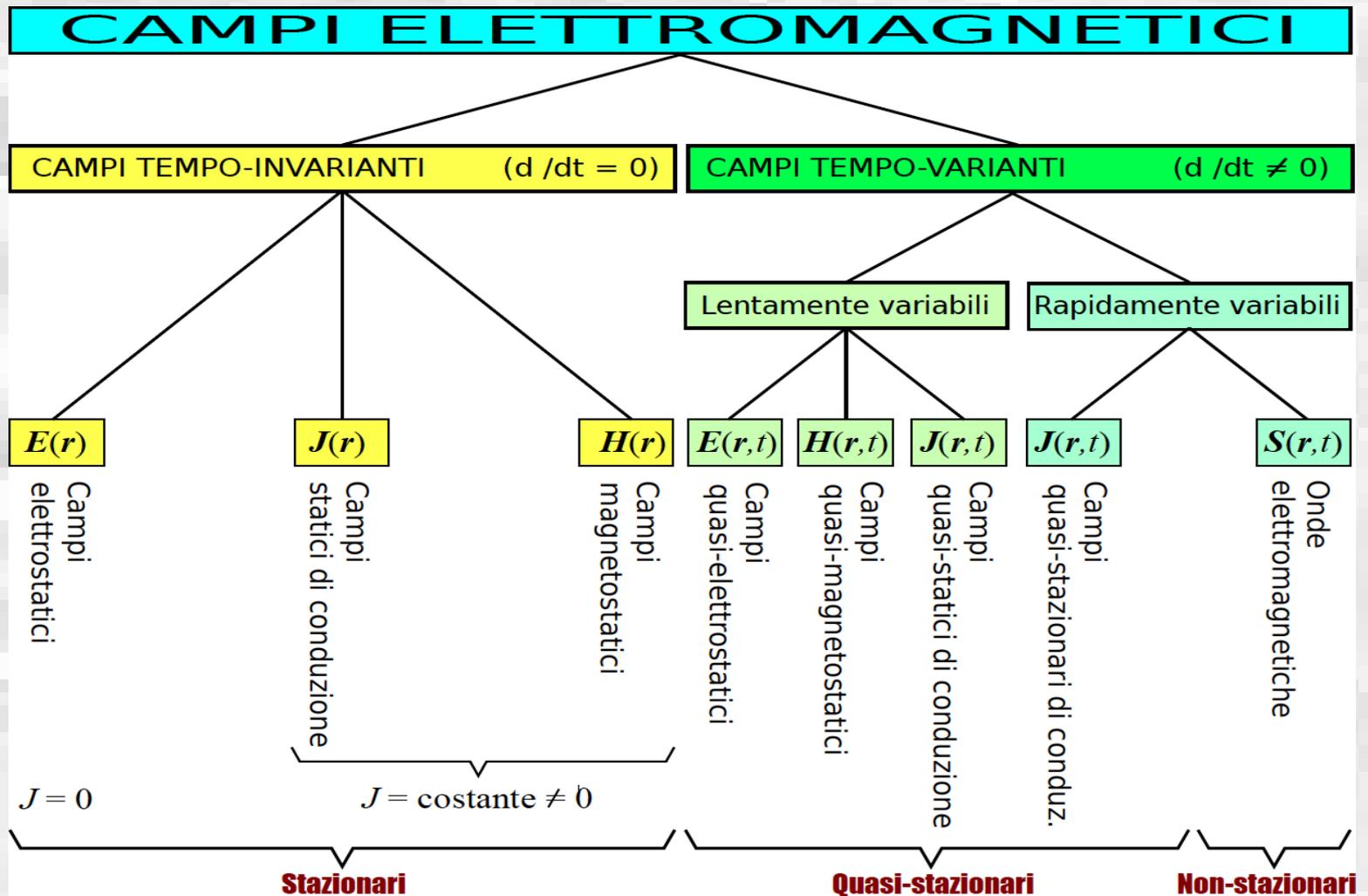
dal campo elettromagnetico nel volume V ; introdotte le relazioni costitutive, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, questa potenza può anche essere scritta come

