ELETTROTECNICA
Principi ed applicazioni di Ingegneria Elettrica

Corso di Laurea in Ingegneria Civile (6 CFU)

Lezione 02 – *Numeri complessi, sinusoidi e fasori*

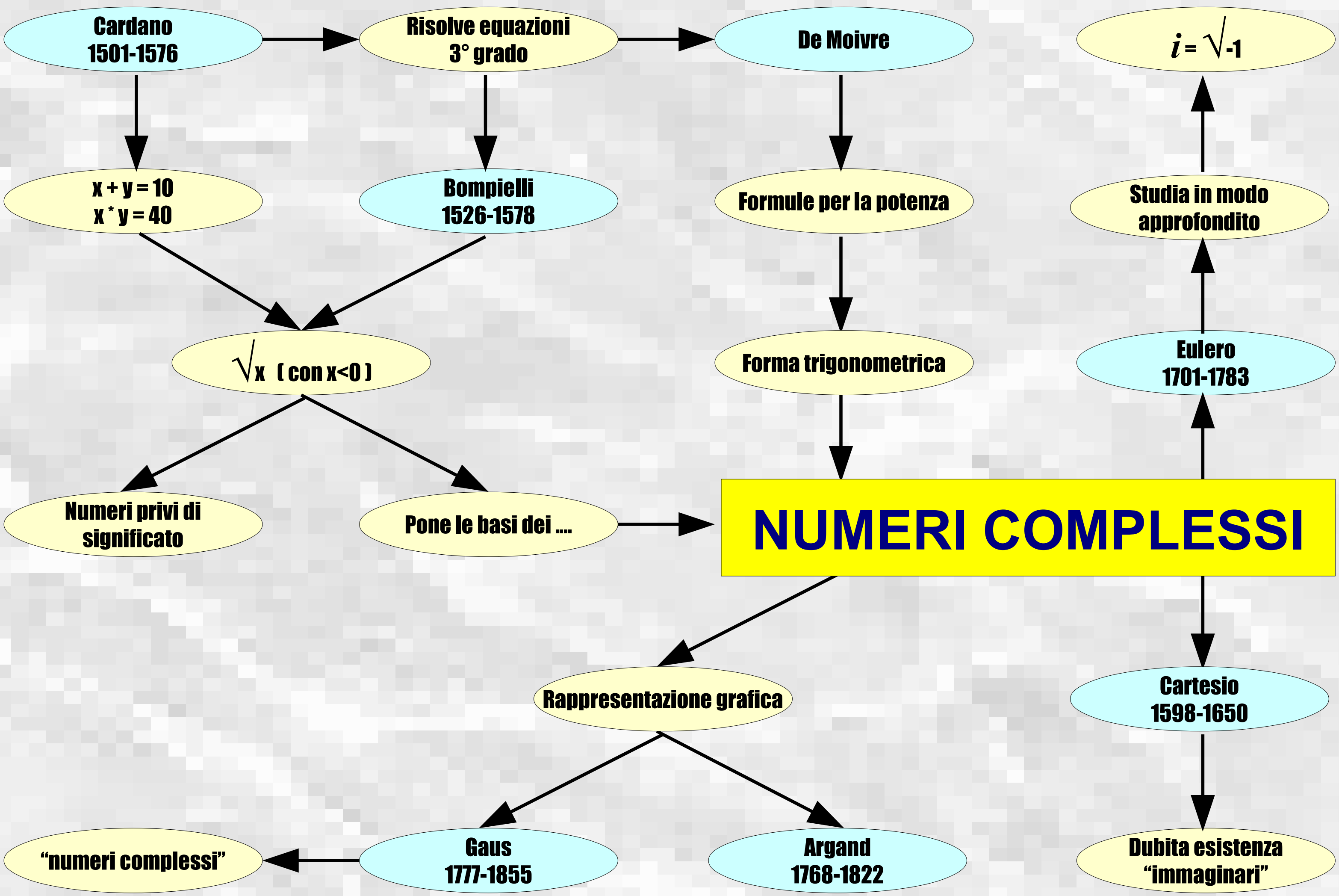
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Prof. Alberto Geri
Dipartimento di Ingegneria Astronautica, Elettrica ed Energetica
Area Ingegneria Elettrica - Via delle Sette Sale n° 12/b, Roma
T 06 44585.534/540 F 06 4883235 alberto.geri@uniroma1.it

Indice dei contenuti

Numeri complessi, sinusoidi e fasori

Numeri complessi



Le principali definizioni

- Si definiscono **numeri complessi** le coppie ordinate di numeri reali e si indicano come

$$\dot{z}=(x,y) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad \Re(\dot{z})=x \quad \text{parte reale}$$
$$\Im(\dot{z})=y \quad \text{parte immaginaria}$$

- Numero **complesso reale**: $\dot{z}=(x,0)$ con $x \neq 0$
  Numero **complesso immaginario**: $\dot{z}=(0,y)$ con $y \neq 0$
- L'insieme dei *numeri complessi* $\dot{z} \in \mathbb{R}^2$, in relazione alle proprietà di cui gode, ha la connotazione di un campo algebrico, a cui è stato dato il nome di **campo dei numeri complessi** ed è stato indicato con $\mathbb{C}$.
- **Identità**: dati $\dot{z}_1=(x_1, y_1)$ e $\dot{z}_2=(x_2, y_2)$ si ha $\dot{z}_1=\dot{z}_2$ se
  $\Re(\dot{z}_1)=\Re(\dot{z}_2) \rightarrow x_1=x_2$ e $\Im(\dot{z}_1)=\Im(\dot{z}_2) \rightarrow y_1=y_2$

Le principali definizioni

- **Somma**: $\dot{z}_1+\dot{z}_2=(x_{1,}y_1)+(x_{2,}y_2)=(x_1+x_{2,}y_1+y_2)$
- **Prodotto**: $\dot{z}_1\cdot\dot{z}_2=(x_{1,}y_1)\cdot(x_{2,}y_2)=(x_1x_2-y_1y_{2,}x_1y_2+y_1x_2)$
- La *somma* ed il *prodotto* godono delle proprietà associativa, commutativa e distributiva.
- L'**elemento neutro per la somma** è l'elemento nullo $(0,0)$
  $\dot{z}+(0,0)=(x,y)+(0,0)=(x,y)=\dot{z}$
- L'***elemento neutro per il prodotto*** è *l'**unità reale*** $(1,0)=1=u$
  $\dot{z}\cdot(1,0)=(x,y)\cdot(1,0)=(x\cdot1-y\cdot0,x\cdot0+y\cdot1)=(x,y)=\dot{z}$
- L'**unità immaginaria** è il numero complesso $(0,1)=j=\sqrt{-1}$
  essendo j definita come $j^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot0-1\cdot1,0\cdot1+1\cdot0)=-1$
- I numeri complessi **non possono essere ordinati** in modo compatibile con le operazioni di somma e prodotto.

Le principali definizioni

- L'**opposto** di $\dot{z}=(x,y)$ è $-\dot{z}=-(x,y)=(-x,-y)$ infatti

  $$\dot{z}+(-\dot{z})=(x,y)+(-x,-y)=(0,0)$$

- L'**inverso** di $\dot{z}=(x,y)$ è $\frac{1}{\dot{z}}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ infatti

  $$\dot{z}\cdot\frac{1}{\dot{z}}=(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=(1,0)$$

- Gli *opposti* e gli *inversi* si individuano reciprocamente e consentono di definire la *differenza* ed il *quoziente*.
- **Differenza**:

  $$\dot{z}_1-\dot{z}_2=(x_{1,}\,y_1)-(x_{2,}\,y_2)=(x_{1,}\,y_1)+(-x_{2,}-y_2)=(x_1-x_{2,}\,y_1-y_2)$$

Le principali definizioni

- **Quoziente**: $\dfrac{\dot z_1}{\dot z_2}=\dfrac{(x_1,y_1)}{(x_2,y_2)}=(x_1,y_1)\cdot\left(\dfrac{x_2}{x_2^2+y_2^2},-\dfrac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)=$

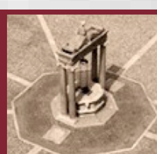
$$=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

- Il ***complesso coniugato***, $\dot z^*$, di un numero complesso, $\dot z$, si ottiene cambiando segno alla parte immaginaria, e cioè (complesso) $\dot z=(x,y)\ \rightarrow\ (x,-y)=\dot z^*$ (complesso coniugato)

$$\dot z+\dot z^*=(x,y)+(x,-y)=2\,x=2\,\Re(\dot z)\ \rightarrow\ \Re(\dot z)=\frac{\dot z+\dot z^*}{2}$$

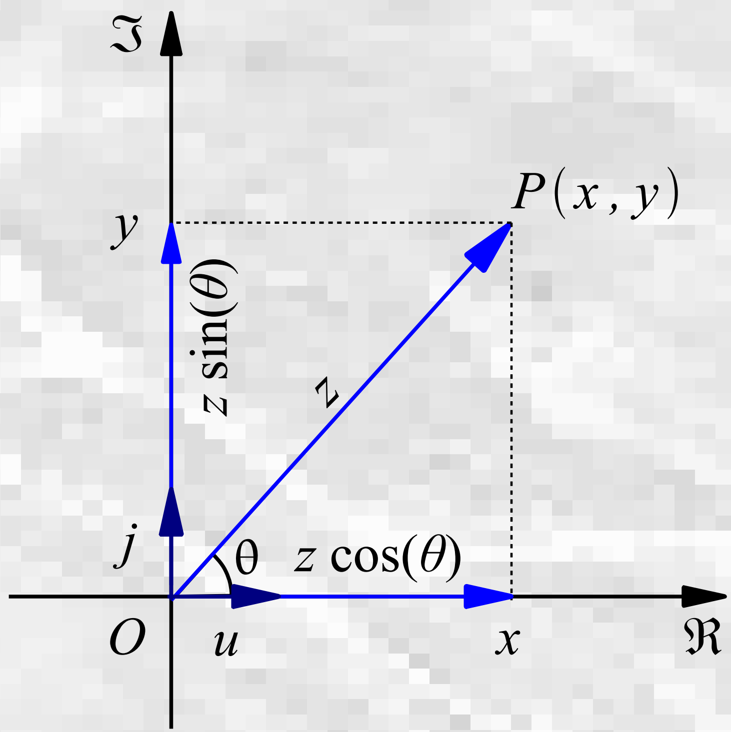
$$\dot z-\dot z^*=(x,y)-(x,-y)=2\,y=2\,\Im(\dot z)\ \rightarrow\ \Im(\dot z)=\frac{\dot z-\dot z^*}{2}$$

$$\dot z\cdot\dot z^*=(x,y)\cdot(x,-y)=x^2+y^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=\|\dot z^*\|^2=\|\dot z\|^2$$



Le rappresentazioni dei numeri complessi

Piano di Gauss-Argand



$$\dot{z} = (x, y) \quad \Leftrightarrow \quad P(x, y) \in O \Re \Im$$

- $\dot{z} = (x, y) = x + j\, y$
- $\dot{z} = (x, y) = z\,(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$
- $\dot{z} = (x, y) = z\, e^{j\theta}$
- $\dot{z} = (x, y) = z \underline{/\theta}$

