Esercizio 1

a) Rappresentazione matriciale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3b & 0 & b \\ 0 & 2b & 0 \\ b & 0 & 3b \end{pmatrix}$$

Matrice A

$$\det|A - \lambda I| = \begin{pmatrix} -\lambda & a & 0 \\ a & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2a-\lambda \end{pmatrix} = (2a-\lambda)(\lambda^2 - a^2) = 0 \quad < \begin{matrix} \lambda = 2a \\ \lambda = a \\ \lambda = -a \end{matrix}$$

Autovettori di A

$\lambda = 2a$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 2a \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a\beta = 2a\alpha \\ a\alpha = 2a\beta \\ 2a\gamma = 2a\gamma \end{cases} \qquad \alpha = \beta = 0$$

$|2a\rangle = (0,0,1)$ [si poteva dedurre a priori vista la struttura a blocchi della matrice]

$\lambda = a$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a\beta = a\alpha \\ a\alpha = a\beta \\ 2a\gamma = a\gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Normalizzazione}} \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|a\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$\lambda = -a$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = -a \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a\beta = -a\alpha \\ a\alpha = -a\beta \\ 2a\gamma = -a\gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Normalizzaz.

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|-a\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

Matrice B

$$\det = \begin{pmatrix} 3b-\lambda & 0 & b \\ 0 & 2b-\lambda & 0 \\ b & 0 & 3b-\lambda \end{pmatrix} = (2b-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3b-\lambda & b \\ b & 3b-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2b-\lambda)\left[(3b-\lambda)^2 - b^2\right] = (2b-\lambda)\left[8b^2 - 6b\lambda + \lambda^2\right]$$
$$= (2b-\lambda)(\lambda-4b)(\lambda-2b)$$

$$\lambda = \begin{cases} 4b \\ 2b \\ 2b \end{cases} \Big] \text{ deg. } 2$$

$\lambda = 4b$

$$\begin{pmatrix} 3b & 0 & b \\ 0 & 2b & 0 \\ b & 0 & 3b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 4b\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 3b\alpha + \gamma b = 4b\alpha \\ 2b\beta = 4b\beta \\ b\alpha + 3b\gamma = 4b\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = \alpha \end{cases} \xrightarrow[\text{norm.}]{} \quad \beta = 0,\ \gamma = \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad |4b\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\lambda = 2b$

$$\begin{pmatrix} 3b & 0 & b \\ 0 & 2b & 0 \\ b & 0 & 3b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 2b\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 3b\alpha + \gamma b = 2b\alpha \\ 2b\beta = 2b\beta \\ b\alpha + 3b\gamma = 2b\gamma \end{cases}$$

Vi è una sola equazione $\alpha = -\gamma$

Possibile base <u>ORTOGONALE</u> $\left[\langle 2b,1 | 2b,2\rangle = 0\right]$

$$\begin{cases} |2b,1\rangle = (0, 1, 0) \\ |2b,2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

Non ci sono autostati simultanei, come si vede per calcolo diretto.

Infatti se uno degli autovettori $|v\rangle$ di A fosse autovettore di B dovrebbe essere tale che

$$|v\rangle = |4b\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{(cond A)}$$

oppure

$$|v\rangle = \alpha|2b,1\rangle + \beta|2b,2\rangle$$
$$= \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}, \alpha, -\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{per qualche } \alpha, \beta \qquad \text{(cond B)}$$

È immediato verificare che la cond. A non è mai verificata, per confronto diretto
Analogamente, è possibile verificare che non esistono α, β tali che $|v\rangle$ sia autovettore di A

Si noti che $C = [A, B] \neq 0$, ma questo non è rilevante per rispondere alla domanda. $C \neq 0$ implica che non esiste una <u>base</u> di autovettori comuni, ma non esclude l'esistenza di <u>qualche</u> autovettore comune.

