

1 Limiti di funzioni di più variabili

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di funzioni di due variabili:

$$1.1 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^2 + y^2}$$

$$1.2 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2 \cos \frac{1}{xy}$$

$$1.3 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - 3y^2)^2}{x^2 + 2y^2}$$

$$1.4 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(y-1)^4}{x^2 + y^2 + 2(1-x-y)}$$

$$1.5 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - 2xy + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$1.6 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, 0)} \frac{y}{\cos x}$$

$$1.7 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$1.8 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1+xy)}{x^2 + y^2}$$

$$1.9 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - e^{x^3 y^2}}{x^6 + y^4}$$

$$1.10 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^4}$$

$$1.11 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1+x^3 y^2)}{x^6 + y^2}$$

$$1.12 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin(xy^2 - 2y^2)}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}$$

$$1.13 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1+x^2 y)}{4x^2 + y^2}.$$

$$1.14 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$$1.15 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$1.16 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\sin^2(x+y-2)}{(x-1)^2 + y^2 - 2y + 1}$$

1.17 Studiare l'insieme di definizione (in funzione del parametro reale a) per la funzione

$$f(x, y) = \frac{\arctan(xy)}{\sqrt{ax^2 + y^2}},$$

e la continuità della funzione \tilde{f} definita da

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } f \text{ definita,} \\ 0 & \text{se } f \text{ non definita.} \end{cases}$$

Discutere la possibilità di estendere con continuità a tutto \mathbb{R}^2 le seguenti funzioni:

$$1.18 \quad f(x, y) = \frac{\sin(2x - 2y)}{x - y}$$

$$1.19 \quad f(x, y) = \frac{xy}{|xy|}$$

$$1.20 \quad f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x}$$

$$1.21 \quad f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$$

$$1.22 \quad f(x, y) = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{2/3}}$$

$$1.23 \quad f(x, y) = \frac{\exp[y^2/(x^2 + y^2)^{2/3}]}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$$

$$1.24 \quad f(x, y) = \frac{xy^3 + y^2}{x^2 + y^2}$$

$$1.25 \quad f(x, y) = \arctan \frac{x}{|y|}$$

2 Risposte ad alcuni esercizi

1.1: 0; 1.2: 0; 1.3: 0; 1.4: 0; 1.5: non esiste;
 1.6: non esiste; 1.7: non esiste;
 1.8: non esiste;