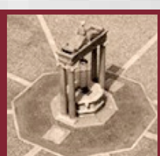
con $z = |\dot{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\theta = \arg(\dot{z}) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$x = z \cos(\theta)$ e $y = z \sin(\theta)$

Formula di Eulero:

$$z\, e^{j\theta} = z\,(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$$



Le operazioni fondamentali

- **Somma**:

$$\dot{z}_3=\dot{z}_1+\dot{z}_2=(x_1+j\,y_1)+(x_2+j\,y_2)=(x_1+x_2)+j\,(y_1+y_2)=x_3+j\,y_3$$

- **Moltiplicazione**:

$$\dot{z}_3=\dot{z}_1\cdot\dot{z}_2=(x_1+j\,y_1)\cdot(x_2+j\,y_2)=(x_1\,x_2-y_1\,y_2)+j\,(x_1\,y_2+y_1\,x_2)$$

$$\dot{z}_3=\dot{z}_1\cdot\dot{z}_2=z_1(\cos\theta_1+j\sin\theta_1)\,z_2(\cos\theta_2+j\sin\theta_2)=$$

$$=z_1\,z_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+j\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\dot{z}_3=\dot{z}_1\cdot\dot{z}_2=z_1\,e^{j\theta_1}\cdot z_2\,e^{j\theta_2}=z_1\,z_2\,e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\dot{z}_3=\dot{z}_1\cdot\dot{z}_2=z_1\angle\theta_1\cdot z_2\angle\theta_2=z_1\,z_2\angle(\theta_1+\theta_2)$$

- **Divisione**:

$$\dot{z}_3=\frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_2}=\frac{(x_1+j\,y_1)}{(x_2+j\,y_2)}=\left(\frac{x_1\,x_2+y_1\,y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)+j\left(\frac{x_2\,y_1-x_1\,y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

...

Le operazioni fondamentali

...
$$\dot{z}_3=\frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_2}=\frac{z_1(\cos\theta_1+j\sin\theta_1)}{z_2(\cos\theta_2+j\sin\theta_2)}=\frac{z_1}{z_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+j\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

$$\dot{z}_3=\frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_2}=\frac{z_1 e^{j\theta_1}}{z_2 e^{j\theta_2}}=\frac{z_1}{z_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\dot{z}_3=\frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_2}=\frac{z_1\underline{/\,\theta_1}}{z_2\underline{/\,\theta_2}}=\frac{z_1}{z_2}\underline{/\,(\theta_1-\theta_2)}$$

- **Potenza**:

$$\dot{z}^n=\dot{z}\cdot\dot{z}\cdot\ldots\cdot\dot{z}=(x+jy)\cdot(x+jy)\cdot\ldots\cdot(x+jy)$$ (n volte)

$$\dot{z}^n\cdot\dot{z}^m=\dot{z}^{(n+m)} \qquad \frac{\dot{z}^n}{\dot{z}^m}=\dot{z}^{(n-m)} \qquad \left(\dot{z}^n\right)^m=\dot{z}^{(n+m)} \qquad \dot{z}^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\dot{z}} \qquad \dot{z}_1{}^n\cdot\dot{z}_2{}^n=\dot{z}_1\dot{z}_2{}^n$$

...

Le operazioni fondamentali

… $\dot{z}^n = \left[z\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)\right]^n = z^n\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)^n = \underbrace{z^n\left[\cos\left(n\theta\right) + j\sin\left(n\theta\right)\right]}_{\text{Formula di De Moivre}}$

$$\dot{z}^n = \left(z\,e^{j\theta}\right)^n = z^n\,e^{jn\theta}$$

$$\dot{z}^n = \left(z\,\angle\theta\right)^n = z^n\,\angle\left(n\theta\right)$$

- **Radice**:

$$\sqrt[n]{\dot{z}} = \sqrt[n]{z\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)} = \sqrt[n]{z}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$\sqrt[n]{\dot{z}} = \sqrt[n]{z\,e^{j\theta}} = \sqrt[n]{z}\,e^{j\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$$

$$\dot{z}^n = \sqrt[n]{z\,\angle\theta} = \sqrt[n]{z}\,\angle\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

Le operazioni fondamentali

- **Complesso coniugato:**

$$\dot{z}=x+jy \qquad \dot{z}^{*}=x-jy=A(\cos\theta-j\sin\theta)=Ae^{-j\theta}=A\angle-\theta$$

- **Alcune espressioni notevoli**:

$$e^{\pm j\pi}=1\angle\pm180°=-1 \qquad e^{\pm j\frac{\pi}{2}}=\pm e^{j\frac{\pi}{2}}=1\angle\pm90°=\pm j$$

$$\sqrt{j}=\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\pm e^{j\frac{\pi}{4}}=\frac{\pm(1+j)}{\sqrt{2}} \qquad \sqrt{-j}=\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\pm e^{-j\frac{\pi}{4}}=\frac{\pm(1-j)}{\sqrt{2}}$$

- **Radice m-esima dell'unità positiva:** $x^{m}-1=0$

$$\dot{\alpha}_{m}^{1}=\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)-j\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)=e^{-j\theta_{m}}$$ (radice primitiva)

$$\dot{\alpha}_{m}^{0}(=1),\dot{\alpha}_{m}^{1},\dot{\alpha}_{m}^{2},\ldots,\dot{\alpha}_{m}^{(m-1)}$$ (sono una stella a somma nulla)

- **L'operatore di rotazione *α* (radice cubica dell'unità)**:

$$\dot{\alpha}^{0}=e^{-j0}=1 \qquad \dot{\alpha}^{1}=e^{-j\frac{2}{3}\pi}=1\angle-120° \qquad \dot{\alpha}^{2}=e^{-j\frac{4}{3}\pi}=1\angle-240°$$

Le operazioni fondamentali

- Siano dati $\dot{Z}_1 = (5{,}5) \quad \dot{Z}_2 = (3,-7) \quad \dot{Z}_3 = (-2{,}6) \quad \dot{Z}_4 = (-4,-3)$
  calcolare $\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2 \quad \dot{Z}_1 - \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4 \quad \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3 \quad \dot{Z}_1 / \dot{Z}_4 \quad \dot{Z}_3 / \dot{Z}_1 \quad \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_4$
  e rappresentare graficamente i risultati ottenuti.

- Siano dati $\dot{Z}_1 = 3 + j3 \quad \dot{Z}_2 = 7 - j4 \quad \dot{Z}_3 = -3 + j5 \quad \dot{Z}_4 = -6 - j5$
  convertire in numeri complessi assegnati in forma trigonometrica, polare ed esponenziale.

- Siano dati $\dot{Z}_1 = 6\, e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \dot{Z}_2 = 5 \angle \frac{\pi}{4} \quad \dot{Z}_3 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} - j\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \dot{Z}_4 = -3\, e^{j\frac{\pi}{6}}$
  convertire in forma cartesiana i numeri complessi assegnati e rappresentarli graficamente.

La soluzione di un sistema lineare a coefficienti complessi mediante l'equivalente sistema reale

- Sistema a coefficienti complessi di ordine n:

$$\underbrace{[\dot{\mathrm{A}}]}_{\mathrm{n\,x\,n}} \cdot \underbrace{[\dot{\mathrm{X}}]}_{\mathrm{n\,x\,1}} = \underbrace{[\dot{\mathrm{B}}]}_{\mathrm{n\,x\,1}}$$

$$\left\{\underbrace{\Re([\dot{\mathrm{A}}])}_{\mathrm{n\,x\,n}} + j\,\underbrace{\Im([\dot{\mathrm{A}}])}_{\mathrm{n\,x\,n}}\right\} \cdot \left\{\underbrace{\Re([\dot{\mathrm{X}}])}_{\mathrm{n\,x\,1}} + j\,\underbrace{\Im([\dot{\mathrm{X}}])}_{\mathrm{n\,x\,1}}\right\} = \left\{\underbrace{\Re([\dot{\mathrm{B}}])}_{\mathrm{n\,x\,1}} + j\,\underbrace{\Im([\dot{\mathrm{B}}])}_{\mathrm{n\,x\,1}}\right\}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Re([\dot{\mathrm{A}}]) & -\Im([\dot{\mathrm{A}}]) \\ \Im([\dot{\mathrm{A}}]) & \Re([\dot{\mathrm{A}}]) \end{bmatrix}}_{\mathrm{2n\,x\,2n}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Re([\dot{\mathrm{X}}]) \\ \Im([\dot{\mathrm{X}}]) \end{bmatrix}}_{\mathrm{2n\,x\,1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Re([\dot{\mathrm{B}}]) \\ \Im([\dot{\mathrm{B}}]) \end{bmatrix}}_{\mathrm{2n\,x\,1}}$$

Si perviene al sistema reale

$$\underbrace{[\mathrm{A}]}_{\mathrm{2n\,x\,2n}} \cdot \underbrace{[\mathrm{X}]}_{\mathrm{2n\,x\,1}} = \underbrace{[\mathrm{B}]}_{\mathrm{2n\,x\,1}}$$

La soluzione di un sistema lineare a coefficienti complessi mediante l'equivalente sistema reale

- Soluzione del sistema equivalente reale di ordine 2n:

$$\underbrace{[A]}_{2n \times 2n} \cdot \underbrace{[X]}_{2n \times 1} = \underbrace{[B]}_{2n \times 1} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{[X]}_{2n \times 1} = \underbrace{[A]^{-1}}_{2n \times 2n} \cdot \underbrace{[B]}_{2n \times 1}$$

$$\underbrace{[X]}_{2n \times 1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ \vdots \\ X_{2n} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ \vdots \\ X_{2n} \end{bmatrix} = \underbrace{[\dot{X}]}_{n x 1}$$

che è la soluzione cercata

$$\underbrace{[\dot{X}]}_{n \times 1} = \underbrace{[\dot{A}]^{-1}}_{n \times n} \cdot \underbrace{[\dot{B}]}_{n \times 1}$$

La soluzione di un sistema lineare a coefficienti complessi mediante l'equivalente sistema reale

- Esempio numerico

$$\underbrace{\left[\dot{A}\right]}_{n\,x\,n}\cdot\underbrace{\left[\dot{X}\right]}_{n\,x\,1}=\underbrace{\left[\dot{B}\right]}_{n\,x\,1}\qquad \underbrace{\begin{bmatrix}1.0+j1.0 & 0.1-j3.0 & 2.0+j2.0\\ 0.1+j2.0 & 2.0+j3.0 & 2.0-j1.0\\ 0.3+j1.0 & 3.0+j3.0 & 3.0-j0.2\end{bmatrix}}_{3\,x\,3}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\\ \dot{X}_3\end{bmatrix}}_{3\,x\,1}=\underbrace{\begin{bmatrix}2.0+j0.1\\ 1.0-j0.3\\ 0.3-j0.2\end{bmatrix}}_{3\,x\,1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\\ \dot{X}_3\end{bmatrix}}_{3\,x\,1}=\underbrace{\begin{bmatrix}1.0+j1.0 & 0.1-j3.0 & 2.0+j2.0\\ 0.1+j2.0 & 2.0+j3.0 & 2.0-j1.0\\ 0.3+j1.0 & 3.0+j3.0 & 3.0-j0.2\end{bmatrix}^{-1}}_{3\,x\,3}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}2.0+j1.0\\ 1.0-j0.3\\ 0.3-j0.2\end{bmatrix}}_{3\,x\,1}=\underbrace{\begin{bmatrix}0.071-j0.796\\ -0.162+j0.213\\ 0.206-j0.048\end{bmatrix}}_{3\,x\,1}$$