$$P_{em}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dv$$

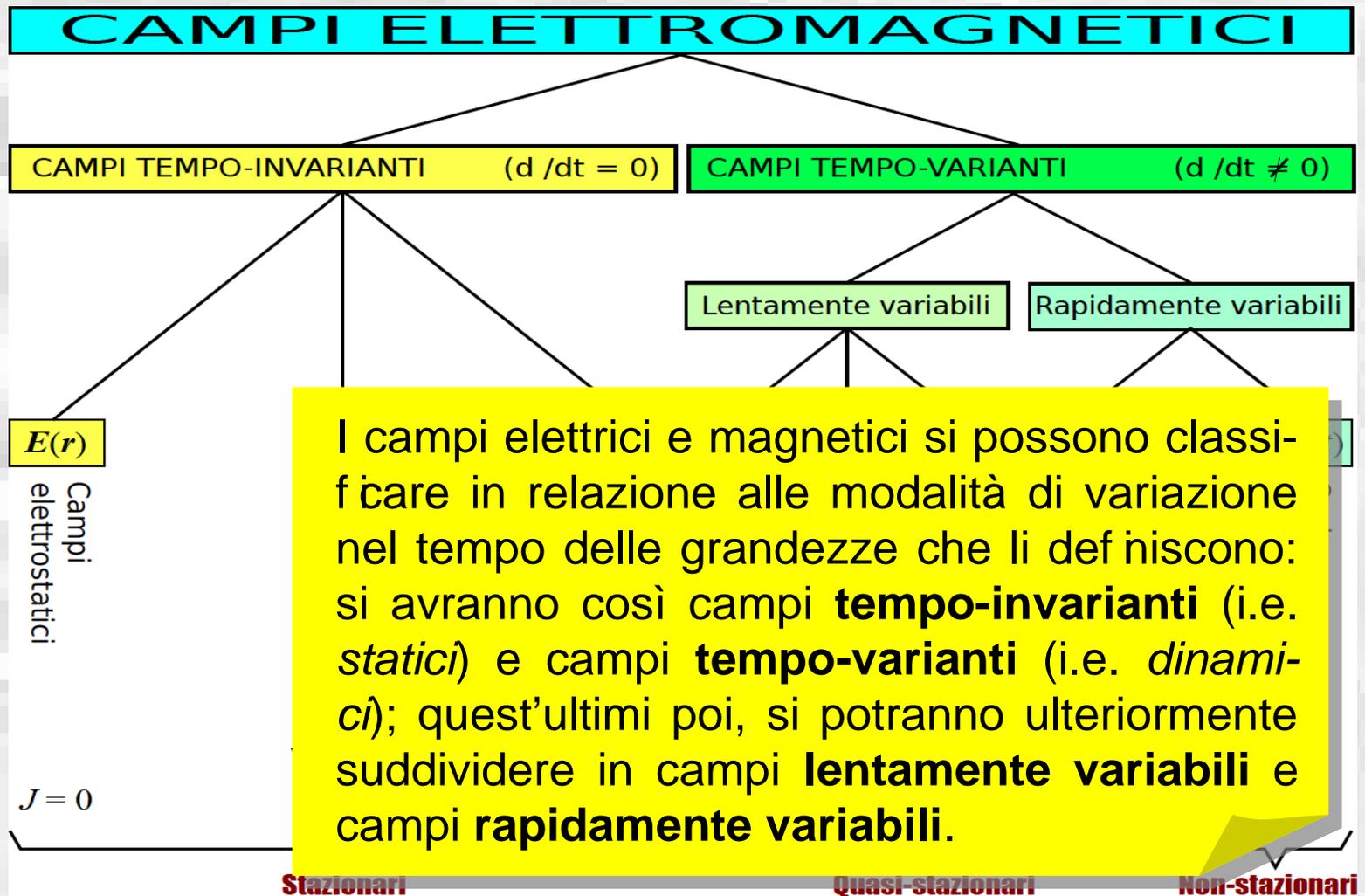
—
$$P_{usc}(t) = \oiint_S \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$
 potenza elettromagnetica uscente dal volume V attraverso la superficie S ; in altre parole **la potenza elettromagnetica che dal volume V fluisce verso lo spazio circostante è pari al flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie chiusa S che delimita il volume V .**