In ogni caso, se $A|v\rangle = \lambda v$ e $B|v\rangle = \mu|v\rangle$ allora $C|v\rangle = 0$. Quindi, condizione NECESSARIA per avere un autovettore comune, è l'esistenza di un autovettore nullo di C, ossià $\det C = 0$.
Quindi, se $\det C \neq 0$, allora non vi sono autovettori comuni. Questa osservazione permette di giungere in modo molto più lungo e laborioso alla conclusione che A e B non hanno autovettori comuni.

b) Dopo la prima misura, il sistema si trova nell'autostato di A con autovalore a, ossia

$$|\psi_{ini}\rangle = |a\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Nella misura di B si ottiene un risultato minore di 3b e quindi si ottiene 2b.
Lo stato finale si ottiene quindi proiettando $|\psi_{ini}\rangle$ sul sottospazio generato da $|2b,1\rangle$ e $|2b,2\rangle$

$$\langle 2b,1|\psi_{ini}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 2b,2|\psi_{ini}\rangle = \frac{1}{2}$$

Quindi $$|\psi_{ini}\rangle \xrightarrow[\text{misura}]{} \frac{1}{\sqrt{2}}|2b,1\rangle + \frac{1}{2}|2b,2\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

Lo stato va normalizzato: $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

$$= \frac{3}{4}$$

$$|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$$

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \frac{a}{6}(1,2,-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{a}{6}(1,2,-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{a}{6}(2+2+2) = a$$

c) Esprimiamo $|\psi\rangle$ nella base di A

$$\langle a|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\langle -a|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\langle 2a|\psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Quindi $P(a) = \frac{3}{4}$

$P(-a) = \frac{1}{12}$ $\qquad \langle\psi|\psi\rangle = \frac{3}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ok

$P(2a) = \frac{1}{6}$ $\qquad \langle\psi|A|\psi\rangle = \frac{3}{4}a + \frac{1}{12}(-a) + \frac{1}{6}2a$

$$= a\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{3}\right) = a \quad \text{ok}$$

Esercizio 2

Domanda a)

Ricordiamo che gli autovalori di L_z sono $\hbar m$, $m \in \mathbb{Z}$ con funzione d'onda (sulla circonferenza) normalizzata

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} = f_m(\varphi)$$

Una base di autostati di H_0 (non consideriamo Pauli)

$$|m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 |S \; S_z\rangle = |m_1 \; m_2 \; S \; S_z\rangle \qquad E = \hbar\omega(m_1^2 + m_2^2) + B\hbar S_z$$

$\vec{S}$ totale $= \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

Lo spin totale può assumere i valori 0, 1.

Livelli più bassi (senza Pauli)

- $m_1 = m_2 = 0 \qquad E = B\hbar\omega S_z$

- $\begin{cases} m_1 = \pm 1 & m_2 = 0 \\ m_1 = 0 & m_2 = \pm 1 \end{cases} \qquad E = \hbar\omega + B\hbar\omega S_z$

Imponiamo Pauli

- $m_1 = m_2 = 0$

  La parte spaziale è $|0\rangle_1 |0\rangle_2$, pari.

  Quindi la parte di spin è dispari $\Longrightarrow S = 0$

STATO FOND: $\underset{m_1\ m_2\ S\ S_z}{|0\ 0\ 0\ 0\rangle}$ non degenere

- $m_1 = \pm 1$ $m_2 = 0$, e $m_1 = 0$, $m_2 = \pm 1$

Definiamo delle funzioni d'onda spaziali pari o dispari sotto scambio

$$\left.\begin{aligned} |1\ 0\rangle_S &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overset{m_1}{|1\rangle_1} \overset{m_2}{|0\rangle_2} + \overset{m_1}{|0\rangle_1} \overset{m_2}{|1\rangle_2} \right) \\ |-1\ 0\rangle_S &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|-1\rangle_1 |0\rangle_2 + |0\rangle_1 |-1\rangle_2 \right) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{spaziale}]{\text{pari}} \xrightarrow{} \text{spin } S = 0$$

$$\left.\begin{aligned} |1\ 0\rangle_A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle_1 |0\rangle_2 - |0\rangle_1 |1\rangle_2 \right) \\ |-1\ 0\rangle_A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|-1\rangle_1 |0\rangle_2 - |0\rangle_1 |-1\rangle_2 \right) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{} \text{dispari} \xrightarrow{} \text{spaziale} \quad \text{spin } S = 1$$

Vi sono quindi 3 ulteriori livelli

- $|1\,0\rangle_A\,|\underset{S}{1}\;\underset{S_z}{-1}\rangle$, $|-1\;0\rangle_A\,|1\;-1\rangle$