La soluzione di un sistema lineare a coefficienti complessi mediante l'equivalente sistema reale

...

$$\underbrace{[\mathrm{A}]}_{6\times 6}=\underbrace{\left[\begin{array}{c|c}\Re([\dot{\mathrm{A}}]) & -\Im([\dot{\mathrm{A}}]) \\ \hline \Im([\dot{\mathrm{A}}]) & \Re([\dot{\mathrm{A}}])\end{array}\right]}_{6\times 6}=\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1.0 & 0.1 & 2.0 & -1.0 & 3.0 & -2.0 \\ 0.1 & 2.0 & 2.0 & -2.0 & -3.0 & 1.0 \\ 0.3 & 3.0 & 3.0 & -1.0 & -3.0 & 0.2 \\ \hline 1.0 & -3.0 & 2.0 & 1.0 & 0.1 & 2.0 \\ 2.0 & 3.0 & -1.0 & 0.1 & 2.0 & 2.0 \\ 1.0 & 3.0 & -0.2 & 0.3 & 3.0 & 3.0\end{array}\right]}_{6\times 6}$$

$$\underbrace{[\mathrm{B}]}_{6\times 1}=\underbrace{\left[\begin{array}{c}\Re([\dot{\mathrm{B}}]) \\ \hline \Im([\dot{\mathrm{B}}])\end{array}\right]}_{6\times 1}=\underbrace{\left[\begin{array}{c}2.0 \\ 1.0 \\ 0.3 \\ \hline 0.1 \\ -0.3 \\ -0.2\end{array}\right]}_{6\times 1}$$

...

Numeri complessi

La soluzione di un sistema lineare a coefficienti complessi mediante l'equivalente sistema reale

...

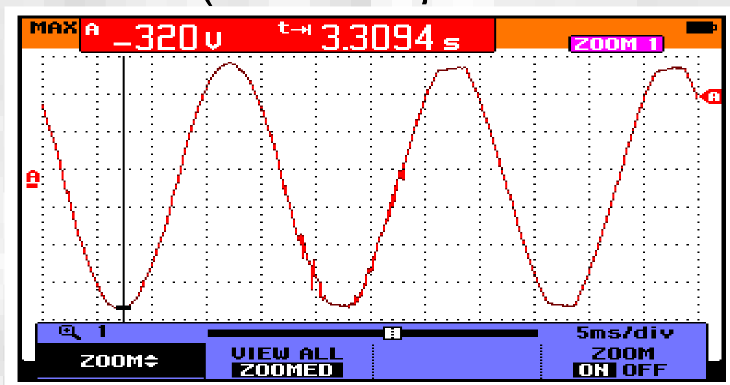
$$\underbrace{[X]}_{6\,x\,1}=\underbrace{[A]}_{6\,x\,6}{}^{-1}\cdot\underbrace{[B]}_{6\,x\,1}=\underbrace{\begin{bmatrix}0.071\\-0.162\\0.206\\-0.796\\0.213\\-0.048\end{bmatrix}}_{6\,x\,1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0.071\\-0.162\\0.206\end{bmatrix}}_{3x1}+j\underbrace{\begin{bmatrix}-0.796\\0.213\\-0.048\end{bmatrix}}_{3x1}=\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix}0.071-j0.796\\-0.162+j0.213\\0.206-j0.048\end{bmatrix}}_{3x1}=\underbrace{[\dot{X}]}_{3x1}}$$

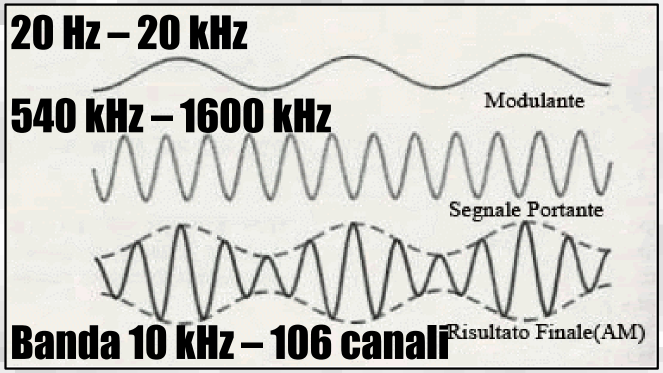
Grandezze sinusoidali

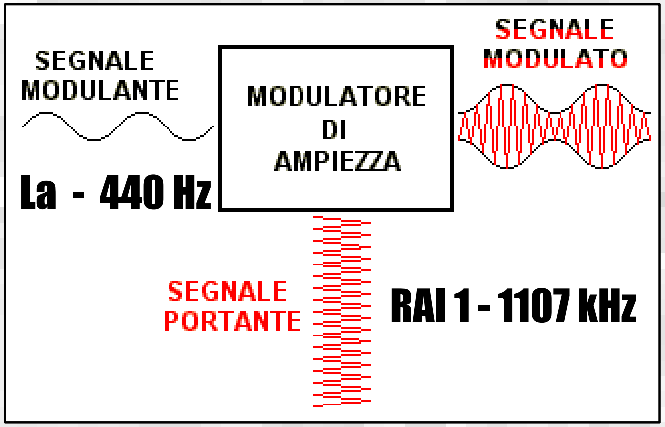
… nei sistemi elettrici di potenza

Molti problemi di pratico interesse ingegneristico sono caratterizzati da *forzanti* e/o *risposte* che idealmente tendono ad andamenti di tipo sinusoidale, ovvero possono essere ricondotti alla somma di componenti sinusoidali. (*oscilloscopio Fluke 199c*)



… nelle trasmissioni a radiofrequenza





Uno dei sistemi impiegati per la trasmissione delle informazioni utilizzando un segnale a radiofrequenza è la modulazione di ampiezza **AM** (i.e., *amplitude modulation*) che consiste nel ***modulare*** l'ampiezza del segnale radio che si intende utilizzare per la trasmissione (detto ***portante***) in maniera proporzionale all'ampiezza del segnale che si intende trasmettere (detto ***modulante***) e che contiene l'***informazione***.

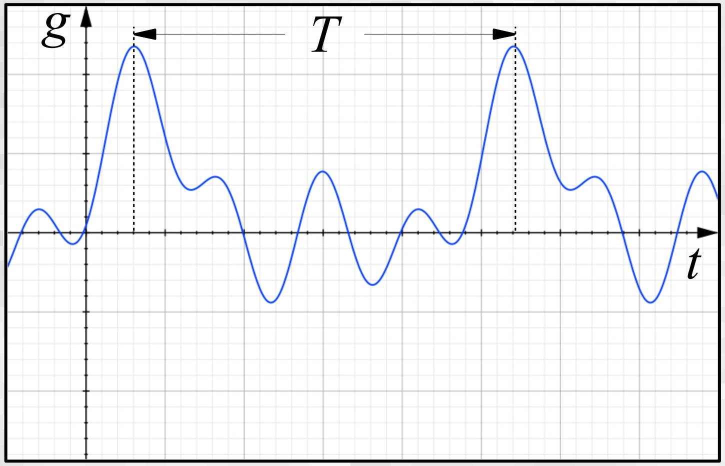
Le principali definizioni

- **Grandezze periodiche**

$$g(t)=g(t+nT)$$

con T (periodo) s

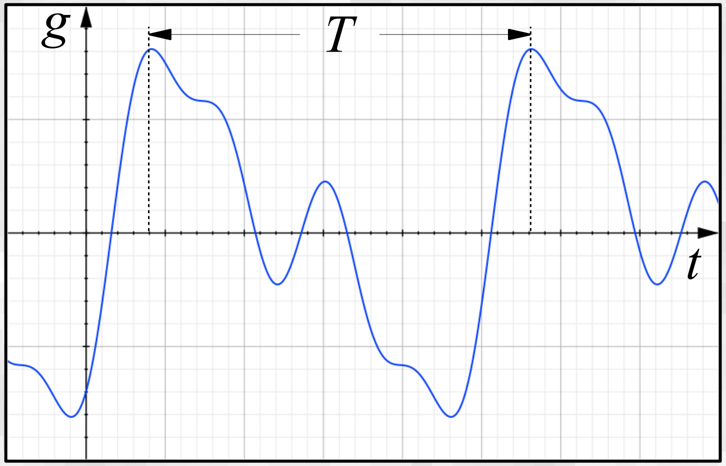
$n=1,2,\ldots i-1, i, i+1,\ldots$



- **Grandezze alternate**

Sono grandezze periodiche che soddisfano alla condizione

$$g_m=\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,dt=0$$



Le principali definizioni

- Le **grandezze sinusoidali** sono *grandezze periodiche* ed *alternate* esprimibili mediante funzioni del tipo