Classificazione dei campi elettromagnetici



Classificazione dei campi elettromagnetici



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi stazionari

- I campi statici (o stazionari) sono associati a cariche elettriche **immobili** e **tempo-invarianti**, od anche a cariche in movimento con *velocità di spostamento e densità volumetrica costanti*. In questa categoria **sono pertanto ricompresi anche i campi generati da tensioni o da correnti continue**.
- Le grandezze di campo ($E(r)$, $D(r)$, $H(r)$, $B(r)$ e $J(r)$), così come la densità volumetrica di carica elettrica ($\rho(r)$) risulteranno quindi tempo-invarianti e, nelle equazioni di Maxwell, **si annulleranno tutte le derivate rispetto al tempo**.
- Il **campo elettrico** e il **campo magnetico** sono **disaccoppiati**: in una generica regione dello spazio possono anche coesistere, ma **non si influenzano reciprocamente**.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi stazionari

- I campi statici si suddividono in ***campi elettrostatici***, ***campi statici di conduzione*** e ***campi magnetostatici***.
- Questi campi, chiamati genericamente **campi stazionari**, sono localmente invarianti e le corrispondenti grandezze di campo sono vincolate alla posizione della sorgente.
- Pertanto, questi campi sono funzione unicamente delle variabili spaziali, ovvero sono funzioni del generico punto $P(\mathbf{r})$ dello spazio.

Campi ... elettrostatici ... statici di conduzione ... magnetostatici

$$\begin{array}{lll} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) & \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0 & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 & \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) & \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma (\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_s(\mathbf{r})) & \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{array}$$



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

- I **campi dinamici** (o non stazionari) sono definiti da grandezze che possono essere tutte o in parte dipendenti dal tempo.
- Dalle equazioni di Maxwell discende come i **campi elettrici e magnetici tempo-varianti** siano sempre *mutuamente accoppiati*, pertanto sono normalmente indicati come **campi elettromagnetici**.
- Il loro grado di accoppiamento dipende unicamente dalla **rapidità di variazione** nel tempo delle corrispondenti grandezze: *tanto più rapido è il fenomeno tanto maggiore è l'accoppiamento*.
- I **campi tempo-varianti** possono pertanto essere caratterizzati in funzione del tipo di variazioni nel tempo: **lente** (*ridotto accoppiamento*) o **rapide** (*elevato accoppiamento*).



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

- Per i **campi lentamente variabili**, in ogni istante di tempo, t_i (con $t_i = t_0, t_1, \dots, t_n$), ed in ogni punto dello spazio, $P(\mathbf{r})$, si avrà che
 - il campo elettrico, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, coincide con il campo elettrostatico, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, relativo alla corrispondente distribuzione statica di cariche elettriche, cioè $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t_i) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ posto $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}, t_i)$;
 - il campo di corrente, $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, coincide con il campo statico di conduzione di una corrispondente corrente continua, $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, cioè posto $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t_i)$ (campo di conduzione tempo-variante senza *effetto pelle*, i.e. *skin effect*);
 - il campo magnetico, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, coincide con il campo magneto-statico, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, relativo alla corrispondente corrente continua, cioè $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t_i) = \mathbf{H}(\mathbf{r})$ posto $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t_i)$.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

- La dipendenza dallo spazio e dal tempo è pertanto **disaccoppiata**: ciò permette di trattare in ogni istante di tempo i campi lentamente variabili come una sequenza di “**snapshot**” (i.e., *istantanee*) di campi statici corrispondenti. I campi in cui la dipendenza dallo spazio e dal tempo è disaccoppiata vengono denominati **quasi-statici** (o quasi-stazionari).
- La coincidenza dei **campi elettrici quasi-statici** con i **campi elettrostatici** è dovuta al fatto che, in corrispondenza di variazioni lente del campo elettrico, la derivata rispetto al tempo della densità del flusso elettrico, e quindi la corrente di spostamento, ha ampiezza trascurabile, quindi a maggior ragione risulterà trascurabile il campo elettrico indotto dal campo magnetico variabile prodotto da queste correnti.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

- La dipendenza dalle spazio e del tempo è pertanto **disaccoppiata** in ogni istante di tempo in una sequenza di “**snapshot**” corrispondenti. I campi nel tempo è disaccoppiata (campi quasi-stazionari).

