

a) I esercizio

(1)

In assenza del termine prop. a J^2 i livelli hanno energie $E = \hbar\omega(n + \frac{3}{2})$ ed i seguenti valori del momento angolare

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad L=0 \quad (\text{non degenerare in assenza di spin})$$

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega \quad L=1 \quad (\text{deg.} = 3 \text{ in assenza di spin})$$

$$E = \frac{7}{2}\hbar\omega \quad L = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \quad (\text{deg} = 6 \text{ in assenza di spin})$$

Consideriamo l'effetto del termine proporzionale ad α .

1) livello $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$

Ha $L=0$, quindi ~~J^2~~ J può assumere solo il valore 1.

$$\text{Quindi} \quad E = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\alpha}{\hbar} \hbar^2 2 = \frac{3}{2}\hbar\omega + 2\hbar\alpha$$

Lo stato ha degenerazione 3 (i possibili stati corrispondono a $J_z = \pm 1, 0$)

2) livello $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$

Ha $L=1$. Quindi J è compreso tra $|L-S|=0$ e $L+S=2$: J assume i valori $J=0, 1, 2$

Nuovi livelli:

$$J=0 \quad E = \frac{5}{2}\hbar\omega \quad (\text{non degenerare})$$

$$J=1 \quad E = \frac{5}{2}\hbar\omega + \frac{\alpha}{\hbar} (2\hbar^2) = \frac{5}{2}\hbar\omega + 2\hbar\alpha \quad (\text{deg.} = 3)$$

$$J=2 \quad E = \frac{5}{2}\hbar\omega + \frac{\alpha}{\hbar} 6\hbar^2 = \frac{5}{2}\hbar\omega + 6\hbar\alpha \quad (\text{deg.} = 5)$$

3) Dato che $\alpha < \frac{\omega}{2}$, $\frac{7}{2}\hbar\omega > \frac{5}{2}\hbar\omega + 6\hbar\alpha$.

Quindi i livelli successivi non sono vicini.

I primi 4 livelli sono n, l, J, J_z

(2)

1) $n=0, L=0, J=1$ stati $|001 J_z\rangle$ deg. 3

$$E = \frac{3}{2} \hbar \omega + 2 \hbar \alpha$$

2) $n=1, L=1, J=0$ stati $|1100\rangle$ deg. 1

$$E = \frac{5}{2} \hbar \omega$$

3) $n=1, L=1, J=1$ stati $|111 J_z\rangle$ deg. 3

$$E = \frac{5}{2} \hbar \omega + 2 \hbar \alpha$$

4) $n=1, L=1, J=2$ stati $|112 J_z\rangle$ deg. 5

$$E = \frac{5}{2} \hbar \omega + 6 \hbar \alpha$$

Domanda b)

Posiamo scrivere la funzione d'onda come

$$|\psi\rangle = A \sqrt{\frac{4\pi}{3}} R_1(r) Y_1^0(\theta) |1\rangle_s$$

$$= A \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \psi_{110}(\vec{r}) |1\rangle_s$$

dove $\psi_{110}(\vec{r})$ è l'autofunzione normalizzata della Hamiltoniana dell'oscillatore isotropo con $n=1, l=1, l_z=0$. Quindi

$$|A| \sqrt{\frac{4\pi}{3}} = 1 \quad |A| = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$$

Scegliamo $A = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$ per cui

(3)

$$|\psi\rangle = |1\ 1\ 0\rangle_{n\ l\ l_z} |1\ 0\rangle_{s_z} \longrightarrow \text{(tabelle CG } 1 \times 1)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} |1\ 1\ 1\ 2\ 1\rangle_{n\ l\ s\ j\ j_z} - \sqrt{\frac{1}{2}} |1\ 1\ 1\ 1\ 1\rangle_{n\ l\ s\ j\ j_z}$$