- seno $g(t) = G_M \sin(\omega t)$

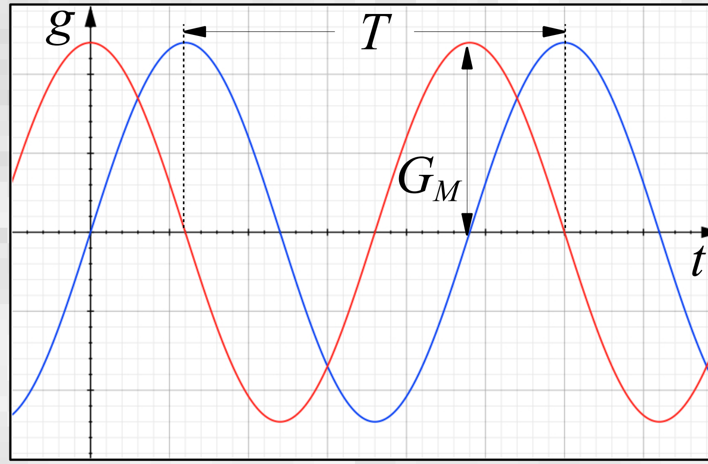
- coseno $g(t) = G_M \cos(\omega t)$

Fra *seno* e *coseno* sussiste la relazione

$$\sin(\omega t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right)$$

ricordando la $\cos(-x) = \cos(x)$

si ha $\sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$



Ampiezza G_M

Frequenza $f = \frac{1}{T}$ Hz

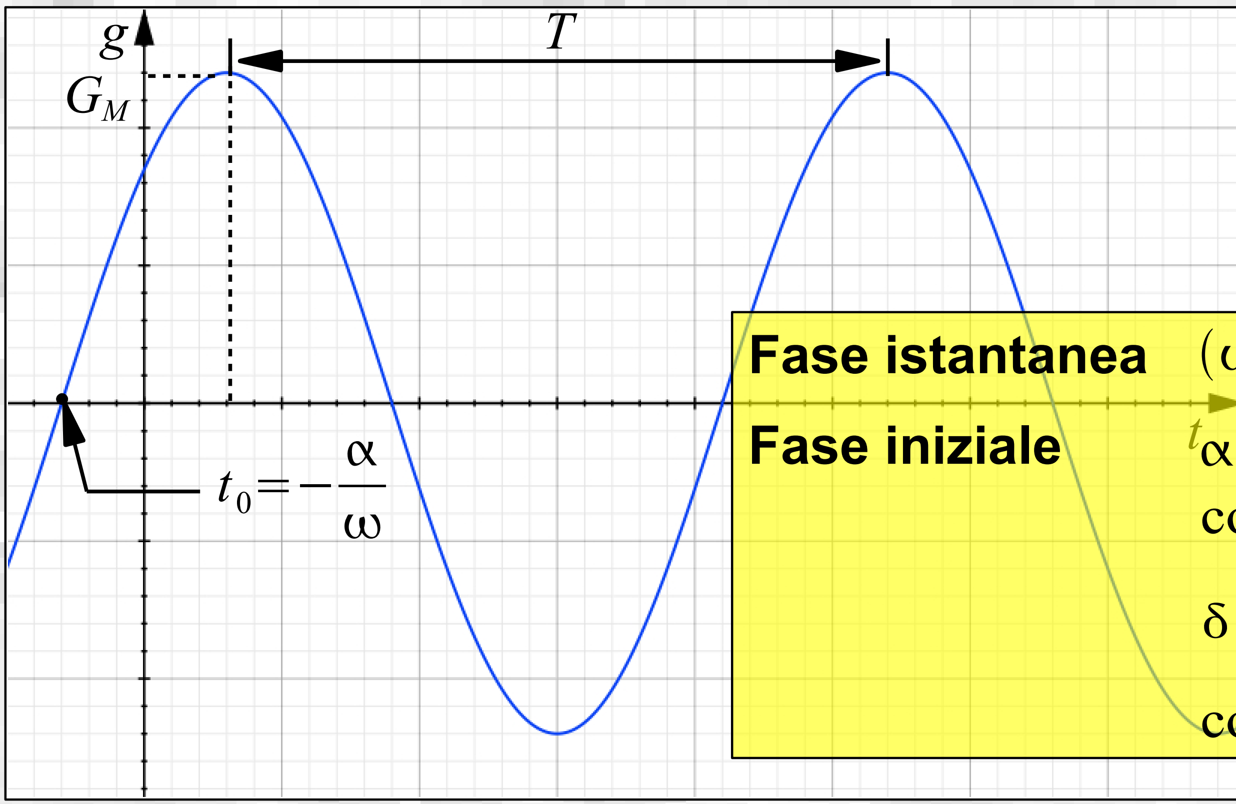
Pulsazione $\omega = \frac{2\pi}{T}$ rad s^{-1}

$\omega = 2\pi f$ rad s^{-1}

Grandezze sinusoidali

Le principali definizioni

$$g(t)=G_M \sin(\omega t+\alpha) \quad \text{o} \quad g(t)=G_M \cos\left(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=G_M \cos(\omega t+\delta)$$



Fase istantanea $(\omega t+\alpha)$ rad

Fase iniziale α rad

con $|\alpha| \leqslant \pi$

$\delta=\alpha-\frac{\pi}{2}$ rad

con $|\delta| \leqslant \pi$

Le principali definizioni

- **Valore efficace** $G:=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T g(t)^2\,dt}=\frac{G_M}{\sqrt{2}}\simeq 0.707\,G_M$

  *Con l'espressione "**tensione alternata di 230 V**" ci si riferisce al valore efficace di una tensione, tipicamente sinusoidale, di ampiezza (o valore massimo) pari a 325 V.*

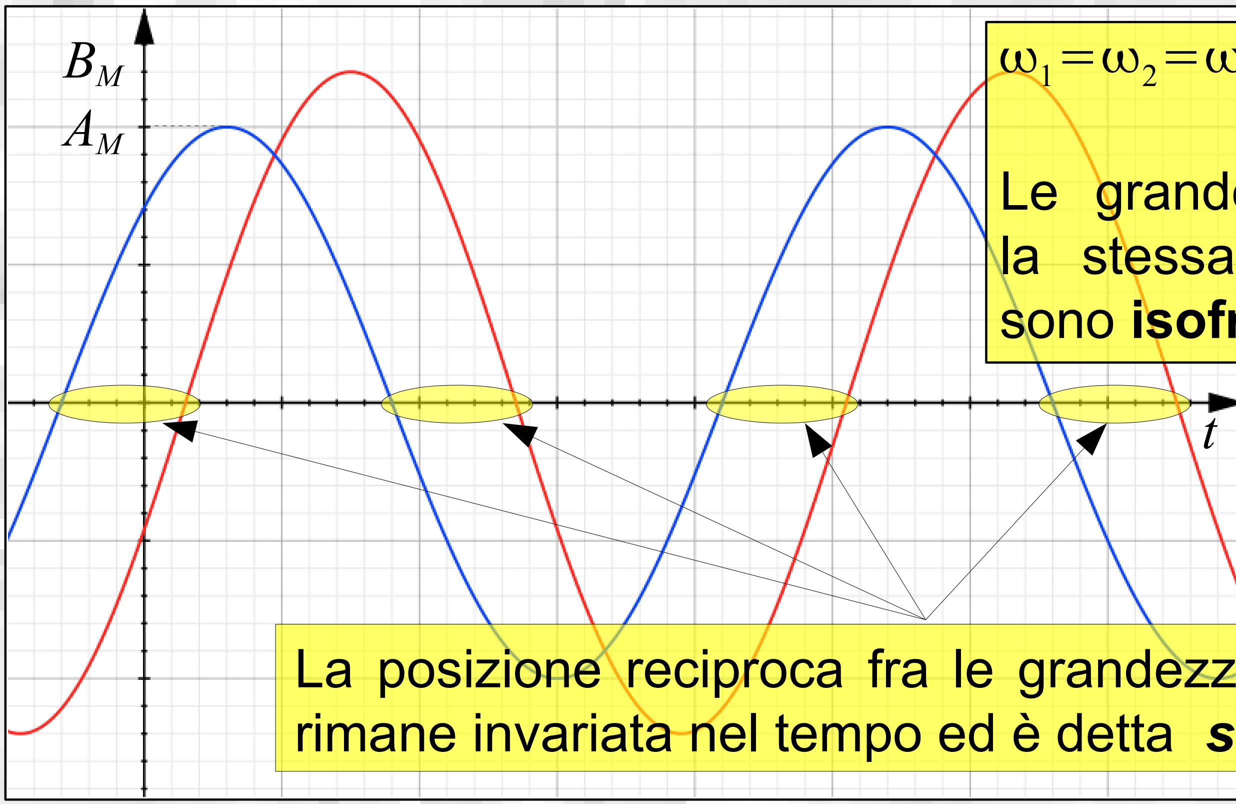
- **Valore medio** $G_m=\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,dt=0$ (*grandezze alternate*)

$$G_m:=\frac{1}{T}\int_0^T |g(t)|\,dt=\frac{2\,G_M}{\pi}\simeq 0.636\,G_M$$

- **Fattore di forma** $k_f:=\frac{G}{G_m}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\simeq 1.11$

Le grandezze sinusoidali isofrequenziali

$$a(t)=\sqrt{2}\,A\sin(\omega_1 t+\alpha) \qquad b(t)=\sqrt{2}\,B\sin(\omega_2 t+\beta)$$



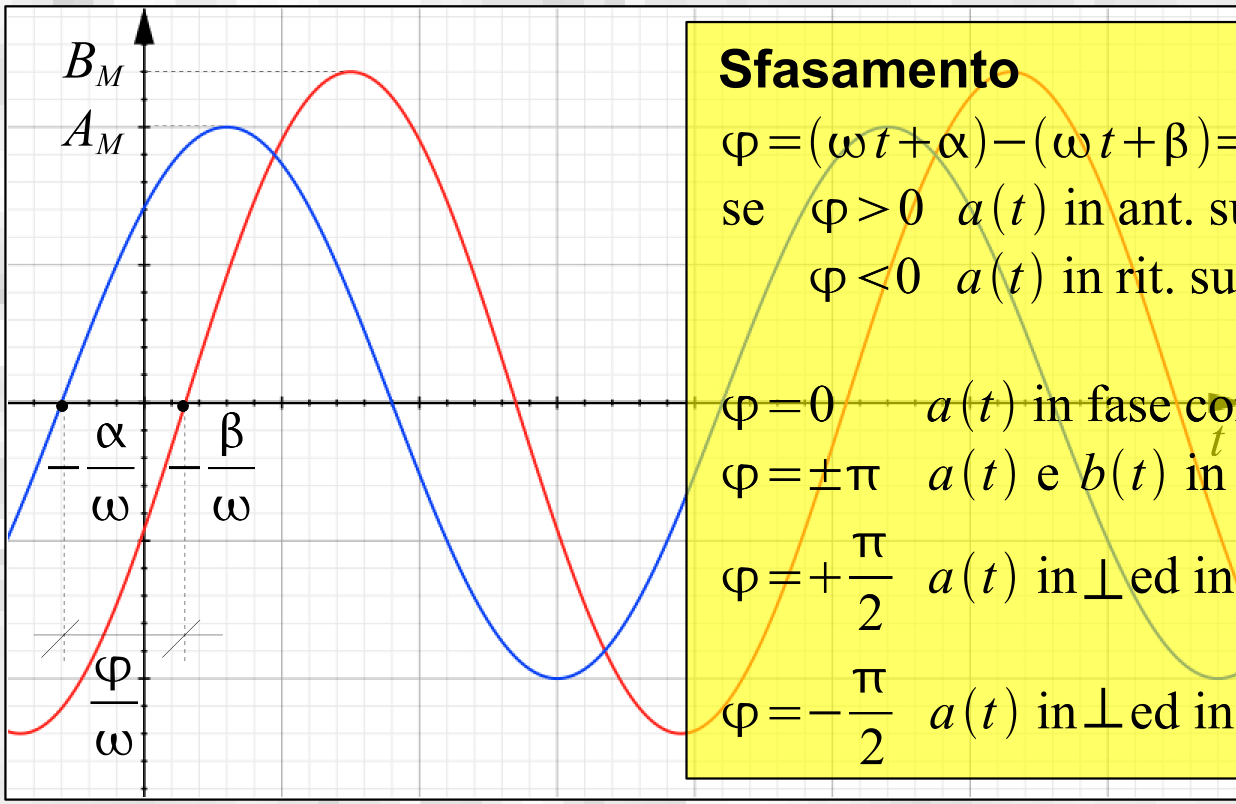
$$\omega_1=\omega_2=\omega \rightarrow T_1=T_2=T$$
$$\hookrightarrow f_1=f_2=f$$

Le grandezza hanno la stessa frequenza: sono **isofrequenziali.**

La posizione reciproca fra le grandezze *a(t)* e *b(t)* rimane invariata nel tempo ed è detta ***sfasamento.***

Le grandezze sinusoidali isofrequenziali

$a(t)=\sqrt{2}\,A\sin(\omega t+\alpha)$ $\quad$ $b(t)=\sqrt{2}\,B\sin(\omega t+\beta)$