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \\ & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ & \nabla \times \mathbf{E}_{nc}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \simeq 0 \\ & \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_{nc}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

campo elettrico indotto dal campo magnetico variabile prodotto da queste correnti.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

- La coincidenza dei **campi magnetici quasi-statici** con i **campi magnetostatici** è dovuta al fatto che, in corrispondenza di variazioni lente del campo elettrico, all'interno di un conduttore, le correnti di spostamento e il campo magnetico da esse indotto, sono trascurabili rispetto alla corrente di conduzione ed al corrispondente campo magnetico. Inoltre, se le variazioni del campo magnetico sono sufficientemente lente, il campo elettrico da esse indotto non altera in modo significativo il campo elettrico impresso. Con riferimento al circuito formato dal conduttore non necessariamente deve annullarsi la circuitazione del campo elettrico (*effetti induttivi*). In queste condizioni, è ancora certamente trascurabile il campo magnetico esterno prodotto dalle correnti di spostamento rispetto al campo magnetico della corrente di conduzione.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

All'interno del conduttore

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \simeq 0$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i \simeq \mathbf{E}_s$$

quasi-statici con i

che, in corrisponden-

, all'interno di un con-

campo magnetico da

lla corrente di condu-

gnetico. Inoltre, se le

ufficientemente lente,

non altera in modo

o. Con riferimento al

necessariamente deve

trico (*effetti induttivi*).

te trascurabile il cam-

e correnti di spostamento

rispetto al campo magnetico della corrente di conduzione.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

All'interno del conduttore

All'esterno del conduttore

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \neq 0$$

effetti induttivi

quasi-statici con i

ne, in corrisponden-

all'interno di un con-

mpo magnetico da

corrente di condu-

etico. Inoltre, se le

icientemente lente,

n altera in modo

Con riferimento al

essariamente deve

co (*effetti induttivi*).

trascurabile il cam-

renti di spostamento

rispetto al campo magnetico della corrente di conduzione.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

- Da un punto di vista pratico-operativo, se la massima dimensione geometrica di un sistema è d_{max} , il massimo ritardo di propagazione, $t_{d_{max}}$, con cui la perturbazione raggiungerà tutti i punti del sistema, sarà dato da

$$t_{d_{max}} = \frac{d_{max}}{c} \quad \text{essendo } c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \text{ e nel vuoto } c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ (} m s^{-1} \text{)}$$

e si può analiticamente dimostrare che l'approssimazione quasi-stazionaria sarà valida se, alla massima frequenza d'interesse per il fenomeno in esame, il periodo della variazione della perturbazione elettromagnetica è molto grande rispetto al massimo ritardo di propagazione, e cioè

$$T \gg t_{d_{max}} \quad \text{ovvero } d_{max} \ll c T = \frac{c}{f} = \lambda \quad (\text{dove } \lambda \text{ è la lunghezza d'onda})$$



