

Esercizio 1

(1)

a) Calcoliamo

$$S_+^2 + S_-^2 = (S_x + iS_y)^2 + (S_x - iS_y)^2$$

direzioni dato che non commutano

$$= S_x^2 - S_y^2 + iS_x S_y + iS_y S_x + S_x^2 - S_y^2 - iS_x S_y - iS_y S_x$$

Quindi

$$\begin{cases} S_x^2 - S_y^2 = \frac{1}{2}(S_+^2 + S_-^2) \\ S_x^2 + S_y^2 = S^2 - S_z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_x^2 = \frac{1}{2}(S^2 - S_z^2) + \frac{1}{4}(S_+^2 + S_-^2) \\ S_y^2 = \frac{1}{2}(S^2 - S_z^2) - \frac{1}{4}(S_+^2 + S_-^2) \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} H &= \frac{V_{xx}}{2}(S^2 - S_z^2) + \frac{V_{xx}}{4}(S_+^2 + S_-^2) \\ &\quad + \frac{V_{yy}}{2}(S^2 - S_z^2) - \frac{V_{yy}}{4}(S_+^2 + S_-^2) + V_{zz} S_z^2 \\ &= \frac{1}{2}(V_{xx} + V_{yy})(S^2 - S_z^2) + V_{zz} S_z^2 + \frac{1}{4}(V_{xx} - V_{yy})(S_+^2 + S_-^2) \\ &= -\frac{1}{2}V_{zz}(S^2 - S_z^2) + V_{zz} S_z^2 + \frac{1}{4}(V_{xx} - V_{yy})(S_+^2 + S_-^2) \\ &= \frac{V_{zz}}{2}(3S_z^2 - S^2) + \frac{1}{4}(V_{xx} - V_{yy})(S_+^2 + S_-^2) \end{aligned}$$

Quindi $A = \frac{1}{2}V_{zz}$ $B = \frac{1}{4}(V_{xx} - V_{yy})$

b) Nella base indicata $(3S_z^2 - S^2)$ è diagonale

Invece $\langle S | S_+^2 + S_-^2 | S' \rangle \neq 0$ solo se $|S - S'| = 2$

E' quindi utile mettere "vicino" stati che differiscono di $\Delta S = 2$

Due possibili (tra molte) scelte

$$|\frac{3}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{3}{2}\rangle$$

oppure

$$|\frac{3}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{3}{2}\rangle, |\frac{1}{2}\rangle$$

Scegheremo la seconda. [Questa]

(2)

Dato che

$$\left\langle \frac{3}{2} \left| S_+^2 + S_-^2 \right| \frac{1}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2} \left| S_+^2 + S_-^2 \right| -\frac{3}{2} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle -\frac{1}{2} \left| S_+^2 + S_-^2 \right| \frac{1}{2} \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{2} \left| S_+^2 + S_-^2 \right| -\frac{3}{2} \right\rangle = 0$$

In questa base

$$H = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \begin{array}{l} \updownarrow 2 \text{ righe} \\ \updownarrow 2 \text{ righe} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{[Matrice diagonale]} \\ \text{a blocchi } 2 \times 2 \end{array}$$

Gli unici elementi di matrice da calcolare sono

$$\left\langle \frac{3}{2} \left| S_+^2 + S_-^2 \right| -\frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{1}{2} \left| S_+^2 + S_-^2 \right| -\frac{3}{2} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Dato che } (S_+^2 + S_-^2)^\dagger &= (S_+^2)^\dagger + (S_-^2)^\dagger \\ &= (S_-^2) + (S_+^2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (S_+^2 + S_-^2) \text{ è un} \\ \text{operatore hermitiano} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\left\langle -\frac{1}{2} \left| S_+^2 + S_-^2 \right| \frac{3}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2} \left| S_+^2 + S_-^2 \right| -\frac{1}{2} \right\rangle^*$$

$$\left\langle -\frac{3}{2} \left| S_+^2 + S_-^2 \right| \frac{1}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \left| S_+^2 + S_-^2 \right| -\frac{3}{2} \right\rangle^*$$

Quindi

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{3}{2} \left| S_+^2 + S_-^2 \right| -\frac{1}{2} \right\rangle &= \left\langle \frac{3}{2} \left| S_+^2 \right| -\frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \hbar^2 2 \left\langle \frac{3}{2} \left| S_+^2 \right| \frac{1}{2} \right\rangle = \hbar^2 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} \left| S_+^2 + S_-^2 \right| -\frac{3}{2} \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \left| S_+^2 \right| -\frac{3}{2} \right\rangle \\ &= \hbar^2 \sqrt{3} \left\langle \frac{1}{2} \left| S_+^2 \right| -\frac{1}{2} \right\rangle = 2\sqrt{3} \hbar^2 \end{aligned}$$

