

Esame di Meccanica Quantistica, 27/06/2023

Esercizio 1. Si considerino due osservabili A e B la cui espressione nella base ortonormale completa $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ è la seguente:

$$A = a|\alpha\rangle\langle\beta| + a|\beta\rangle\langle\alpha| + 2a|\gamma\rangle\langle\gamma|$$

$$B = 3b|\alpha\rangle\langle\alpha| + 2b|\beta\rangle\langle\beta| + 3b|\gamma\rangle\langle\gamma| + b|\alpha\rangle\langle\gamma| + b|\gamma\rangle\langle\alpha|,$$

dove a, b sono due parametri reali con opportune dimensioni.

a) Si determinino gli autovalori ed una base di autovettori di A e B . Si dica se esistono autostati simultanei di A e B .

b) Uno stato fisico $|\psi\rangle$ viene preparato nel seguente modo: si effettua una misura di A , ottenendo come risultato il valore a ; immediatamente dopo si effettua una misura di B , ottenendo come risultato un valore minore di $3b$. Si determini l'espressione di $|\psi\rangle$ nella base $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ e il valor medio di A su $|\psi\rangle$.

c) Si determinino i possibili risultati di una misura di A sullo stato $|\psi\rangle$ e le corrispondenti probabilità.

Esercizio 2. Si considerino due particelle identiche di spin $1/2$ vincolate a muoversi su una circonferenza ($x = R \cos \phi$, $y = R \sin \phi$, $z = 0$) e soggette alla Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\omega}{\hbar}(L_{1z}^2 + L_{2z}^2) + B\omega(S_{1z} + S_{2z}),$$

con $0 < B \ll 1$. I pedici 1 e 2 si riferiscono alle due particelle.

a) Si calcolino le energie, le degenerazioni ed una base di autostati per i primi 4 livelli.

b) Si consideri la perturbazione

$$V = \epsilon\hbar\omega(\cos 2\phi_1 + \cos 2\phi_2),$$

dove ϕ_1 e ϕ_2 sono le posizioni angolari delle due particelle. Assumendo che $\epsilon \ll B$, si calcolino le energie dello stato fondamentale e del primo livello eccitato al primo ordine perturbativo in ϵ .

c) Si consideri la famiglia di stati con funzione d'onda spinoriale normalizzata

$$\psi_0 = A \sin(\phi_1 - \phi_2) \chi_a + B \chi_b,$$

dove χ_a e χ_b sono spinori normalizzati, ciascuno dei quali fornisce uno stato di spin delle due particelle. Gli stati ψ_0 godono delle seguenti proprietà: (i) Una misura di S_z ($\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ è lo spin totale del sistema) su ψ_0 fornisce sempre 0. (ii) Si misura L_z su ciascuna particella, ottenendo due valori $m_a\hbar$ e $m_b\hbar$. La probabilità di ottenere $m_a = m_b$ è pari a $1/2$.

Si determinino χ_a e χ_b e si specifichino i valori possibili delle costanti A e B (si ricordi che ψ_0 è normalizzata).

d) Si assuma che al tempo $t = 0$ il sistema sia in uno degli stati ψ_0 e che il sistema evolva con Hamiltoniana H_0 . Sia ψ_t l'evoluto temporale al tempo t . Si calcolino i possibili valori ottenibili in una misura di S^2 , $L_z = L_{1z} + L_{2z}$ ed H_0 su ψ_t . Si determinino anche le relative probabilità.