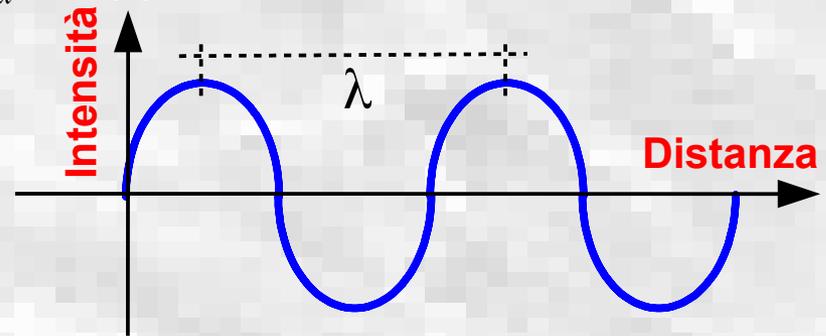
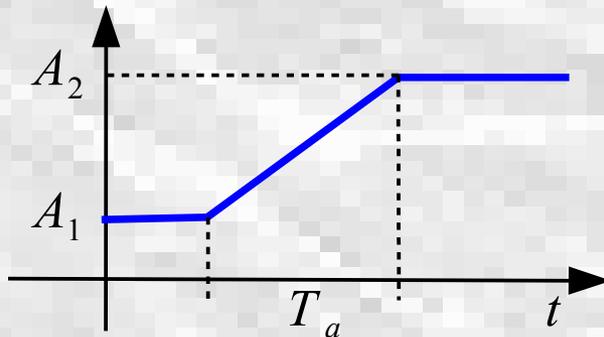
Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

- Da quanto precedentemente esposto, si può pertanto dedurre il seguente criterio “*quantitativo*” attraverso il quale stabilire l'applicabilità o meno della teoria quasi-statica ai campi elettromagnetici variabili nel tempo

- nel dominio del tempo : $T_a \gg d_{max} / c$
- nel dominio della frequenza : $\lambda \gg d_{max}$ ($\lambda = c / f$)

In molti casi, un tempo di variazione $T_a \geq 50 d_{max} / c$, che corrisponde a $\lambda \geq 50 d_{max}$, appare essere sufficiente.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

f	T	λ	$d_{max} < \lambda/50$
50 Hz	20 ms	6000 km	120 km
100 Hz	10 ms	3000 km	60 km
1 kHz	1 ms	300 km	6 km
10 kHz	100 μ s	30 km	600 m
20 kHz	50 μ s	15 km	300 m
100 kHz	10 μ s	3 km	60 m
1 MHz	1 μ s	300 m	6 m
10 MHz	100 ns	30 m	600 mm
100 MHz	10 ns	3 m	60 mm
1 GHz	1 ns	300 mm	6 mm
10 GHz	100 ps	30 mm	600 μ m



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

- Nei **campi rapidamente variabili** la corrente di spostamento cresce proporzionalmente alla frequenza ω , più in generale, alla velocità di variazione del campo elettrico. Questo risultato produce effetti diversi in funzione del mezzo materiale: **mezzi conduttivi** o **mezzi isolanti** (i.e. dielettrici).
- Nei **mezzi conduttivi**, la corrente di spostamento continua ad essere trascurabile. Tuttavia, il campo elettrico indotto nel conduttore dal campo magnetico generato dalla corrente di conduzione diventa significativo.
- La combinazione del campo elettrico esterno applicato e del campo indotto porta ad una **disuniforme distribuzione della densità di corrente** all'interno del conduttore.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

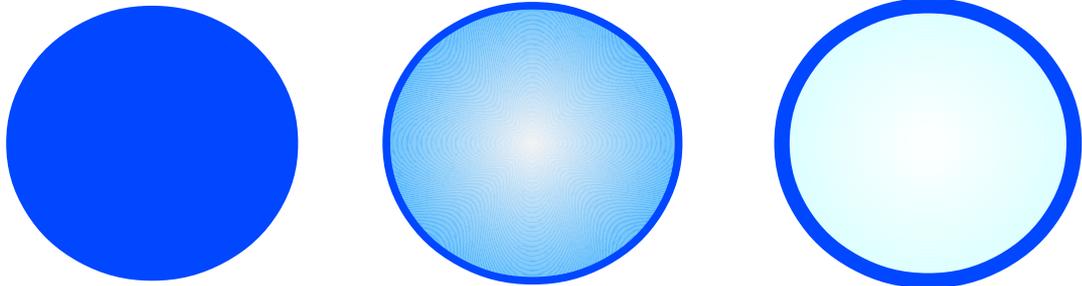
- Si riscontra un addensamento delle linee di corrente nelle zone periferiche del mezzo conduttivo fenomeno questo noto come **effetto pelle** o in inglese **skin effect**.
- Il campo della corrente di conduzione risulta quindi **difforme** da quello riscontrabile nello stesso mezzo conduttivo in condizioni stazionarie o quasi-stazionarie.
- In questo caso le grandezze di campo nel conduttore risultano dipendenti dallo spazio e dal tempo, ed il loro modello matematico dovrà soddisfare l'**equazione di diffusione**