Quindi la base associata a $S_+^2 + S_-^2$ è

(3)

$$\frac{1}{\hbar^2} \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale
a blocchi hermitiana

La matrice associata a $3S_z^2 - S^2$ è diagonale

pari a $S_z = 3/2$ $S_z = -1/2$ $S_z = -3/2$ $S_z = 1/2$

$$\frac{1}{\hbar^2} \text{diag} \left[3\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{15}{4}, 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{15}{4}, 3\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{15}{4}, 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{15}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} (3, -3, 3, -3)$$

Quindi

$$H = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad P = \frac{1}{\hbar^2} \begin{pmatrix} 3A & 2\sqrt{3}B \\ 2\sqrt{3}B & -3A \end{pmatrix}$$

I due blocchi sono uguali per l'ordinamento scelto. Nella base $|\frac{3}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{3}{2}\rangle, |\frac{1}{2}\rangle$ avremmo

$$H = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad P' = \frac{1}{\hbar^2} \begin{pmatrix} -3A & 2\sqrt{3}B \\ 2\sqrt{3}B & +3A \end{pmatrix}$$

P e P' hanno gli stessi autovalori

Se (a_1, b_1) e (a_2, b_2) sono autovett. di P con autovalore λ_1 e λ_2 , rispettivamente, gli autovettori di H sono

$(a_1, b_1, 0, 0)$ autovalore λ_1

$(a_2, b_2, 0, 0)$ λ_2

$(0, 0, a_1, b_1)$ λ_1

$(0, 0, a_2, b_2)$ λ_2

Gli autovalori λ_1 e λ_2 sono 2 volte degeneri

Autovetori di $P/\hbar^2$

(4)

$$\left(\frac{P}{\hbar^2} - \lambda I\right) = \begin{pmatrix} 3A - \lambda & 2\sqrt{3}B \\ 2\sqrt{3}B & -3A - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{P}{\hbar^2} - \lambda I\right) = (3A - \lambda)(-3A - \lambda) - 12B^2 \\ = -9A^2 + \lambda^2 - 12B^2 \quad \lambda = \pm \sqrt{9A^2 + 12B^2}$$

$$E = \begin{cases} +\hbar^2 \sqrt{9A^2 + 12B^2} & \text{deg. 2} \\ -\hbar^2 \sqrt{9A^2 + 12B^2} & \text{deg. 2} \end{cases}$$

d) Se $B = \sqrt{3}/2 A$ $\lambda = \pm 3\sqrt{2} A$

$$P = \hbar^2 \begin{pmatrix} 3A & 3A \\ 3A & -3A \end{pmatrix}$$

Autovettori:

• $\lambda = +3\sqrt{2}A$

$$\begin{pmatrix} 3A & 3A \\ 3A & -3A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3\sqrt{2}A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Aa + Ab = \sqrt{2}aA \\ Aa - Ab = \sqrt{2}bA \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = \sqrt{2}a \\ a - b = \sqrt{2}b \end{cases} \quad b = (\sqrt{2} - 1)a$$

$$v = (a, (\sqrt{2} - 1)a)$$

$$\langle v | v \rangle = |a|^2 + (3 - 2\sqrt{2})|a|^2 = 1 \Rightarrow |a| = \frac{1}{(4 - 2\sqrt{2})^{1/2}}$$

Quindi

$$|v\rangle = \left(\frac{1}{(4 - 2\sqrt{2})^{1/2}}, \frac{\sqrt{2} - 1}{(4 - 2\sqrt{2})^{1/2}} \right)$$

(5)

$$\lambda = -3\sqrt{2}A$$

$$\begin{pmatrix} 3A & 3A \\ 3A & -3A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -3\sqrt{2}A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b = -\sqrt{2}a \\ a-b = -\sqrt{2}b \end{cases} \quad a = (1-\sqrt{2})b$$

$$|u\rangle = ((1-\sqrt{2})b, b)$$

$$\langle u|u\rangle = (4-2\sqrt{2})|b|^2 \quad |b| = \frac{1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}}$$

$$|u\rangle = \left(-\frac{\sqrt{2}-1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}}, \frac{1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}} \right)$$

Per comodità definiamo

$$\begin{cases} p = \frac{1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}} \\ q = \frac{\sqrt{2}-1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}} \end{cases} \quad p^2 + q^2 = 1$$