Sfasamento

$\varphi=(\omega t+\alpha)-(\omega t+\beta)=\alpha-\beta$

se $\varphi>0$ $\quad a(t)$ in ant. su $b(t)$

$\varphi<0$ $\quad a(t)$ in rit. su $b(t)$

$\varphi=0$ $\quad a(t)$ in fase con $b(t)$

$\varphi=\pm\pi$ $\quad a(t)$ e $b(t)$ in opp. di fase

$\varphi=+\frac{\pi}{2}$ $\quad a(t)$ in $\perp$ ed in ant. su $b(t)$

$\varphi=-\frac{\pi}{2}$ $\quad a(t)$ in $\perp$ ed in rit. su $b(t)$

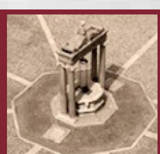
Le operazioni fondamentali

- **Somma** fra due grandezze sinusoidali ***a(t)*** e ***b(t)***

$$
\begin{aligned}
c(t) &= a(t)+b(t)=\sqrt{2}\,A\sin(\omega t+\alpha)+\sqrt{2}\,B\sin(\omega t+\beta)= \\
&=\sqrt{2}\,A(\cos(\alpha)\sin(\omega t)+\sin(\alpha)\cos(\omega t))+ \\
&\quad\sqrt{2}\,B(\cos(\beta)\sin(\omega t)+\sin(\beta)\cos(\omega t))= \\
&=\sqrt{2}(A\cos(\alpha)+B\cos(\beta))\sin(\omega t)+ \\
&\quad\sqrt{2}(A\sin(\alpha)+B\sin(\beta))\cos(\omega t)= \\
&=\sqrt{2}\,C\cos(\gamma)\sin(\omega t)+\sqrt{2}\,C\sin(\gamma)\cos(\omega t)= \\
&=\sqrt{2}\,C\sin(\omega t+\gamma)
\end{aligned}
$$

avendo posto

$$
\begin{aligned}
C\cos(\gamma) &= A\cos(\alpha)+B\cos(\beta) \\
C\sin(\gamma) &= A\sin(\alpha)+B\sin(\beta)
\end{aligned}
$$



Le operazioni fondamentali

- **Prodotto** di una grandezze sinusoidale ***a(t)* per uno scalare** *k*

$$c(t)=k\ a(t)=k\ \sqrt{2}A\sin(\omega t+\alpha)=\sqrt{2}C\sin(\omega t+\alpha) \quad \text{con} \quad C=k\ A$$

- **Prodotto** di due grandezze sinusoidali ***a(t)*** e ***b(t)***

$$\begin{aligned}c(t)=a(t)\cdot b(t)=\sqrt{2}A\sin(\omega t+\alpha)\cdot\sqrt{2}B\sin(\omega t+\beta)=&\\ =2AB\sin(\omega t+\alpha)\sin(\omega t+\beta)=&\\ =2AB\frac{1}{2}\left[\cos(\omega t+\alpha-\omega t-\beta)-\cos(\omega t+\alpha+\omega t+\beta)\right]=&\\ =AB\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(2\omega t+\alpha+\beta)\right]=&\\ =AB\cos(\varphi)-AB\cos(2\omega t+2\beta+\varphi)=&\\ =AB\cos(\varphi)-AB\cos(2\omega t+2\beta)\cos\varphi+&\\ +AB\sin(2\omega t+2\beta)\sin\varphi=&\\ =AB\cos(\varphi)\left[1-\cos(2\omega t+2\beta)\right]+AB\sin\varphi\sin(2\omega+2\beta)&\end{aligned}$$

Le operazioni fondamentali

- **Derivata** di una grandezze sinusoidale ***a(t)***

$$c(t)=\frac{d}{dt}a(t)=\frac{d}{dt}\left[\sqrt{2}A\sin(\omega t+\alpha)\right]=\sqrt{2}(\omega A)\cos(\omega t+\alpha)=$$

$$=\sqrt{2}(\omega A)\sin(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}C\sin(\omega t+\gamma)$$

$$\text{con}\quad C=\omega A \quad \text{e} \quad \gamma=\alpha+\frac{\pi}{2}$$

- **Integrale** di una grandezza sinusoidale ***a(t)***

$$c(t)=\int a(t)\,dt=\int \sqrt{2}A\sin(\omega t+\alpha)\,dt=-\sqrt{2}\frac{A}{\omega}\cos(\omega t+\alpha)+c=$$

$$=-\sqrt{2}\frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})+c=\sqrt{2}C\sin(\omega t+\gamma)+c$$

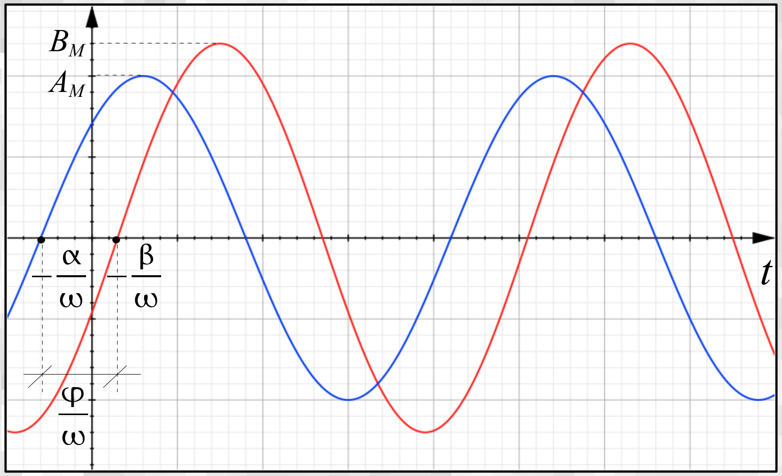
$$\text{con}\quad C=\frac{A}{\omega} \quad \text{e} \quad \gamma=\alpha-\frac{\pi}{2} \qquad \left[-\sin(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})=\sin(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2})\right]$$

Un nuovo ente matematico: il fasore

- Le operazioni fra grandezze sinusoidali isofrequenziali, pur non presentando particolari problemi di carattere concettuale, possono risultare particolarmente onerose.

- Per ovviare a queste possibili difficoltà, si può associare in modo biunivoco a suddette sinusoidi un ente matematico di diversa natura, ovvero una quantità complessa detta ***fasore***, ed eseguire con questo nuovo ente matematico operazioni corrispondenti a quelle sulle sinusoidi ma operativamente più semplici; dai risultati di queste operazioni si potrà poi risalire ai risultati reali fra le grandezze sinusoidali attraverso la corrispondenza biunivoca inizialmente stabilita.

Dalle grandezze isofrequenziali ai fasori



$$a(t)=\sqrt{2}A\sin(\omega t+\alpha)$$
$$\rightarrow A, \cancel{\omega}, \alpha$$
$$b(t)=\sqrt{2}B\sin(\omega t+\beta)$$
$$\rightarrow B, \cancel{\omega}, \beta$$

Formula di Eulero:
$$z e^{j\theta}=z\left(\cos(\theta)+j\sin(\theta)\right)$$

$$\Im[z e^{j\theta}]=\Im[z\left(\cos(\theta)+j\sin(\theta)\right)] \Rightarrow$$

$$\Im[z e^{j\theta}]\Leftrightarrow z\ \sin(\theta)$$

$$a(t)=\sqrt{2}A\sin(\omega t+\alpha)=\Im\left[\sqrt{2}A\left(\cos(\omega t+\alpha)+j\sin(\omega t+\alpha)\right)\right]=$$
$$=\Im\left[\sqrt{2}A e^{j(\omega t+\alpha)}\right]=\sqrt{2}\Im\left[A e^{j\alpha}e^{j\omega t}\right]=\sqrt{2}\Im\left[\tilde{A}e^{j\omega t}\right] \qquad \text{con} \quad \tilde{A}=A e^{j\alpha}$$

$$a(t)=\sqrt{2}A\sin(\omega t+\alpha)\Leftrightarrow\sqrt{2}\Im\left[\tilde{A}e^{j\omega t}\right] \text{ ponendo } \tilde{A}(t)=\tilde{A}e^{j\omega t} \Leftarrow \textbf{fasore}$$

Le principali definizioni

- Sul piano di Gauss-Argand, i ***fasori*** di grandezze isofrequenziali ruotano in verso antiorario con la stessa velocità angolare ω (= costante) mantenendo invariata la loro posizione reciproca

$$a(t)=\sqrt{2}\,A\sin(\omega t+\alpha)=\sqrt{2}\,\Im[\tilde{A}\,e^{j\omega t}]$$

$$b(t)=\sqrt{2}\,B\sin(\omega t+\beta)=\sqrt{2}\,\Im[\tilde{B}\,e^{j\omega t}]$$

- Convenendo di rappresentare sul tale piano solo grandezze isofrequenziali con pulsazione ω, le quantità $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ contengono tutte e sole le informazioni necessarie ad individuare univocamente le sinusoidi, i.e. (A,α) e (B,β).

Fissati ↺ ed $\boldsymbol{\omega}$ l'angolo compreso fra i due ***fasori*** è lo sfasamento φ di cui $\tilde{A}$ anticipa $\tilde{B}$.

Le principali definizioni

- La corrispondenza biunivoca stabilita con la formula di Eulero

  $$a(t)=\sqrt{2}A\sin(\omega t+\alpha)=\sqrt{2}\Im[A e^{j(\omega t+\alpha)}]=\sqrt{2}\Im[\tilde{A}e^{j\omega t}] \qquad \tilde{A}=A e^{j\alpha}$$

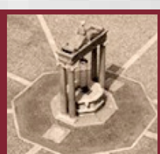
  consente di interpretare le sinusoidi come le proiezioni sull' asse $\Im$ dei ***fasori*** (i.e. *vettori rotanti*) nel piano complesso.
- La quantità $\tilde{A}$ associata ad una sinusoide è l'istantanea del ***fasore*** (i.e. del *vettore rotante*) corrispondente all'istante $t = 0$.

Le principali definizioni

- Pertanto grandezze sinusoidali isofrequenziali (i.e., aventi stessa frequenza ovvero stessa pulsazione) possono essere poste in corrispondenza biunivoca con ***fasori*** la cui componente di rotazione ($e^{j\omega t}$) può essere omessa essendo comune a tutte le grandezze sinusoidali coinvolte.
- I ***fasori*** diventano pertanto dei semplici *numeri complessi* (invarianti nel tempo, ovvero calcolati all'istante di tempo $t = 0$) rappresentativi di grandezze sinusoidali.

$$a(t)=\sqrt{2}\,A\sin(\omega t+\alpha)\rightarrow \tilde{A}(t)=A\,e^{j\alpha}\,e^{j\omega t}=\tilde{A}\,\cancel{e^{j\omega t}}\rightarrow \tilde{A}(0)=A\,e^{j\alpha}=\tilde{A}$$

- Il modulo del fasore è uguale al valore efficace della grandezza sinusoidali (i.e. $|\tilde{A}|=A$), mentre l'argomento e uguale alla sua fase iniziale (i.e. $\arg(\tilde{A})=\alpha$) per ogni assegnata frequenza (ovvero pulsazione).