$E = \hbar\omega - B\hbar\omega$ deg. 2

- $\begin{cases} |1\;0\rangle_A\,|1\;0\rangle & |-1\;0\rangle_A\,|1\;0\rangle \\ |1\,0\rangle_S\;|0\;0\rangle & |-1\;0\rangle_S\,|0\;0\rangle \end{cases}$ deg. 4 $E=\hbar\omega$

- $|1\,0\rangle_A\,|1\;1\rangle$ $|-1\;0\rangle_A\,|1\;1\rangle$ deg. 2 $E=\hbar\omega+B\hbar\omega$

Domanda b)

caso 1 stato fondamentale

$$|0\,0\rangle|0\,0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,|0\,0\rangle = \frac{1}{2\pi}\,|0\,0\rangle$$

$$\langle \text{fond}|V|\text{fond}\rangle = \frac{\epsilon\hbar\omega}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_1\,d\varphi_2\,(\cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2) = 0$$

caso 2 I eccitato

Lo stato è degenere, base $|1\,0\rangle_A|1\,-1\rangle$, $|-1\,0\rangle_A|1\,-1\rangle$

Dobbiamo calcolare 3 elementi di matrice

$$_A\langle 1\;0|\langle 1\,-1|\,V\,|1\;0\rangle_A\,|1\,-1\rangle = {}_A\langle 1\;0|V|1\;0\rangle_A$$

$$_A\langle -1\;0|\langle 1\,-1|\,V\,|-1\,0\rangle_A\,|1\,-1\rangle = {}_A\langle -1\,0|V|-1\,0\rangle_A$$

$$_A\langle -1\,0|\langle 1\,-1|V|1\,0\rangle_A\,|1\,-1\rangle = {}_A\langle -1\,0|V|1\;0\rangle_A$$

[Il quarto elemento di matrice segue dalla hermiticità di V]

Ora

$$|\pm 1\, 0\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\pm 1\rangle|0\rangle - |0\rangle|\pm 1\rangle\right) \longrightarrow \text{funz. d'onda}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\varphi_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\varphi_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\pm i\varphi_1} - e^{\pm i\varphi_2}\right)$$

Ricordiamo che

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, e^{im\varphi} \cos 2\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, e^{im\varphi}\left(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\left(e^{i(m+2)\varphi} + e^{i(m-2)\varphi}\right) = \begin{cases} \pi & \text{per } m = \pm 2 \\ 0 & \text{per } m \neq \pm 2 \end{cases}$$

Calcolo di ${}_A\langle \pm 1\, 0|V|\pm 1\, 0\rangle_A$ [per semplicità omettiamo $\epsilon\hbar\omega$]

Ora $\left|\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\pm i\varphi_1} - e^{\pm i\varphi_2}\right)\right|^2 =$

$$\frac{1}{8\pi^2}\left(1 + 1 - e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} - e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}\right)$$

Quindi

$${}_A\langle \pm 1\, 0|V|\pm 1\, 0\rangle_A = \frac{1}{8\pi^2}\int d\varphi_1 d\varphi_2 \left(\cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2\right)$$

$$\underbrace{\left(2 - e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} - e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}\right)}$$

NON VI SONO TERMINI CON $m = 2, -2$ ossia $e^{\pm 2i\varphi_1}$ o $e^{\pm 2i\varphi_2}$.

Quindi l'integrale è nullo

Calcolo di [omettiamo $\epsilon\hbar\omega$]

$${}_1\langle 1\,0|V|-1\,0\rangle_A$$

Nota che $\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi_2})^* \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\varphi_1}-e^{-i\varphi_2})$

$$=\frac{1}{8\pi^2}(e^{-i\varphi_1}-e^{-i\varphi_2})^2=\frac{1}{8\pi^2}(e^{-2i\varphi_1}+e^{-2i\varphi_2}-2e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)})$$