Quindi

$$\lambda = +3\sqrt{2}A \rightarrow v_+ = (p, q)$$

$$\lambda = -3\sqrt{2}A \rightarrow v_- = (-q, p)$$

L'ortogonalità dei due autovettori è ovvia con queste notazioni

Quindi
 $E = 3\hbar^2\sqrt{2}A$ autovett. $\begin{cases} p|\frac{3}{2}\rangle + q|-\frac{1}{2}\rangle \\ p|-\frac{3}{2}\rangle + q|\frac{1}{2}\rangle \end{cases}$

$E = -3\hbar^2\sqrt{2}A$ autovett. $\begin{cases} -q|\frac{3}{2}\rangle + p|-\frac{1}{2}\rangle \\ -q|-\frac{3}{2}\rangle + p|\frac{1}{2}\rangle \end{cases}$

e)

Al tempo $t=0$ $|\psi\rangle = |\frac{3}{2}\rangle$

Se $|E_+\rangle = p|\frac{3}{2}\rangle + q|-\frac{1}{2}\rangle$ $E_{\pm} = \pm 3\hbar^2\sqrt{2}A$

$|E_-\rangle = -q|\frac{3}{2}\rangle + p|-\frac{1}{2}\rangle$

$|\psi\rangle = |E_+\rangle \langle E_+|\psi\rangle + |E_-\rangle \langle E_-|\psi\rangle$

$= p|E_+\rangle - q|E_-\rangle$

Le misure di energia non dipendono da t . Quindi non è necessario considerare l'evoluzione temporale

$P(E=E_+) = p^2 = \frac{1}{4-2\sqrt{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{16-8} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

$P(E=E_-) = q^2 = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4-2\sqrt{2}} = (3-2\sqrt{2})\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$= \frac{3}{2} - \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

CHECK: $P(E=E_+) + P(E=E_-) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 1$ OK

Esercizio 2

d) Le autofunzioni di L_z sono $|m\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} = f_m(\varphi) \right)$ con $m \in \mathbb{Z}$. Per il principio di Pauli vogliamo una base che sia (anti)simmetrica sotto scambio. Definiamo le funzioni spaziali ($m_1 \neq m_2$)

$$|m_1, m_2\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}} (|m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 + |m_2\rangle_1 |m_1\rangle_2)$$

$$\xrightarrow{\text{R.S.}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi} (e^{im_1\varphi_1} e^{im_2\varphi_2} + e^{im_2\varphi_1} e^{im_1\varphi_2})$$

$$|m_1, m_2\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 - |m_2\rangle_1 |m_1\rangle_2)$$

$$\xrightarrow{\text{R.S.}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi} (e^{im_1\varphi_1} e^{im_2\varphi_2} - e^{im_2\varphi_1} e^{im_1\varphi_2})$$

Per $m_1 = m_2 = m$ vi è solo la combinazione simmetrica

$$|m, m\rangle_S = |m\rangle_1 |m\rangle_2 \xrightarrow{\text{R.S.}} \frac{1}{2\pi} e^{im(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Per il principio di Pauli

$$\text{funzione spat. simm} \Rightarrow S=0$$

$$\text{antisimm} \Rightarrow S=1$$

Quindi una base per H_0 è

$$\begin{array}{l} |m_1 m_2\rangle_S \quad |S=0\rangle \\ |m_1 m_2\rangle_A \quad |S=1, S_z\rangle \\ |m_1 m_1\rangle_S \quad |S=0\rangle \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \neq m_2 \\ (m_1 > m_2) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} E = \frac{\hbar^2}{2mR^2} (m_1^2 + m_2^2) \\ E = \frac{\hbar^2}{2mR^2} (m_1^2 + m_2^2) \\ E = \frac{\hbar^2}{2mR^2} (m_1^2 + m_1^2) \end{array}$$

$\left[\begin{array}{l} \text{"stessa" segno (e fasi)} \\ \text{non sono rilevanti} \end{array} \right] \leftarrow \begin{array}{l} |m_1 m_2\rangle_{S,A} \text{ e } |m_2 m_1\rangle_{S,A} \text{ sono} \\ \text{la "stessa" funzione e quindi} \\ \text{possiamo assumere} \\ m_1 > m_2 \end{array}$