Le principali definizioni

- Il termine ***fasore*** è stato introdotto per sottolineare che la sua posizione angolare rappresenta una posizione ***nel tempo*** e non ***nello spazio*** (come per l'***ente geometrico vettore***).
- **Trasformata ed antitrasformata di Steinmetz**
  - ***Trasformata***

$$a(t) \Rightarrow \tilde{A} = A \angle \alpha = A\, e^{j\alpha} = A\left(\cos\alpha + j\sin\alpha\right) = A_x + j\, A_y$$

$$b(t) \Rightarrow \tilde{B} = B \angle \beta = B\, e^{j\beta} = B\left(\cos\beta + j\sin\beta\right) = B_x + j\, B_y$$

  - ***Antitrasformata***

$$\tilde{A} \Rightarrow \sqrt{2}\,\Im[\tilde{A}\, e^{j\omega t}] = \sqrt{2}\,\Im[A\, e^{j\alpha} e^{j\omega t}] = \sqrt{2}\,\Im[A\, e^{j(\omega t+\alpha)}] = \sqrt{2}\, A \sin(\omega t + \alpha) = a(t)$$

$$\tilde{B} \Rightarrow \sqrt{2}\,\Im[\tilde{B}\, e^{j\omega t}] = \sqrt{2}\,\Im[B\, e^{j\beta} e^{j\omega t}] = \sqrt{2}\,\Im[B\, e^{j(\omega t+\beta)}] = \sqrt{2}\, B \sin(\omega t + \beta) = b(t)$$

Le operazioni fondamentali

- **Trasformazioni:**

$$a(t)=\sqrt{2}A\sin(\omega t) \qquad \Rightarrow \tilde{A}=A e^{j0}=A$$

$$b(t)=B_M\sin(\omega t+\beta) \qquad \Rightarrow \tilde{B}=\frac{B_M}{\sqrt{2}}e^{j\beta}=B e^{j\beta}$$

$$c(t)=\sqrt{2}C\cos(\omega t+\gamma)=\sqrt{2}C\sin\left(\omega t+\gamma+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \tilde{C}=C e^{j\left(\gamma+\frac{\pi}{2}\right)}=jCe^{j\gamma}$$

$$d(t)=D_M\cos(\omega t)=\sqrt{2}\frac{D}{\sqrt{2}}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \qquad \Rightarrow \tilde{D}=\frac{D}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{2}}=jD$$

$$e(t)=\sqrt{2}E\sin(\omega t+\beta x+\epsilon) \qquad \Rightarrow \tilde{E}=E e^{j(\beta x+\epsilon)}$$

$$f(t)=\sqrt{2}F e^{\alpha x}\cos(\omega t+\beta x+\phi) \qquad \Rightarrow \tilde{F}=F e^{\alpha x}e^{j\left(\beta x+\phi+\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=jFe^{\alpha x}e^{j(\beta x+\phi)}$$

Le operazioni fondamentali

- **Somma algebrica:**

$$a(t)=\sqrt{2}\,A\sin(\omega t+\alpha)$$
$$b(t)=\sqrt{2}\,B\sin(\omega t+\beta)$$

$$c(t)=a(t)\pm b(t)=?$$ (cfr pag. 27)

$$c(t)=a(t)\pm b(t)=\sqrt{2}\,\Im\left[\tilde{A}\,e^{j\omega t}\right]\pm\sqrt{2}\,\Im\left[\tilde{B}\,e^{j\omega t}\right]=\sqrt{2}\,\Im\left[(\tilde{A}\pm\tilde{B})\,e^{j\omega t}\right]$$

quindi posto $\tilde{A}=A\,e^{j\alpha}=A_x+j\,A_y$ e $\tilde{B}=B\,e^{j\beta}=B_x+j\,B_y$

$$\tilde{C}=\tilde{A}\pm\tilde{B}=(A_x+j\,A_y)\pm(B_x+j\,B_y)=(A_x\pm B_x)+j\,(A_y\pm B_y)=$$
$$=C_x+j\,C_y=C\,e^{j\gamma}$$

con $C=\sqrt{C_x^2+C_y^2}$ e $\gamma=\arctan\left(\dfrac{C_y}{C_x}\right)$

$$\boxed{c(t)=a(t)\pm b(t)=\sqrt{2}\,\Im[\tilde{C}\,e^{j\omega t}]=\sqrt{2}\,\Im[C\,e^{j(\omega t+\gamma)}]=\sqrt{2}\,C\sin(\omega t+\gamma)}$$

Le operazioni fondamentali

… Esempio numerico

$$a(t)=\sqrt{2}\,3\sin(314t-\pi/6)$$

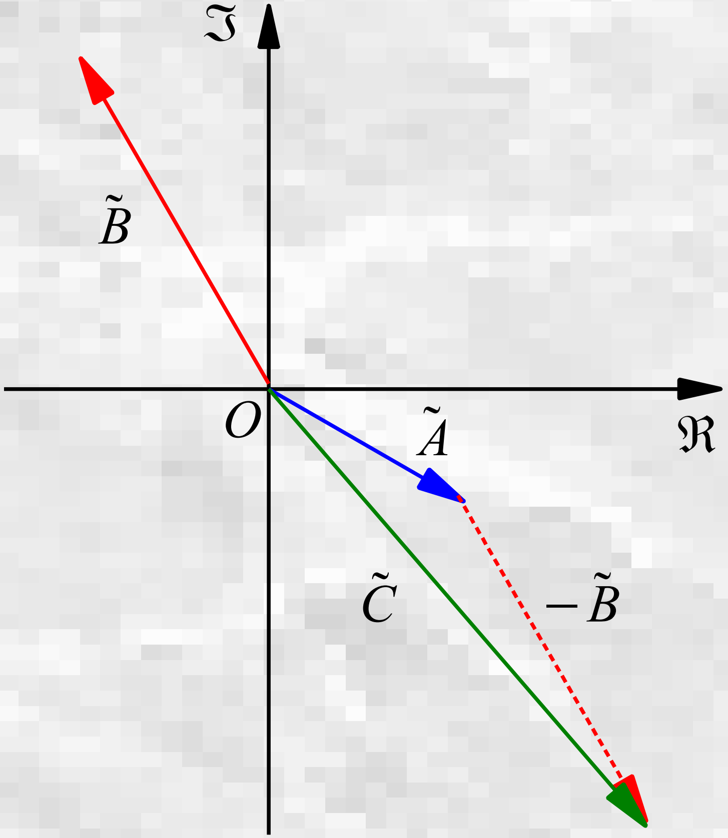
$$b(t)=\sqrt{2}\,5\cos(314t+\pi/6)$$

$$c(t)=a(t)-b(t)$$

$$\tilde{A}=3e^{-j\frac{\pi}{6}}=2.598-j\,1.500$$

$$\tilde{B}=5e^{j\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}=-2.500+j\,4.330$$

$$\tilde{C}=\tilde{A}-\tilde{B}$$



Le operazioni fondamentali

... $$\tilde{C}=\tilde{A}-\tilde{B}=(2.598-j\,1.500)-(-2.500+j\,4.330)=$$
$$=5.098-j\,5.830$$

$$\text{essendo }\; C=\sqrt{5.098^2+5.830^2}=7.745$$

$$\gamma=\arctan\left(\frac{-5.830}{5.098}\right)=-0.852\,\text{rad}$$

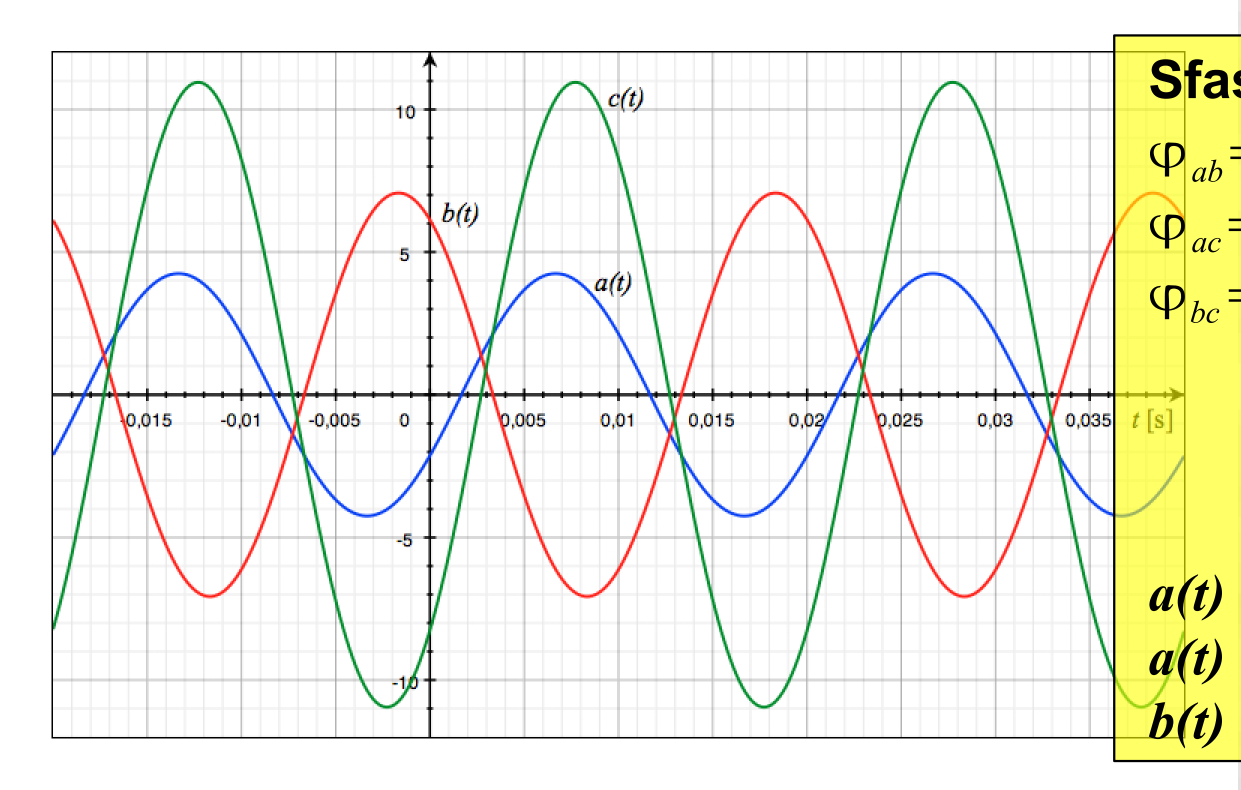
$$=7.745\,e^{-j\,0.852}$$

$$c(t)=a(t)-b(t)=\sqrt{2}\,\Im\left[\tilde{C}\,e^{j\,314\,t}\right]=\sqrt{2}\,\Im\left[7.745\,e^{j\,(314\,t+0.852)}\right]=$$
$$=\sqrt{2}\,7.745\sin(\,314\,t+0.852)$$

...

Le operazioni fondamentali

...