↑
sono autostati di H

$$\text{energia di } |1\ 1\ 1\ 2\ 1\rangle = \frac{5}{2} \hbar \omega + 6 \hbar \alpha \equiv E_2$$

$$|1\ 1\ 1\ 1\ 1\rangle = \frac{5}{2} \hbar \omega + 2 \hbar \alpha \equiv E_1$$

Quindi

$$\text{prob}(E = \frac{5}{2} \hbar \omega + 6 \hbar \alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\text{prob}(E = \frac{5}{2} \hbar \omega + 2 \hbar \alpha) = \frac{1}{2}$$

c) Calcoliamo l'evoluzione temporale [notazione semplificata]
 $|1\ j\ j_z\rangle_J = |1\ 1\ 1\ j\ j_z\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-iE_2 t/\hbar} |2\ 1\rangle_J - \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-iE_1 t/\hbar} |1\ 1\rangle_J$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar} |2\ 1\rangle_J - \sqrt{\frac{1}{2}} |1\ 1\rangle_J \quad (\text{eliminate fase})$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-4i\alpha t} |2\ 1\rangle_J - \sqrt{\frac{1}{2}} |1\ 1\rangle_J$$

Per calcolare i valori medi di L_z e S_z dobbiamo cambiare base

$$|1\ 1\ 1\ j\ j_z\rangle = |j\ j_z\rangle_J \longrightarrow |1\ 1\ l_z\rangle |1\ s_z\rangle = |l_z\ s_z\rangle_{LS} \quad (\text{notazione semplificata})$$

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-4i\alpha t} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} |1\ 0\rangle_{LS} + \sqrt{\frac{1}{2}} |0\ 1\rangle_{LS} \right)$$

$$- \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} |1\ 0\rangle_{LS} - \sqrt{\frac{1}{2}} |0\ 1\rangle_{LS} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-4i\alpha t} - 1) |1\ 0\rangle_{LS} + \frac{1}{2} (e^{-4i\alpha t} + 1) |0\ 1\rangle_{LS}$$

Quindi

$$\langle \psi(t) | L_z | \psi(t) \rangle =$$

$$\langle \psi(t) | L_z \left(\frac{1}{2} (e^{-4i\alpha t} - 1) |1 0\rangle_{LS} + \frac{1}{2} (e^{-4i\alpha t} + 1) |0 1\rangle_{LS} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-4i\alpha t} - 1) \hbar \langle \psi(t) | 1 0 \rangle_{LS}$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-4i\alpha t} - 1) \hbar \frac{1}{2} (e^{4i\alpha t} - 1) = \frac{\hbar}{4} |e^{-4i\alpha t} - 1|^2$$

$$= \frac{\hbar}{4} (2 - 2\cos 4\alpha t) = \frac{\hbar}{2} (1 - \cos 4\alpha t)$$

$$\langle \psi(t) | S_z | \psi(t) \rangle$$

$$= \langle \psi(t) | S_z \left(\frac{1}{2} (e^{-4i\alpha t} - 1) |1 0\rangle_{LS} + \frac{1}{2} (e^{-4i\alpha t} + 1) |0 1\rangle_{LS} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-4i\alpha t} + 1) \hbar \langle \psi(t) | 0 1 \rangle_{LS}$$

$$= \frac{1}{2} (e^{-4i\alpha t} + 1) \hbar \frac{1}{2} (e^{4i\alpha t} + 1) =$$

$$= \frac{\hbar}{4} (2 + 2\cos 4\alpha t) = \frac{\hbar}{2} (1 + \cos 4\alpha t)$$

Per calcolare i valori medi di J_z, J^2, L^2 utilizziamo la base $|n \ell s j j_z\rangle$

$$\langle \psi(t) | J_z | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | J_z \left(\sqrt{\frac{1}{2}} e^{-4i\alpha t} |2 1\rangle_J - \sqrt{\frac{1}{2}} |1 1\rangle_J \right)$$

$$= \hbar \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \hbar$$

$$\langle \psi(t) | J^2 | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | J^2 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} e^{-4i\alpha t} |2 1\rangle_J - \sqrt{\frac{1}{2}} |1 1\rangle_J \right)$$

$$= \langle \psi(t) | \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-4i\alpha t} 6\hbar^2 |2 1\rangle_J - \sqrt{\frac{1}{2}} 2\hbar^2 |1 1\rangle_J$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-4i\alpha t} 6\hbar^2 \sqrt{\frac{1}{2}} e^{4i\alpha t} - \sqrt{\frac{1}{2}} 2\hbar^2 \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 3\hbar^2 + \hbar^2 = 4\hbar^2$$

$$\langle \psi(t) | L^2 | \psi(t) \rangle = 2\hbar^2 \quad (\text{tutti i termini hanno } L=1)$$

I valori medi di J_z , J^2 , ed L^2 non dipendono da t (5)
dato che tali operatori commutano con H .