Quindi

$${}_A\langle 1\,0|V|-1\,0\rangle_A=\int d\varphi_1\, d\varphi_2\,(\cos 2\varphi_1+\cos 2\varphi_2)\,\frac{1}{8\pi^2}(e^{-2i\varphi_1}+e^{-2i\varphi_2}-2\underbrace{e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}}_{m=-1\,\rightarrow\,\text{dà zero}})$$

$$=\frac{1}{8\pi^2}\int d\varphi_1 d\varphi_2\Big[\cos 2\varphi_1 e^{-2i\varphi_1}+\underbrace{\cos 2\varphi_1 e^{-2i\varphi_2}}_{\text{dà zero}}+\underbrace{\cos 2\varphi_2 e^{-2i\varphi_1}}_{\text{dà zero}}+\cos 2\varphi_2 e^{-2i\varphi_2}\Big]$$

$$=\frac{1}{8\pi^2}\left[\pi\cdot 2\pi+2\pi\cdot\pi\right]=\frac{1}{2}$$

Quindi la matrice della perturbazione è

$$V=\begin{pmatrix}0 & \frac{\epsilon\hbar\omega}{2}\\ \frac{\epsilon\hbar\omega}{2} & 0\end{pmatrix}$$ (Reintrodotto $\epsilon\hbar\omega$)

Autovalori $\lambda=\pm\frac{\epsilon\hbar\omega}{2}$

Il livello si separa con $\Delta E=\pm\frac{1}{2}\hbar\omega$

c) $\left[f_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \right]$

Riscriviamo ψ_0 in termini di autofunzioni di L_z

$$\psi_0 = \frac{A}{2i}\left(e^{i\varphi_1}e^{-i\varphi_2} - e^{-i\varphi_1}e^{i\varphi_2}\right)\chi_a + B\chi_b$$

$$= \frac{A\pi}{i}\Big(\underbrace{f_1(\varphi_1)f_{-1}(\varphi_2)}_{(*1)} - \underbrace{f_{-1}(\varphi_1)f_1(\varphi_2)}_{(*2)}\Big)\chi_a + 2\pi B\underbrace{f_0(\varphi_1)f_0(\varphi_2)}_{(*3)}\chi_b$$

Guardando le proprietà di scambio della parte spaziale concludiamo che χ_a è uno spinore con $S=1$, χ_b con $S=0$. Quindi (i) implica $\chi_a = |1\,0\rangle$, $\chi_b = |0\,0\rangle$.

Per imporre la condizione (ii) notiamo che

(*1) ha $m_1 = 1,\ m_2 = -1 \qquad m_1 \neq m_2$

(*2) ha $m_1 = -1,\ m_2 = 1 \qquad m_1 \neq m_2$

(*3) ha $m_1 = 0 \quad m_2 = 0 \qquad m_1 = m_2$

Quindi $|2\pi B|^2 = \frac{1}{2} \qquad |B| = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\pi}$

[NB: quando si calcolano le probabilità è necessario che gli stati siano normalizzati. Per questo bisogna introdurre $f_m(\varphi)$] $\quad f_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$

La condizione di normalizzazione è [tutti gli stati che appaiono sono normalizzati]

$$|A\pi|^2 \cdot 2 + 4\pi^2|B|^2 = 1$$

$$2\pi^2|A|^2 + \frac{1}{2} = 1 \qquad |A|^2 = \frac{1}{4\pi^2}$$

Possiamo porre $\quad A = \frac{i}{2\pi} \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\pi}e^{i\alpha} \quad \left(\begin{matrix}\alpha \text{ fase}\\ \text{arbitraria}\end{matrix}\right)$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}\left(|1\rangle_1|-1\rangle_2 - |-1\rangle_1|1\rangle_2\right)|1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}|0\rangle_1|0\rangle_2|0\,0\rangle$$

d) L_z, S^2 e (ovviamente) H_0 commutano con H_0
Le probabilità richieste non dipendono da t.
Non è necessario calcolare ψ_t

- L_z Dato che $m_1 + m_2 = 0$ per tutti gli stati
 otteniamo prob $(L_z = 0) = 1$

- S^2 $\text{Prob}\,(S^2 = 0) = \frac{1}{2}$
 $\text{Prob}\,(S^2 = 2\hbar^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

H_0

Energia di $|1\rangle_1 |-1\rangle_2 |1\,0\rangle \longrightarrow \hbar\omega(1+1) = 2\hbar\omega$

$|-1\rangle_1 |1\rangle_2 |1\,0\rangle \longrightarrow \hbar\omega(1+1) = 2\hbar\omega$

$|0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\,0\rangle \longrightarrow 0$

Quindi

$\text{Prob}\,(E = 2\hbar\omega) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\text{Prob}\,(E = 0) = \frac{1}{2}$