Sfasamenti

$\varphi_{ab} = -2.618\,\text{rad}$

$\varphi_{ac} = +0.328\,\text{rad}$

$\varphi_{bc} = +2.946\,\text{rad}$

a(t) in rit. ***b(t)***

a(t) in ant. ***c(t)***

b(t) in ant. ***c(t)***

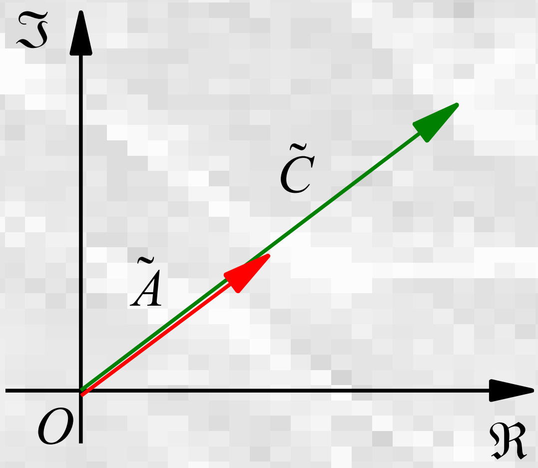
Le operazioni fondamentali

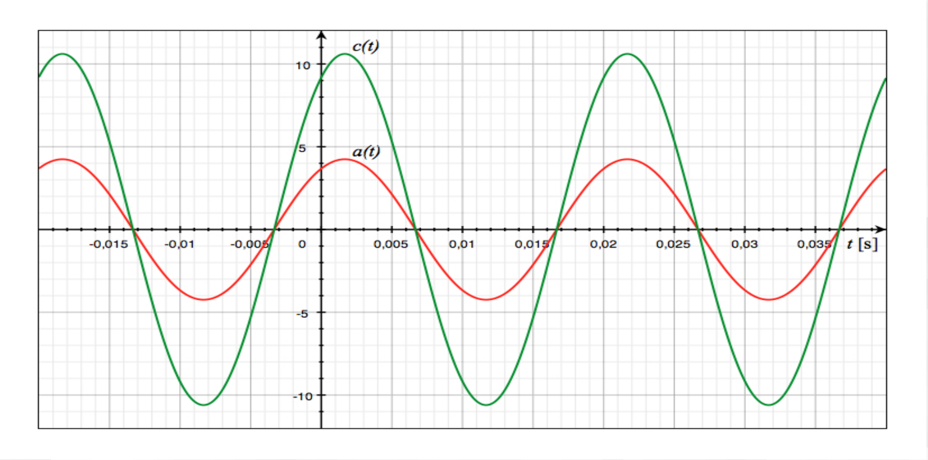
- **Prodotto** di una grandezze sinusoidale ***a(t)*** per uno scalare ***k***

$$a(t)=\sqrt{2}A\sin(\omega t+\alpha) \qquad c(t)=k\,a(t)=\sqrt{2}k\,A\sin(\omega t+\alpha)$$

$$\tilde{A}=A e^{j\alpha} \qquad \tilde{C}=k\tilde{A}=k\,A e^{j\alpha}=C e^{j\gamma} \quad \text{con} \quad C=k\,A \quad \text{e} \quad \gamma=\alpha$$

$$\boxed{c(t)=k\,a(t)=\sqrt{2}\,\Im[\tilde{C} e^{j\omega t}]=\sqrt{2}\,\Im[C e^{j(\omega t+\gamma)}]=\sqrt{2}\,C\sin(\omega t+\gamma)}$$





Le operazioni fondamentali

- **Derivata** di una grandezze sinusoidale ***a(t)***

$$a(t)=\sqrt{2}\,A\sin(\omega t+\alpha) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}\,\Im\left[\tilde{A}\,e^{j\omega t}\right]$$

$$a'(t)=\frac{d}{dt}a(t)=\sqrt{2}\,\omega A\cos(\omega t+\alpha)=\sqrt{2}\,\omega A\sin\left(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{2}\,\Im\left[\omega A\,e^{j\left(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}\right]=\sqrt{2}\,\Im\left[\omega A\,e^{j\alpha}\,e^{j\frac{\pi}{2}}\,e^{j\omega t}\right]=\sqrt{2}\,\Im\left[j\omega\tilde{A}\,e^{j\omega t}\right]$$

$$\frac{d}{dt}a(t)=\sqrt{2}\frac{d}{dt}\Im[\tilde{A}\,e^{j\omega t}]=\sqrt{2}\,\Im[j\omega\tilde{A}\,e^{j\omega t}]$$

$$\boxed{a(t)\Rightarrow\tilde{A}\ ,\ \frac{d}{dt}a(t)\Rightarrow j\omega\tilde{A}\ ,\ \sqrt{2}\,\Im\left[j\omega\tilde{A}\,e^{j\omega t}\right]\Rightarrow a'(t)\ ,\ \frac{d}{dt}\Leftrightarrow j\omega\left(=\omega e^{j\frac{\pi}{2}}\right)}$$

Le operazioni fondamentali

- **Integrale** di una grandezze sinusoidale ***a(t)***

$$a(t)=\sqrt{2}A\sin(\omega t+\alpha)$$

$$b(t)=\int a(t)dt=-\sqrt{2}\frac{A}{\omega}\cos(\omega t+\alpha)=\sqrt{2}\frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2})$$

$$\sqrt{2}\,\Im\left[\frac{A}{\omega}e^{j\left(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}\right]=\sqrt{2}\,\Im\left[\frac{A}{\omega}e^{j\alpha}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\omega t}\right]=\sqrt{2}\,\Im\left[-\frac{j}{\omega}\tilde{A}e^{j\omega t}\right]$$

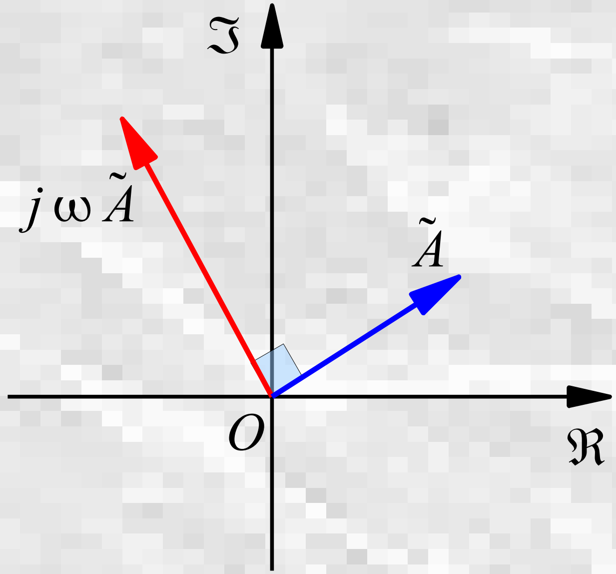
$$\int a(t)=\sqrt{2}\int\Im[\tilde{A}e^{j\omega t}]dt=\sqrt{2}\,\Im\left[\frac{1}{j\omega}\tilde{A}e^{j\omega t}\right]$$

$$\boxed{a(t)\Rightarrow\tilde{A}\ ,\ \int a(t)dt\Rightarrow\frac{\tilde{A}}{j\omega}\ ,\ \sqrt{2}\,\Im\left[\frac{\tilde{A}}{j\omega}e^{j\omega t}\right]\Rightarrow b(t)\ ,\ \int\Leftrightarrow\frac{1}{j\omega}\left(=\frac{1}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)}$$

Le operazioni fondamentali

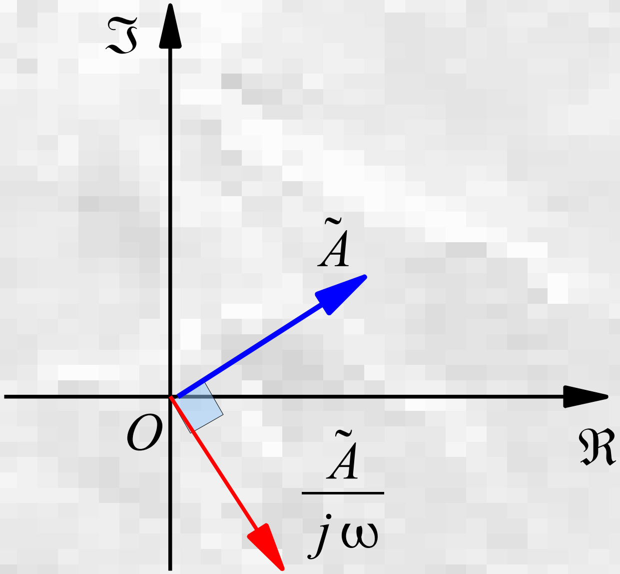
- **Derivata** di ***a(t)***

$$a(t) \Rightarrow \tilde{A} \;,\; \frac{d}{dt}a(t) \Rightarrow j\omega\tilde{A}$$



- **Integrale** di ***a(t)***

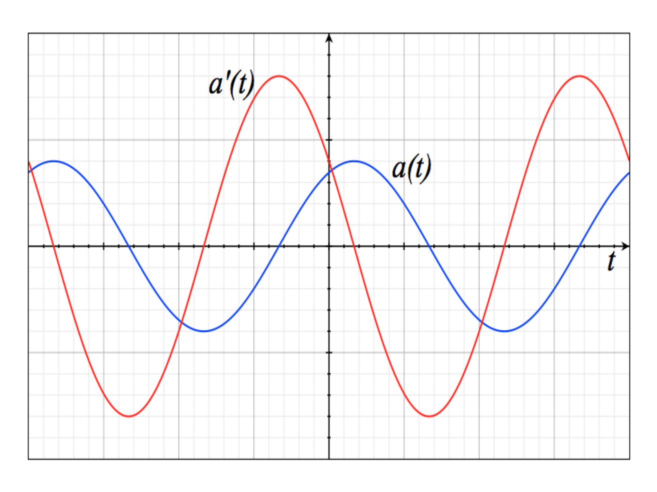
$$a(t) \Rightarrow \tilde{A} \;,\; \int a(t)\,dt \Rightarrow \frac{\tilde{A}}{j\omega}$$



Le operazioni fondamentali

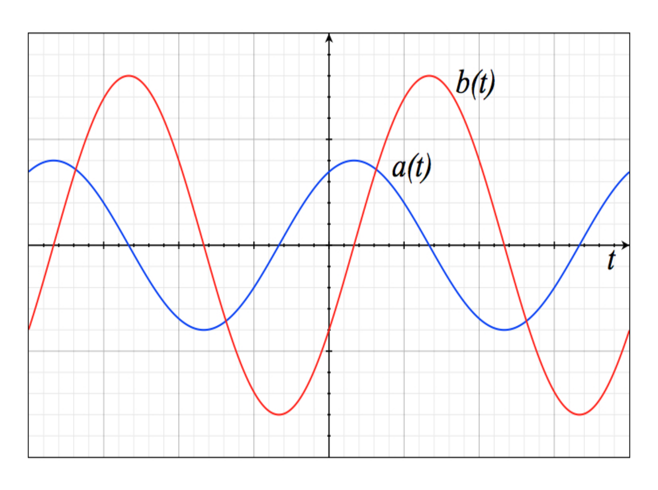
- **Derivata** di ***a(t)***

$$a(t) = \sqrt{2}\, A \sin(\omega t + \alpha)$$
$$a'(t) = \sqrt{2}\, \omega\, A \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$



- **Integrale** di ***a(t)***

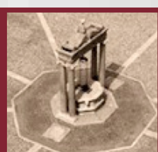
$$a(t) = \sqrt{2}\, A \sin(\omega t + \alpha)$$
$$b(t) = \sqrt{2}\, \frac{A}{\omega} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$



Le operazioni fondamentali

- Si può concludere che tutte le operazioni di somma algebrica, prodotto per uno scalare, derivazione od integrazione di grandezze sinusoidali isofrequenziali posso essere agevolmente eseguite mediante la seguente procedura:
  1) determinare, tramite la *trasformata di Steinmetz*, i ***fasori*** rappresentativi delle grandezze sinusoidali isofrequenziali coinvolte;
  2) applicare l'***algebra dei numeri complessi*** a suddetti *fasori* per ottenere la soluzione dell'operazione richiesta;
  3) *antitrasformare* la soluzione *fasoriale* ottenuta per determinare la ***grandezza sinusoidale isofrequenziale*** corrispondente.