Domanda d)

Lo stato fondamentale è uno stato con $l=0$, $S=1$, $J=1$

Si può scegliere una base in cui S_x è diagonale
ossia data da $|n \ l \ S \ S_x\rangle$. Se ordiniamo la

base secondo $|0011\rangle$, $|0010\rangle$, $|001-1\rangle$ la
matrice associata alla perturbazione è

$$= \begin{pmatrix} \lambda \langle 0 | x^4 | 0 \rangle \hbar^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \langle 0 | x^4 | 0 \rangle \hbar^2 \end{pmatrix}$$

dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale dell'oscillatore
armonico 3Dimensionale. Nella base cartesiana

$$|0\rangle = |0\rangle_x |0\rangle_y |0\rangle_z$$

└──────────┘ stati fondamentali oscillatore 1D

per cui

$$\langle 0 | x^4 | 0 \rangle = \langle 0 | x^4 | 0 \rangle_x = |x|0\rangle_x|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

Quindi

$$\Delta E = 0 \quad 1 \text{ stato} \quad (S_x = 0)$$

$$\Delta E = \lambda \hbar^2 \frac{\hbar}{2m\omega} \quad \text{deg. 2} \quad (S_x = \pm 1)$$

La degenerazione è parzialmente rimossa

Esercizio 2 Domanda 1)

①

Per il calcolo notiamo che $|\psi_1|^2 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha(x-x_0)^2}$ e $|\psi_2|^2 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha(x+x_0)^2}$ sono Gaussiane centrate in x_0 e $-x_0$, rispettivamente. Quindi possiamo concludere $\langle \psi_1 | x | \psi_1 \rangle = x_0$ e $\langle \psi_2 | x | \psi_2 \rangle = -x_0$.

Era ovviamente possibile fare anche il calcolo diretto

$$\begin{aligned}\langle \psi_1 | x | \psi_1 \rangle &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha(x-x_0)^2} x \quad x = x_0 + y \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy (x_0 + y) e^{-\alpha y^2} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \left[x_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\alpha y^2} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy y e^{-\alpha y^2}}_{=0 \text{ perchè dispari per } y \rightarrow -y} \right] \\ &= x_0 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} = x_0\end{aligned}$$

Per calcolare $\langle \psi_2 | x | \psi_2 \rangle$ basta notare $|\psi_1|^2 \rightarrow |\psi_2|^2$ mandando $x_0 \rightarrow -x_0$. Quindi $\langle \psi_2 | x | \psi_2 \rangle = -x_0$.

Per calcolare $\langle \psi_3 | x | \psi_3 \rangle$ notiamo che $\psi_1(-x) = \psi_2(x)$ per cui

$$\psi_3(-x) = \mathcal{N}(\psi_1(-x) + \psi_2(-x)) = \mathcal{N}(\psi_2(x) + \psi_1(x)) = \psi_3(x)$$

La funzione $\psi_3(x)$ è pari; quindi

$$\langle \psi_3 | x | \psi_3 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x |\psi_3(x)|^2 = 0 \quad \text{perchè l'integrando è dispari}$$

GRAFICI:

$$\pi_1(x) = |\psi_1(x)|^2 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha(x-x_0)^2}$$

Ricordiamo che una Gaussiana di media μ e varianza σ^2 è proporzionale a $e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Quindi $|\psi_1|^2$ ha media x_0 e deviazione standard, $\frac{1}{2\sigma^2} = \alpha$,
 $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$

(2)

Quindi, al crescere di α , σ diminuisce.