La base precedente non è formata da autofunzioni di Π . Notiamo che

$$\Pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\varphi}$$

$$\Pi |m\rangle = |-m\rangle$$

Quindi

$$\Pi |m_1, m_2\rangle_{S,A} = |-m_1, -m_2\rangle_{S,A}$$

Una base formata da autofunzioni di H_0 e Π è quindi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} (|m_1, m_2\rangle_S + |-m_1, -m_2\rangle_S) |S=0\rangle \quad \text{autoval. di } \Pi = +1 \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} (|m_1, m_2\rangle_S - |-m_1, -m_2\rangle_S) |S=0\rangle \quad \text{autoval. di } \Pi = -1 \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} (|m_1, m_2\rangle_A \pm |-m_1, -m_2\rangle_A) |S=1, S_z\rangle = \begin{cases} + \text{ autoval } \Pi = +1 \\ - \text{ autoval } \Pi = -1 \end{cases} \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} (|mm\rangle_S \pm |-m, -m\rangle_S) |S=0\rangle \quad \begin{cases} + \text{ autoval } \Pi = +1 \\ - \text{ autoval } \Pi = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

PRIMI TRE LIVELLI

1) stato fond. $m_1 = m_2 = 0$
 $|00\rangle_S |S=0\rangle$ non degenero $E=0$

2) I eccitato: $|m_1|=0$ $m_2=0$ e viceversa

$$\begin{cases} |10\rangle_S |S=0\rangle \\ |10\rangle_A |S=1, S_z\rangle \\ |-10\rangle_S |S=0\rangle \\ |-10\rangle_A |S=1, S_z\rangle \end{cases} \quad \text{deg: } 1+3+1+3 = 8$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2mR^2}$$

3) II eccitato $|m_1| = |m_2| = 1$

(9)

$$|11\rangle_S |S=0\rangle$$

$$|-1-1\rangle_S |S=0\rangle$$

$$|1-1\rangle_S |S=0\rangle$$

$$|1-1\rangle_A |S=1, S_z\rangle$$

$$\text{deg} : 1+1+1+3=6$$

$$E = \frac{\hbar^2}{mR^2}$$

b)

$$H_{\text{spin}} = \gamma \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{\gamma}{2} (S^2 - S_1^2 - S_2^2) \quad \frac{\gamma \hbar^2}{2} (2 - \frac{3}{2}) = \frac{\gamma \hbar^2}{4} \quad S=1$$

$$= \frac{\gamma}{2} (S^2 - \frac{3}{4} \hbar^2 - \frac{3}{4} \hbar^2) = \left\langle \frac{\gamma \hbar^2}{2} (-\frac{3}{2}) = -\frac{3\gamma \hbar^2}{4} \quad S=0 \right.$$

La presenza di H_{spin} separa il primo livello eccitato di H_0 in due livelli che dipendono da S
Quindi

1) stato fond.

$$|00\rangle_S |S=0\rangle$$

$$E = -\frac{3}{4} \gamma \hbar^2 \quad \text{non deg.}$$

2) I eccitato

$$|10\rangle_S |S=0\rangle$$

$$|-10\rangle_S |S=0\rangle$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2mR^2} - \frac{3}{4} \gamma \hbar^2 \quad \text{deg} = 2$$

3) II eccitato

$$|10\rangle_A |S=1, S_z\rangle$$

$$|-10\rangle_A |S=1, S_z\rangle$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2mR^2} + \frac{1}{4} \gamma \hbar^2 \quad \text{deg} = 6$$

Il livello successivo ha

$$E = \frac{\hbar^2}{mR^2} - \frac{3}{4} \gamma \hbar^2 \quad \left[\text{stati } S=0 \text{ relativi al II livello eccitato di } H_0 \right]$$

o) Riscriviamo lo stato in termini di autostati $|S S_z\rangle$ dello spin totale

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 + |-\rangle_1 |+\rangle_2)$$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2)$$

$$|+\rangle_1 |-\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |00\rangle)$$

$$|-\rangle_1 |+\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |00\rangle)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Phi &= f \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |00\rangle) + g \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |00\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (f+g) |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (f-g) |00\rangle \end{aligned}$$

Da questa espressione si vede che Φ è combinazione di ~~autostati~~ ^{stati} con $S_z = 0$.

Notiamo ora che gli stati con $|m_1| = |m_2| = 1$ e $S=0$ (3 livello eccitato di H) hanno energia

$$E_{\text{ecc}} = \frac{\hbar^2}{mR^2} - \frac{3}{4} \gamma \hbar^2 = \frac{\hbar^2}{mR^2} \left(1 - \frac{3}{4} \gamma m R^2 \right)$$

$$\text{Ora } \gamma m R^2 < \frac{1}{2}, \quad -\gamma m R^2 > -\frac{1}{2}$$

$$E_{\text{ecc}} > \frac{\hbar^2}{mR^2} \left(1 + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{5}{8} \frac{\hbar^2}{mR^2}$$

La condizione a) implica quindi che gli unici stati rilevanti sono quelli relativi ai primi tre livelli di H.