...



Le operazioni fondamentali

$a(t) \pm b(t) \quad \tilde{A}, \tilde{B} \quad \tilde{C} = \tilde{A} \pm \tilde{B} = (A_x \pm B_x) + j(A_y \pm j B_y) = C_x + j C_y = C e^{j\gamma}$

$$\text{con} \quad C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \quad \text{e} \quad \gamma = \arctan\left(\frac{C_y}{C_x}\right)$$

$$c(t) = \sqrt{2}\,\Im[\tilde{C} e^{j\omega t}] = \sqrt{2}\, C \sin(\omega t + \gamma)$$

$k\, a(t) \quad \tilde{A} \quad \tilde{B} = k \tilde{A} = k A e^{j\alpha} = B e^{j\alpha}$

$$b(t) = \sqrt{2}\,\Im[\tilde{B} e^{j\omega t}] = \sqrt{2}\, k A \sin(\omega t + \alpha)$$

$\frac{d}{dt} a(t) \quad \tilde{A} \quad \tilde{B} = j\omega \tilde{A} = j\omega A e^{j\alpha} = \omega A e^{j(\alpha + \pi/2)}$

$$b(t) = \sqrt{2}\,\Im[\tilde{B} e^{j\omega t}] = \sqrt{2}\,\frac{A}{\omega} \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\int a(t)\, dt \quad \tilde{A} \quad \tilde{B} = \frac{1}{j\omega}\tilde{A} = -j\frac{A}{\omega} e^{j\alpha} = \frac{A}{\omega} e^{j(\alpha - \pi/2)}$

$$b(t) = \sqrt{2}\,\Im[\tilde{B} e^{j\omega t}] = \sqrt{2}\,\frac{A}{\omega} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Le operazioni fondamentali

- I fasori presentano vantaggi addizionali, in quanto godono di ulteriori specifiche proprietà che non hanno corrispondenza nel campo delle grandezze sinusoidali isofrequenziali:
  - rapporto fra due fasori $\tilde{A}(t)=\tilde{A}\,e^{j\omega t}$ e $\tilde{B}(t)=\tilde{B}\,e^{j\omega t}$

    $$\frac{\tilde{A}(t)}{\tilde{B}(t)}=\frac{\tilde{A}\,e^{j\omega t}}{\tilde{B}\,e^{j\omega t}}=\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}=\frac{A}{B}\,e^{j(\alpha-\beta)}=C\,e^{j\gamma}=\dot{C}\quad\begin{cases}\text{non è un fasore}\\ \text{è un complesso}\end{cases}$$

  - prodotto di un fasore $\tilde{A}(t)=\tilde{A}\,e^{j\omega t}$ per il complesso coniugato di un altro fasore $\tilde{B}(t)^{*}=\left(\tilde{B}\,e^{j\omega t}\right)^{*}=\tilde{B}^{*}\,e^{-j\omega t}$

    $$\tilde{A}(t)\cdot\tilde{B}(t)^{*}=\tilde{A}\,e^{j\omega t}\cdot\tilde{B}^{*}\,e^{-j\omega t}=\tilde{A}\cdot\tilde{B}^{*}=A\,e^{j\alpha}\cdot B\,e^{-j\beta}=A\,B\,e^{\alpha-\beta}=$$
    $$=A\,B\,e^{\varphi}=A\,B\cos\varphi+j\,A\,B\sin\varphi=\dot{P}$$

    anche in questo caso il risultato **non è un fasore** bensì **un numero complesso**.

Alcuni esempi ed esercizi

- Supponiamo che il legame *causa-effetto* in un sistema fisico sia descritto dalla seguente equazione integro-differenziale

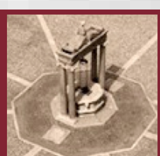
$$e(t) = R\,i(t) + L\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt \qquad \text{con} \qquad e(t) = \sqrt{2}\,U \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

e con R, L e C costanti numeriche positive. Si chiede di determinare la risposta $i(t)$.

Derivando rispetto al tempo, si ottiene l'equazione differenziale non omogenea del 2° ordine ed a coefficienti costanti

$$L\,C\,i''(t) + R\,C\,i'(t) + i(t) = \sqrt{2}\,\omega\,C\,E \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

la cui soluzione può essere ottenuta con le usuali tecniche ed imponendo, come soluzione particolare, $i(t) = \sqrt{2}\,I \sin(\omega t + \varphi)$.



Fasori

Alcuni esempi ed esercizi

La soluzione dell'equazione, in termini di $i(t)$, non è banale, ma lo può diventare impiegando il **metodo simbolico** basato sull'introduzione dei ***fasori*** rappresentativi delle grandezze sinusoidali.

Infatti, poiché abbiamo dimostrato che la somma, il prodotto per uno scalare, la derivazione e l'integrazione di grandezze sinusoidali sono ancora grandezze sinusoidali fra loro isofrequenziali, allora, se la $e(t)$ è una forzante di tipo sinusoidale, sarà sinusoidale e ad essa isofrequenziale anche la risposta $i(t)$. Possiamo quindi introdurre i ***fasori*** rappresentativi di tali grandezze, e cioè

$$e(t) = \sqrt{2}\, E \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \tilde{E} = E\, e^{j\frac{\pi}{6}} \qquad \text{ed} \qquad i(t) \Rightarrow \tilde{I} \quad \text{(incognito)}$$

Alcuni esempi ed esercizi

L'equazione integro-differenziale assegnata

$$e(t) = R\,i(t) + L\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

diventa

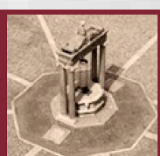
$$\tilde{E} = R\,\tilde{I} + L\,j\omega\,\tilde{I} + \frac{1}{C}\frac{1}{j\omega}\tilde{I} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\tilde{I} = \dot{Z}\,\tilde{I}$$

dove $\dot{Z}$ è un numero complesso cosi definito

$$\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z\,e^{j\varphi} \qquad \text{con} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

...

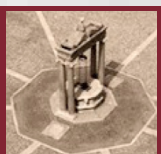


Alcuni esempi ed esercizi

$$\ldots \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{E}}{\dot{Z}} = \frac{\tilde{E}}{Z\,e^{j\varphi}} = \frac{E}{Z}\,e^{j\frac{\pi}{6}}\,e^{-j\varphi} = \frac{E}{Z}\,e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)}$$

$$\boxed{i(t) = \sqrt{2}\,\Im\left[\tilde{I}\,e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2}\,\Im\left[\frac{E}{Z}\,e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)}\,e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2}\,\frac{E}{Z}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \varphi\right)}$$

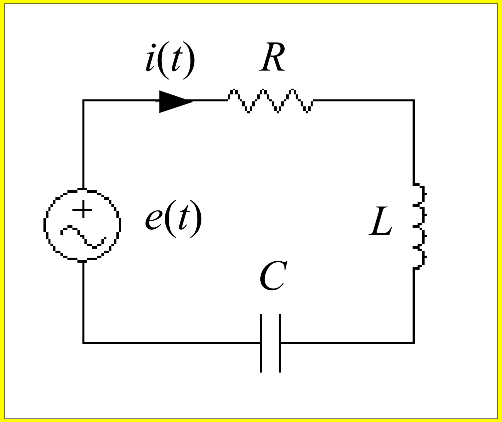
La soluzione dell'equazione integro-differenziale assegnata è stata ricondotta alla soluzione di una semplice equazione algebrica definita nel campo dei numeri complessi. Anti-trasformando il fasore, $\tilde{I}$, soluzione dell'equazione algebrica, si ottiene la cercata soluzione, $i(t)$, definita nel dominio del tempo.



Alcuni esempi ed esercizi

$$\ldots\quad \tilde{I} = \frac{\tilde{E}}{\dot{Z}} = \frac{\tilde{E}}{Z\,e^{j\varphi}} = \frac{E}{Z}\,e^{j\frac{\pi}{6}}\,e^{-j\varphi} = \frac{E}{Z}\,e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)}$$

$$i(t) = \sqrt{2}\,\Im\left[\tilde{I}\,e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2}\,\Im\left[\frac{E}{Z}\,e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)}\,e^{j\omega t}\right.$$



Risposta in regime permanente sinusoidale di un circuito RLC serie.

La soluzione dell'equazione integro-di
stata ricondotta alla soluzione di una
gebrica definita nel campo dei numeri
mando il fasore, $\tilde{I}$, soluzione dell'equ
tiene la cercata soluzione, $i(t)$, definita nel dominio del tempo.

Alcuni esempi ed esercizi

- Risolvere le seguenti espressioni utilizzando i fasori e tracciare i corrispondenti diagrammi fasoriali

$$u_1(t)=10\cos(314t)+5\sin\left(314t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$u_2(t)=\sqrt{2}\,7\sin(628t)-5\cos\left(628t-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$u_3(t)=\sqrt{2}\,8\cos\left(314t-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{2}\,10\sin\left(314t+\frac{\pi}{3}\right)-15\sin\left(314t-\frac{\pi}{4}\right)$$

- Determinare la relazione di fase esistente fra le grandezze sinusoidali isofrequenziali $u_1(t)$ ed $u_3(t)$ sopra calcolate.
- Calcolare e tracciare i diagrammi fasoriali delle derivate e degli integrali delle grandezze $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ sopra calcolate.

Alcuni esempi ed esercizi

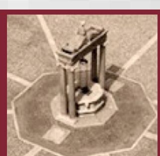
- Determinare il valore della grandezza $u(t)$ sapendo che è legata alla grandezza $i(t)$ dall'equazione differenziale

  $$10\,i(t)+10\cdot 10^{-3}\frac{d\,i(t)}{dt}=u(t) \qquad \text{con} \qquad i(t)=\sqrt{2}\,3.5\sin\left(314\,t+\frac{\pi}{3}\right)$$

  e tracciare il diagramma fasoriale rappresentativo della precedente equazione.
- Determinare il valore della grandezza $i(t)$ sapendo che è legata alla grandezza $e(t)$ dall'equazione integro-differenziale

  $$e(t)=3\,i(t)+0.005\frac{d\,i(t)}{dt}+1000\int i(t)\,dt \qquad \text{con} \qquad e(t)=\sqrt{2}\,10\cos(314\,t)$$

  e tracciare il diagramma fasoriale rappresentativo della precedente equazione.



Numeri complessi, sinusoidi e fasori

- Sono stati richiamate le principali definizioni, le modalità di rappresentazione e le operazioni fondamentali riguardanti i ***numeri complessi***.
- Sono state descritte ed esaminate le ***grandezze sinusoidali***, le loro proprietà e le principali operazioni, con particolare riferimento alle *grandezze sinusoidali isofrequenziali*.
- È stato introdotto un nuovo ente matematico: il ***fasore***. I *fasori* sono dei *numeri complessi* messi in corrispondenza biunivoca con *sinusoidi isofrequenziali*. Si è mostrato come, utilizzando la *trasformata* e l'*anti-trasformata di Steinmetz*, le operazioni che coinvolgono sinusoidi isofrequenziali possono essere vantaggiosamente ricondotte ad *operazioni fra numeri complessi* e rappresentate graficamente mediante *fasori*.