Per $\alpha = 1/x_0$ $\sigma = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$
 $\alpha = 4/x_0$ $\sigma = \frac{x_0}{2\sqrt{2}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{diminuisce di un fattore 2} \end{array} \right.$

Lo stesso vale per $\pi_2(x) = |\psi_2(x)|^2$

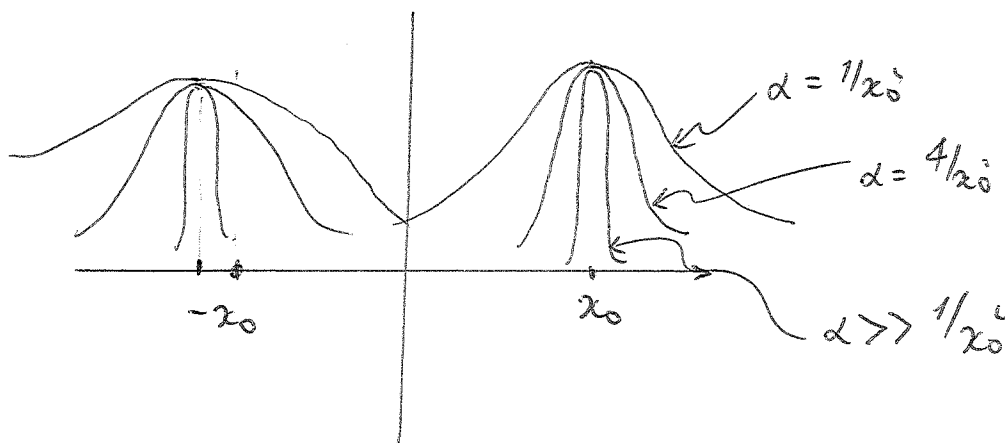
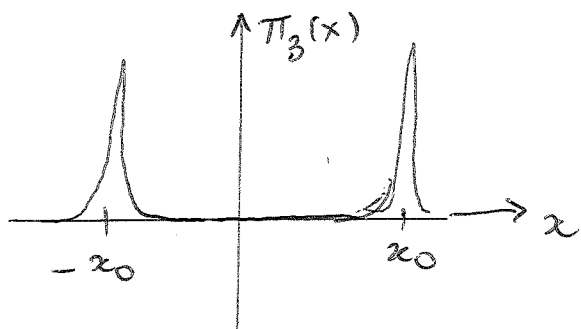


Grafico di $\frac{|\psi_3|^2}{N^2} = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \underbrace{\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*}_{\text{trascurabili per } \alpha \gg 1/x_0^2}$

Quindi $\pi_3(x) \approx N^2 (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) = N^2 (\pi_1(x) + \pi_2(x))$

[NOTA: sebbene non richiesto, è immediato calcolare N^2 nel limite $\alpha/x_0 \gg 1$ dalla formula precedente: $N^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2}}$]



Domanda 2)

(3)

$$\langle \psi_1 | p | \psi_1 \rangle = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/4} (-i\hbar) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_1^* \frac{d}{dx} \psi_1$$

$$\begin{aligned} \text{Ora } \frac{d\psi_1}{dx} &= \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/4} [ik_0 - \alpha(x-x_0)] e^{ik_0x} e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2} \\ &= [ik_0 - \alpha(x-x_0)] \psi_1(x) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | p | \psi_1 \rangle &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dx [ik_0 + \alpha x_0 - \alpha x] |\psi_1(x)|^2 \\ &= -i\hbar \left[(ik_0 + \alpha x_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi_1(x)|^2}_{=1 \text{ per normalizzazione}} - \alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx x |\psi_1(x)|^2}_{=x_0 \text{ (punto 1)}} \right] \\ &= -i\hbar [ik_0 + \alpha x_0 - \alpha x_0] = \hbar k_0 \end{aligned}$$

Non è necessario calcolare direttamente $\langle \psi_2 | p | \psi_2 \rangle$.
Basta notare che $\psi_2(x)$ si ottiene da ψ_1 con $k_0 \rightarrow -k_0$,
 $x_0 \rightarrow -x_0$. Quindi

$$\langle \psi_2 | p | \psi_2 \rangle = -\hbar k_0$$

Infine notiamo che $\psi_3(x)$ è pari e quindi la
sua derivata è dispari: $\psi_3'(x) = -\psi_3'(-x)$
[formalmente: $\psi_3(x) = \psi_3(-x) \Rightarrow$ (deriviamo) $\psi_3'(x) = -\psi_3'(-x)$]

Quindi

$$\langle \psi_3 | p | \psi_3 \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dx \underbrace{\psi_3^*}_{\text{pari}} \underbrace{\psi_3'(x)}_{\text{dispari}} \rightarrow \text{integrale} = 0$$

