Esame di Meccanica Quantistica, 12/07/2023

Esercizio 1. La dinamica di una particella di spin $s = 3/2$ è governata dalla seguente Hamiltoniana:

$$\hat{H} = V_{xx}\hat{S}_x^2 + V_{yy}\hat{S}_y^2 + V_{zz}\hat{S}_z^2$$

dove V_{xx} , V_{yy} e V_{zz} sono parametri noti soggetti al vincolo $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$.

a) Si dimostri che l'Hamiltoniana può essere riscritta nella seguente forma

$$\hat{H} = A(3\hat{S}_z^2 - \hat{\mathbf{S}}^2) + B(\hat{S}_+^2 + \hat{S}_-^2).$$

Si esprimano A e B in termini di V_{xx} e V_{yy} .

b) Si esprima $\hat{H}$ in rappresentazione matriciale utilizzando la base $\{|-s\rangle, |-s+1\rangle, \dots, |s\rangle\}$ degli autoket di $\hat{S}_z$. Si mostri che, scegliendo opportunamente l'ordine degli elementi della base, la matrice associata ad $\hat{H}$ assume una forma diagonale a blocchi.

c) Determinare gli autovalori dell'energia e la loro degenerazione.

d) Determinare esplicitamente una base di autoket di $\hat{H}$ nel caso in cui $B = (\sqrt{3}/2)A$.

e) Sempre nel caso $B = (\sqrt{3}/2)A$, si assuma che il sistema si trovi all'istante $t = 0$ nell'autoket di $\hat{S}_z$ corrispondente al suo autovalore massimo. Al generico tempo t , determinare i possibili risultati di una misura di energia e le relative probabilità.

Esercizio 2. Due particelle identiche di massa m e spin $1/2$ si muovono su una circonferenza di raggio R che giace nel piano xy . L'Hamiltoniana è $H = H_0 + H_{\text{spin}}$, con

$$H_0 = \frac{\hat{L}_{1z}^2}{2mR^2} + \frac{\hat{L}_{2z}^2}{2mR^2} \quad H_{\text{spin}} = \gamma \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2,$$

dove $\hat{L}_{1z}$ e $\hat{L}_{2z}$ sono le componenti z del momento angolare delle due particelle. Si assuma $0 < \gamma m R^2 < 1/2$.

a) Si scriva una base formata da autofunzioni simultanee di H_0 e dell'operatore di riflessione Π . L'azione di Π su una generica funzione d'onda $\Psi(\phi_1, \phi_2)$ è definita da $\Pi[\Psi(\phi_1, \phi_2)] = \Psi(-\phi_1, -\phi_2)$, dove ϕ_1 e ϕ_2 sono le coordinate angolari delle due particelle ($-\pi < \phi_{1,2} \leq \pi$). Si determinino le energie e le degenerazioni dei primi 3 livelli di H_0 .

b) Si determinino le energie e le degenerazioni dei primi 3 livelli di H .

c) Si consideri la famiglia di stati quantistici descritti dalla funzione d'onda

$$\Psi(\phi_1, \phi_2) = f(\phi_1, \phi_2)|+\rangle_1|-\rangle_2 + g(\phi_1, \phi_2)|-\rangle_1|+\rangle_2,$$

dove $|\pm\rangle_1$ e $|\pm\rangle_2$ sono autostati di S_{1z} ed S_{2z} con autovalore $\pm\hbar/2$.

Si determini l'espressione di $f(\phi_1, \phi_2)$ e $g(\phi_1, \phi_2)$ sapendo che: *i*) una misura di H fornisce con certezza un risultato $E < 5\hbar^2/(8mR^2)$; *ii*) una misura di $\hat{L}_z = \hat{L}_{1z} + \hat{L}_{2z}$ non fornisce mai un risultato nullo; *iii*) la funzione d'onda $\Psi(\phi_1, \phi_2)$ è pari rispetto all'azione di Π : $\Psi(-\phi_1, -\phi_2) = \Psi(\phi_1, \phi_2)$; *iv*) vale $\langle \Psi | S^2 | \Psi \rangle = \hbar^2$; *v*) la funzione d'onda è normalizzata.

d) Si calcoli $\langle \Psi | H | \Psi \rangle$.