ANALISI VETTORIALE per Fisica
– Diario delle lezioni - Settimana n. 1 –

I risultati si intendono con dimostrazione, tranne ove diversamente indicato (s.d.). Tutte le definizioni e i teoremi sono accompagnati da esempi ed esercizi, di cui sono riportati qui solo i più elaborati.

Questo documento è curato da Andrea Dall'Aglio, docente del corso.

Lunedì 29 settembre 2014

- Introduzione al corso.
- Lo spazio R^N.
- **Modulo di un vettore** di R^N. Proprietà del modulo.
- **Diseguaglianza triangolare.**
- **Distanza** in R^N e sue proprietà.
- **Intorni** in R^N.
- **Aperti** di R^N.

Martedì 30 settembre 2014 *(2 ore)*

- **Prodotto scalare in** $\mathbb{R}^N$ e sue proprietà.
- **Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.**
- Dimostrazione della disuguaglianza triangolare.
- **Elementi di topologia di** $\mathbb{R}^N$**: Insiemi aperti** di $\mathbb{R}^N$, **insiemi chiusi. Punti interni** ad un insieme. **Punti esterni. Frontiera di un insieme.** Esempi.
- Ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi.

  Tuttavia in $\mathbb{R}^N$ gli unici insiemi che siano contemporaneamente aperti e chiusi sono tutto $\mathbb{R}^N$ e l'insieme vuoto.
- **Osservazione:** Un insieme è chiuso se e solo se contiene la sua frontiera (dim. per esercizio).
- **Osservazione:** L'unione di una famiglia qualsiasi di aperti è un aperto. L'intersezione di una famiglia **finita** di aperti è un aperto. (dim. per esercizio). L'intersezione di una famiglia **infinita** di aperti non è detto che sia un aperto.
- **Analogamente:** L'intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è un chiuso. L'unione di una famiglia **finita** di chiusi è un chiuso. L'unione di una famiglia **infinita** di chiusi non è detto che sia un chiuso.
- **Insiemi limitati** di $\mathbb{R}^n$.
- **Funzioni da** $\mathbb{R}^N$ **a valori in** $\mathbb{R}$**. Dominio naturale di una funzione di** N **variabili.** Esempi in 2 variabili.
- **Esercizio:** Trovare e disegnare il dominio della funzione
$$f(x,y) = \arccos\frac{x+y}{2}\,.$$
- **Esercizio:** Trovare e disegnare il dominio della funzione
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\log(1-(x^2+y^2))}\,.$$
- **Punto di accumulazione** di un insieme. Esempi.
- **Limite di una funzione di più variabili a valori reali.**
- **Esempio:** verifica di
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y = 0\,.$$

Mercoledì 1 ottobre 2014

- **Esempio:** verifica di
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2y^2} = +\infty\,.$$
- **Esempio:**
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2y} \text{ non esiste}\,.$$
- **Esempio:** verifica di
$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} xy = 6\,.$$
- **Osservazione:** nelle verifiche si è più volte utilizzato il fatto che la condizione $|(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta$ implica $|x-x_0|<\delta$ e $|y-y_0|<\delta$.
- **Osservazione:** Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$, allora anche il limite "lungo le rette" deve valere l, cioè si deve avere
$$\lim_{x\to x_0} f(x, x_0+m(x-x_0)) = l \quad \text{per ogni } m\in\mathbb{R}\,.$$
  In particolare, se tale limite dipende da m, significa che il limite in due variabili non esiste.
- **Esempio:**
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ non esiste}\,.$$

- **Osservazione:** Tuttavia può succedere che il limite "lungo le rette" sia lo stesso per ogni retta, ma il limite non esista. Esempi sono i seguenti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ non esiste}.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ non esiste},$$

dove

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- **Teorema (dei carabinieri):** Siano $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}) : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^N$. Sia $\mathbf{x}_0$ un punto di accumulazione per D, e supponiamo che $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x}) \le h(\mathbf{x})$ definitivamente per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Se

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = l,$$

allora anche

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = l$$

(dimostrazione identica al caso di una sola variabile scalare).

- **Osservazione:** anche nel caso di funzioni di più variabili, il limite, se esiste, è unico.

- **Proposizione** Si ha

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} |f(\mathbf{x}) - l| = 0.$$

(dimostrazione immediata).

Venerdì 3 ottobre 2014 *(2 ore)*

- **Osservazione:** Per i limiti di funzioni di più variabili restano validi (con identiche dimostrazioni) molti teoremi sui limiti che abbiamo già visto in una variabile: il teorema della permanenza del segno, l'aritmetica (estesa) dei limiti (ad esempio: il limite del prodotto è il prodotto dei limiti).

- **Espressione del limite in coordinate polari in $\mathbb{R}^2$.**

- **Osservazione:** Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$\lim_{\rho\to 0^+} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \left| f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta) - l \right| = 0,$$

e provare questo è equivalente a trovare una funzione $h(\rho)$ tale che

$$\left| f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta) - l \right| \le h(\rho)$$

e

$$\lim_{\rho\to 0^+} h(\rho) = 0.$$

- **Esercizio:** verificare che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \cos\frac{1}{xy} = 0$;

- **Esercizio:** verificare che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-3y^2)^2}{x^2+2y^2} = 0$;

- **Esercizio per casa:** studiare $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-3y^2)^2}{x^2+2y^2}$;

- **Esercizio:** verificare che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^3y^2)}{x^6+y^2} = 0$;

- **Esercizio:** verificare che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ non esiste;

- **Esercizio:** verificare che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x-y}$ non esiste.

- **Esercizio:** al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x^2-2x+1)y}{((x-1)^2+y^2)^\alpha}.$$

- **Funzioni continue in un punto e in un insieme.** Esempi.

- **Osservazione:** Somma, differenza, prodotto e rapporto di funzioni continue sono funzioni continue. (s.d.)

- **Proposizione:** La composizione di funzione continue è continua.(s.d.)

- **Proposizione:** Se $f(x,y)$ è una funzione continua e $a \in \mathbb{R}$, allora gli insiemi

$$\{(x,y) \ : \ f(x,y) \ge a\}, \qquad \{(x,y) \ : \ f(x,y) \le a\},$$

$$\{(x,y) \ : \ f(x,y) = a\}$$

sono chiusi; gli insiemi

$$\{(x,y) \ : \ f(x,y) > a\}, \qquad \{(x,y) \ : \ f(x,y) < a\}$$

sono aperti.