Più formale: Se I è l'operatore di inversione spaziale

$$\begin{aligned} \langle \psi_3 | p | \psi_3 \rangle &= \langle \psi_3 | \underbrace{II}_{I^2=1} p \underbrace{II}_{I^2=1} | \psi_3 \rangle = \langle \psi_3 | I (IpI) I | \psi_3 \rangle \\ &= \langle \psi_3 | (-p) | \psi_3 \rangle \\ &= -\langle \psi_3 | p | \psi_3 \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \langle \psi_2 | p | \psi_2 \rangle = 0$$

Per calcolare la distribuzione di probabilità (4)
dobbiamo passare alla rappresentazione dell'impulso

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1(p) &= \int dx \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi_1(x) \quad \text{Se } k = p/\hbar \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \int dx e^{-ikx} e^{ik_0x} e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2} \\ &\quad \int dx \exp\left[-ikx + ik_0x - \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2\right]\end{aligned}$$

Utilizzeremo la formula di integrazione riportata nel testo

$$-ikx + ik_0x - \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2 = -\frac{\alpha}{2}x^2 + x(-ik + ik_0 + \alpha x_0) - \frac{\alpha x_0^2}{2}$$

Identifichiamo

$$a = \frac{\alpha}{2}$$

$$b = \alpha x_0 + i(k_0 - k)$$

$$c = -\frac{\alpha x_0^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{4a} + c &= \frac{1}{4} \frac{2}{\alpha} \left[\alpha x_0 + i(k_0 - k)\right]^2 - \frac{\alpha x_0^2}{2} \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left[\alpha^2 x_0^2 - (k_0 - k)^2 + 2i\alpha x_0(k_0 - k)\right] - \frac{\alpha x_0^2}{2} \\ &= \cancel{\frac{\alpha x_0^2}{2}} - \frac{1}{2\alpha} (k - k_0)^2 + i x_0 (k_0 - k) - \cancel{\frac{\alpha x_0^2}{2}}\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{ix_0(k_0 - k)} e^{-\frac{1}{2\alpha}(k - k_0)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{1}{(\alpha\pi)^{1/4}} e^{ix_0(k_0 - k)} e^{-\frac{1}{2\alpha}(k - k_0)^2}\end{aligned}$$

Per ricavare $\tilde{\psi}_2(p)$ notiamo che $\psi_2(x)$ si ottiene (5) da $\psi_1(x)$ con $x_0 \rightarrow -x_0$, $k_0 \rightarrow -k_0$. Quindi

$$\tilde{\psi}_2(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{1}{(\alpha\pi)^{1/4}} e^{ix_0(k_0+k)} e^{-\frac{1}{2\alpha}(k+k_0)^2}$$

Infine $\tilde{\psi}_3(p) = \mathcal{N}(\tilde{\psi}_1(p) + \tilde{\psi}_2(p))$

Notiamo che $\tilde{\psi}_1(-p) = \tilde{\psi}_2(p)$ per cui $\tilde{\psi}_3(-p) = \tilde{\psi}_3(p)$ [pari]

GRAFICI

$$\begin{aligned} \pi_1(p) = |\tilde{\psi}_1(p)|^2 &= \frac{1}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} e^{-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{p}{\hbar} - k_0\right)^2} \\ &= \frac{1}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} e^{-\frac{1}{\alpha\hbar^2}(p - \hbar k_0)^2} \end{aligned}$$

È una Gaussiana centrata in $p = \hbar k_0$ [avremmo potuto ricavare $\langle \psi_1 | p | \psi_1 \rangle$ direttamente da qui]

