

Esame di Meccanica Quantistica, 12/09/2023

Esercizio 1. La Hamiltoniana che descrive la dinamica di una particella di massa m e spin $1/2$ è la seguente:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 + A\frac{2\omega}{\hbar}\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + B\omega(L_z + 2S_z)$$

dove i parametri adimensionali sono tali che $0 < A \ll 1$ e $0 \leq B \ll 1$.

a) Si assuma $B = 0$. Si determini lo spettro di H . In particolare si indichi la degenerazione e una base di autoket per ogni livello energetico tale che l'energia sia $E < 4\hbar\omega$.

b) Si assuma ora $0 < B \ll A$. Utilizzando la teoria delle perturbazioni, si studi al primo ordine nel parametro B la correzione ai primi due livelli energetici trovati al punto precedente. Si discuta l'eventuale rimozione delle degenerazione.

c) Si assuma $B = 0$. Ad un certo istante, la particella si trova nello stato quantistico $|\psi\rangle$ tale che: (i) una misura di H fornisce con certezza un valore $E < 4\hbar\omega$; (ii) $|\psi\rangle$ è autostato della parità con autovalore -1 ; (iii) le misure di J_z e S_z forniscono entrambe con certezza il valore $\hbar/2$. Si determini lo stato normalizzato $|\psi\rangle$.

Se viene effettuata una misura di J^2 su $|\psi\rangle$, quali valori si ottengono e con quale probabilità?

d) Si assuma sempre $B = 0$. Se al tempo $t = 0$ la particella si trova nello stato $|\psi\rangle$, si calcoli l'evoluto temporale $|\psi(t)\rangle$ al tempo t . Si calcolino i valori medi di H , J^2 ed L^2 al tempo t . Si spieghi se l'eventuale dipendenza o indipendenza da t poteva essere predetta a priori.

Esercizio 2. Due particelle identiche di massa m e spin 1 si muovono in una dimensione con Hamiltoniana $H = p_1^2/(2m) + p_2^2/(2m) + V(x_1, x_2)$,

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{per } |x_1 - x_2| \geq L \\ \frac{\alpha}{4} \left[S^2 - \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2) \right] & \text{per } |x_1 - x_2| < L \end{cases}$$

dove $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ indica lo spin totale e $\alpha > 0$. Si studi il problema nel sistema del centro di massa.

1) Si determinino le dimensioni del coefficiente α in unità di massa, lunghezza, tempo. Posto $\alpha = C \hbar^a L^b m^c$, dove C è un coefficiente adimensionale, si determinino a , b , c .

2) Per tutti i possibili valori dello spin totale, si disegni il potenziale in termini di $x = x_1 - x_2$. Per quali valori dello spin totale sono possibili stati legati?

3) Si calcoli il valore massimo C_{\max} della costante C per cui il sistema ammette un solo stato legato.