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

- Si riscontra un addensamento delle linee di corrente nelle zone periferiche del mezzo conduttivo fenomeno questo noto come **effetto pelle** o in inglese **skin effect**.
 - Il campo da quell condizior
 - In quest risultano modello **diffusior**
- 
- cc** **ca in bassa frequenza** **ca in alta frequenza**

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

- I campi tempo-varianti fino a qui esaminati (i.e., il **campo elettrico quasi-statico**, il **campo magnetico quasi-statico**, il **campo di conduzione lentamente variabile** ed il **campo di conduzione rapidamente variabile**) hanno in comune il fatto che gli effetti indotti dal campo magnetico associato alle correnti di spostamento si possono considerare trascurabili, come risulta altresì trascurabile anche la stessa corrente di spostamento all'interno dei mezzi conduttivi.
- I campi, genericamente detti **quasi-statici**, sebbene siano funzione dello spazio e del tempo, non hanno le caratteristiche di un'onda (i.e., non si propagano nello spazio e nel tempo essendo la dipendenza spazio-temporale disaccoppiata), ma sono addirittura localmente fissi come i campi statici.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

- Relativamente al campo di **conduzione rapidamente variabile**, la propagazione, così come è descritta dall'equazione di diffusione, è strettamente confinata all'interno dei conduttori.
- I campi quasi-statici costituiscono quindi un sottoinsieme dei campi quasi-stazionari.
- La caratterizzazione dei campi quasi-stazionari, con l'imposizione della condizione di trascurabilità della corrente di spostamento, può a volte generare confusione: si osservi che la corrente di spostamento nei condensatori a 50 Hz è la corrente dominante. Ma in questi componenti tuttavia il campo è comunque considerato quasi-statico, o quasi-stazionario, poiché ciò che è trascurabile è il campo elettrico indotto dal campo magnetico associato alla corrente di spostamento.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi quasi-stazionari

- Relativamente al campo di **conduzione rapidamente variabile**, la propagazione, così come è descritta dall'equazione di diffusione, è strettamente confinata all'interno dei conduttori.
- I campi quasi-statici costituiscono quindi un sottoinsieme dei campi quasi-stazionari.
- La caratterizzazione dei campi quasi-stazionari, con l'imposizione della condizione di trascurabilità della corrente di spostamento, può a volte essere complicata dal fatto che la corrente di spostamento è spesso la corrente dominante. Ma in questi casi il campo elettrico è comunque considerato trascurabile, poiché ciò che è trascurabile è la corrente di spostamento dal campo magnetico associato alla corrente di spostamento.

In altri termini, nei campi quasi-stazionari, ciò che è trascurabile, sono gli effetti indotti dalla corrente di spostamento.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi non-stazionari

- Nei **mezzi dielettrici**, gli effetti indotti dalla corrente di spostamento associata ai campi rapidamente variabili non possono più essere trascurati. Al di fuori dei mezzi conduttivi le grandezze di campo, in particolare il campo elettrico ed il campo magnetico, sono da considerare oltre che funzione dello spazio e del tempo (come per lo *skin effect*), anche mutuamente accoppiati, e si espandono nello spazio sotto forma di un onda (ovvero di una perturbazione che si propaga nello spazio trasportando energia ma non materia).
- I campi rapidamente variabili che si propagano con le modalità di un onda sono chiamati **campi non-stazionari**; questi campi non sono confinati in regioni particolari dello spazio, fatta esclusione per la loro origine.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi non-stazionari

- I **campi non-stazionari** sono matematicamente rappresentabili mediante l'equazione d'onda del campo elettrico