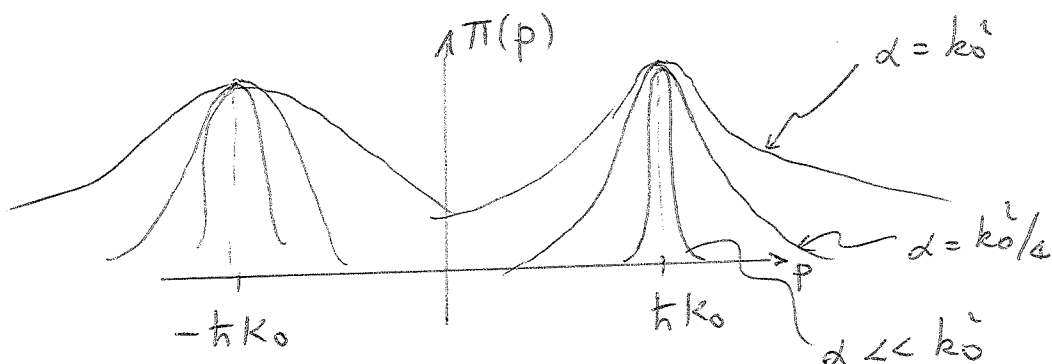
La deviazione standard è

$$\frac{1}{2\sigma^2} = \frac{1}{\alpha\hbar^2} \quad \sigma = \hbar \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

Quindi, al decrescere di α , σ diminuisce

$$\begin{array}{ll} \text{Per } \alpha = k_0^2 & \sigma = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} k_0 \\ \alpha = \frac{k_0^2}{4} & \sigma = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \frac{k_0}{2} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{ll} \text{Per } \alpha = k_0^2 & \sigma = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} k_0 \\ \alpha = \frac{k_0^2}{4} & \sigma = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \frac{k_0}{2} \end{array}} \right\} \text{diminuisce di un fattore 2}$$

Lo stesso vale per $|\tilde{\psi}_2(p)|^2$

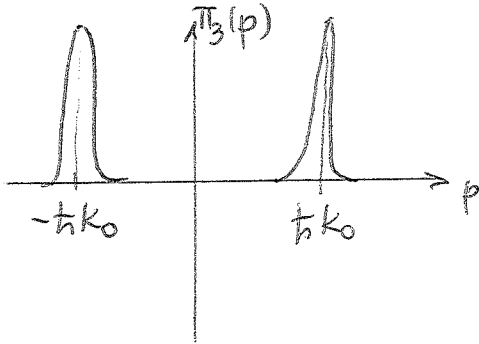


⑥

Nel limite $\alpha \ll k_0^2$ possiamo scrivere

$$|\tilde{\psi}_3(p)|^2 = N^2 (|\tilde{\psi}_1(p)|^2 + |\tilde{\psi}_2(p)|^2)$$

senza termini misti (trascurabili). Quindi



Domanda 3

Dato che $\psi_3(x)$ è pari $\langle \psi_3 | \hat{P} | \psi_3 \rangle = +1$

Domanda 4

Dato che $[p, H] = [P, H] = 0$ abbiamo

$$\langle \psi_3(t) | p | \psi_3(t) \rangle = \langle \psi_3 | p | \psi_3 \rangle = 0$$

(t=0)

$$\langle \psi_3(t) | P | \psi_3(t) \rangle = \langle \psi_3 | P | \psi_3 \rangle = +1$$

(t=0)

Per calcolare il valor medio di x , ricordiamo che i valori medi soddisfano le eq. di Hamilton:

Dato che ($p = m\dot{x}$) abbiamo

$$\langle \psi_3(t) | p | \psi_3(t) \rangle = m \frac{d}{dt} \langle \psi_3(t) | x | \psi_3(t) \rangle$$

$$\downarrow$$

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \psi_3(t) | x | \psi_3(t) \rangle \Rightarrow \text{non dipende da } t$$

$$\langle \psi_3(t) | x | \psi_3(t) \rangle = \langle \psi_3 | x | \psi_3 \rangle = 0$$

Domanda 5

(7)

$$\begin{aligned}\langle \psi | x | \psi \rangle &= \frac{2}{3} \langle \psi_1 | x | \psi_1 \rangle + \frac{1}{3} \langle \psi_2 | x | \psi_2 \rangle \\ &= \frac{2}{3} x_0 + \frac{1}{3} (-x_0) = \frac{x_0}{3}\end{aligned}$$

per l'ortogonalità
delle funzioni di
spin

$$\begin{aligned}\langle \psi | p | \psi \rangle &= \frac{2}{3} \langle \psi_1 | p | \psi_1 \rangle + \frac{1}{3} \langle \psi_2 | p | \psi_2 \rangle \\ &= \frac{2}{3} \hbar k_0 + \frac{1}{3} (-\hbar k_0) = -\frac{\hbar k_0}{3}\end{aligned}$$