Una misura di L_z sullo stato fondamentale (11) fornisce $L_z = 0$, una misura di L_z sul I e II eccitato fornisce $L_z = 1$ oppure $L_z = -1$.

Quindi, la condizione ii) esclude lo stato fondamentale. La condizione iii) richiede che gli stati siano pari sotto Π . Tenuto conto che $S_z = 0$, vi sono solo due stati

$$\textcircled{\text{I ecc}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_S + |-10\rangle_S) |S=0\rangle$$

$$\textcircled{\text{II ecc}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_A + |-10\rangle_A) |S=1, S_z=0\rangle$$

Per semplicità riscriviamo i due stati come

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_S + |-10\rangle_S), \quad \textcircled{\text{I ecc}} \Rightarrow |\psi_1\rangle |S=0\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_A + |-10\rangle_A), \quad \textcircled{\text{II ecc}} \Rightarrow |\psi_2\rangle |10\rangle$$

NOTARE: Siamo sempre stati attenti nel definire combinazioni normalizzate:

$$\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 1$$

Quindi i) + ii) + iii) + (forma data di ψ) implicano

$$|\Psi\rangle = A |\psi_1\rangle |00\rangle + B |\psi_2\rangle |1,0\rangle$$

dove A e B sono da determinare utilizzando iv) e v).

iv)

$$\begin{cases} \hbar^2 \langle \Psi | S^z | \Psi \rangle = |B|^2 2\hbar^2 \\ (v) \\ 1 = \langle \Psi | \Psi \rangle = |A|^2 + |B|^2 \end{cases} \rightarrow |A| = |B| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi, con opportuna scelta di fase

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_1\rangle |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} |\psi_2\rangle |10\rangle$$

con α fase arbitraria.

Confrontando

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|f\rangle - |g\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_1\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|f\rangle + |g\rangle) = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} |\psi_2\rangle$$

$$\begin{cases} |f\rangle = \frac{1}{2} (|\psi_1\rangle + e^{i\alpha} |\psi_2\rangle) \\ |g\rangle = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} |\psi_2\rangle - |\psi_1\rangle) \end{cases}$$

In rappresentazione di Schrödinger

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (e^{i\alpha} |\psi_2\rangle \pm |\psi_1\rangle) = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{2}} (e^{i\alpha} (|10\rangle_R + |-10\rangle_R) \pm (|10\rangle_S + |-10\rangle_S)) \\ & = \frac{1}{4} \left[e^{i\alpha} (|10\rangle - |01\rangle + |-10\rangle - |0-1\rangle) \right. \\ & \quad \left. \pm (|10\rangle + |01\rangle + |-10\rangle + |0-1\rangle) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \left[(e^{i\alpha} \pm 1) (|10\rangle + |-10\rangle) + (-e^{i\alpha} \pm 1) (|01\rangle + |0-1\rangle) \right]$$

In R.S. abbiamo

$$|10\rangle + |-10\rangle \xrightarrow{RS} \frac{1}{2\pi} (e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1}) = \frac{1}{\pi} \cos \varphi_1$$

$$|01\rangle + |0-1\rangle \xrightarrow{RS} \frac{1}{\pi} \cos \varphi_2$$

Quindi in RS.

$$\frac{1}{2} (e^{i\alpha} |\psi_2\rangle \pm |\psi_1\rangle) \rightarrow \frac{1}{4\pi} \left[(e^{i\alpha} \pm 1) \cos \varphi_1 + (-e^{i\alpha} \pm 1) \cos \varphi_2 \right]$$

$$f(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{4\pi} \left[(e^{i\alpha} + 1) \cos \varphi_1 + (1 - e^{i\alpha}) \cos \varphi_2 \right]$$

$$g(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{4\pi} \left[(e^{i\alpha} - 1) \cos \varphi_1 - (1 + e^{i\alpha}) \cos \varphi_2 \right]$$

d)

$$H|\psi_1\rangle|00\rangle = \left(\frac{\hbar^2}{2mR^2} - \frac{3}{4} \gamma \hbar^2 \right) |\psi_1\rangle|00\rangle$$

$$H|\psi_2\rangle|10\rangle = \left(\frac{\hbar^2}{2mR^2} + \frac{1}{4} \gamma \hbar^2 \right) |\psi_2\rangle|10\rangle$$

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar^2}{2mR^2} - \frac{3}{4} \gamma \hbar^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar^2}{2mR^2} + \frac{1}{4} \gamma \hbar^2 \right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2mR^2} + \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{8} \right) \gamma \hbar^2 = \frac{\hbar^2}{2mR^2} - \frac{1}{4} \gamma \hbar^2$$