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

e/o quella del campo magnetico

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

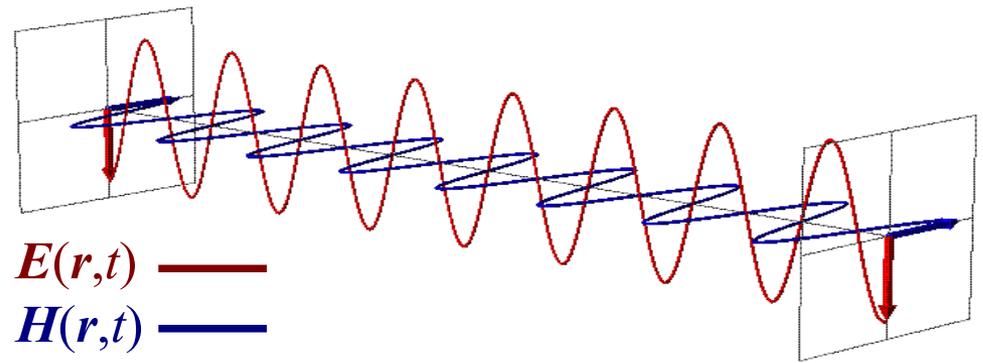
- Queste equazioni, analiticamente dedotte a partire dalle equazioni di Maxwell, che descrivono i fenomeni propagativi associati alle onde elettromagnetiche, trovano un loro interessante interpretazione qualitativa attraverso una semplice ed intuitiva rappresentazione grafica.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi non-stazionari

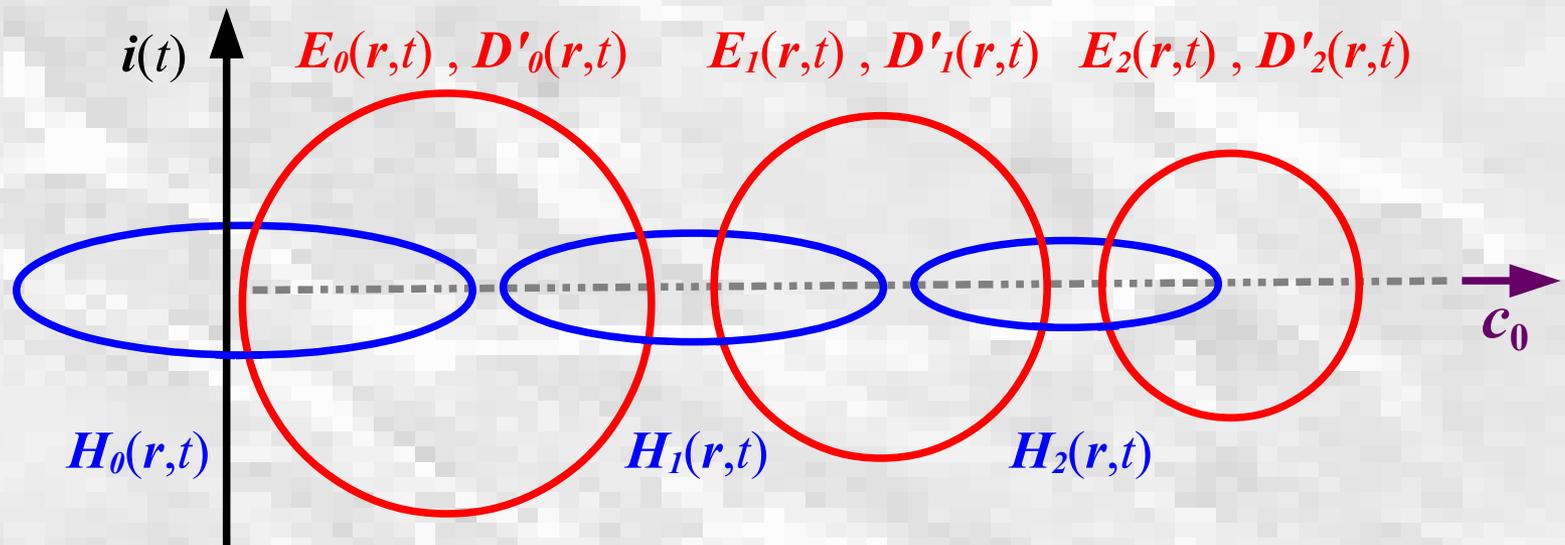
- Quando la rapidità di variazione di una perturbazione elettromagnetica (e.g., il tempo di salita di una rampa) diventa dello stesso ordine di grandezza del tempo di propagazione (o del ritardo) all'interno di un sistema, ovvero quando la massima lunghezza d'onda della perturbazione elettromagnetica diventa dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni lineari del sistema, i campi tempo-varianti perdono la loro natura quasi-statica.
- I campi si distaccano dai conduttori che li hanno generati e si propagano nello spazio.



Classificazione dei campi elettromagnetici

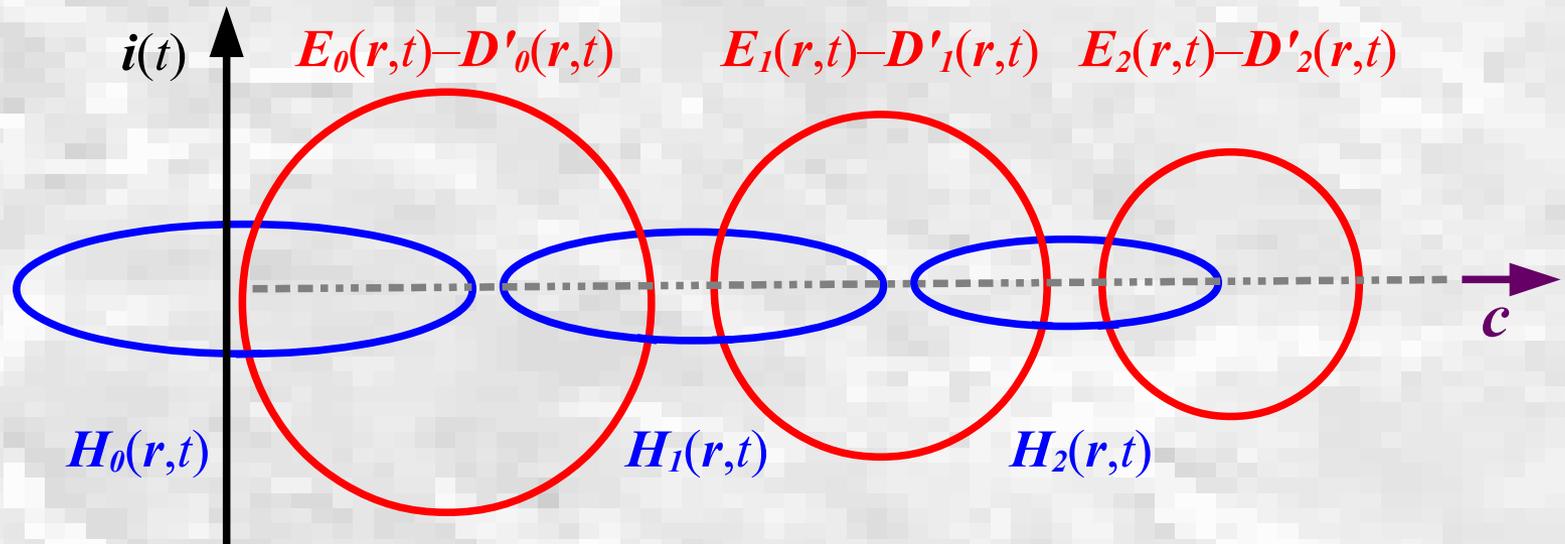
I campi non-stazionari

- Una corrente rapidamente variabile in un conduttore si concatena con un campo magnetico le cui linee di forza, in accordo con la legge dell'induzione elettromagnetica, a loro volta si concatenano con un campo elettrico, e si propagano nello spazio sostenendosi mutuamente.



Classificazione dei campi elettromagnetici

I campi non-stazionari



Propagazione di un onda elettromagnetica **TEM** (campo elettrico e campo magnetico trasversi) nello spazio vuoto.

