Esame di Meccanica Quantistica, 26/04/2023

Esercizio 1. Si consideri, in 3 dimensioni, una particella di spin 1 con Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{\alpha}{\hbar}J^2$$

dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ è il momento angolare totale e $0 < \alpha < \omega/6$.

a) Si calcolino le energie e le degenerazioni dei primi 4 livelli.

b) Si consideri una particella nello stato

$$|\psi\rangle = AR_1(r)\cos\theta\,|1\rangle_S,$$

dove $|1\rangle_S$ è un autostato normalizzato di S_z con autovalore $\hbar$ e $R_1(r)$ è l'autofunzione radiale del livello $n = 1$ della Hamiltoniana dell'oscillatore armonico isotropo tridimensionale (Hamiltoniana H con $\alpha = 0$). La funzione $R_1(r)$ è normalizzata secondo

$$\int_0^\infty r^2 dr\,|R_1(r)|^2 = 1.$$

Si calcoli $|A|$ in modo che lo stato sia normalizzato e si determinino i possibili valori ottenibili in una misura di H con le relative probabilità.

c) Si calcoli l'evoluto temporale di $|\psi\rangle$ e si calcolino i valori medi di L_z, S_z, J_z, L^2 e J^2 su ψ al tempo t. Per tutti i casi in cui il risultato non dipende da t, si discuta se tale indipendenza poteva essere predetta a priori.

d) Si consideri la perturbazione $V(x) = \lambda(xS_x)^2$. Si calcolino le correzioni all'energia dovute a tale perturbazione sullo stato fondamentale di H e si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

Esercizio 2. Si consideri una particella libera in una dimensione. La particella ha massa m e spin 0. Si considerino le seguenti funzioni d'onda normalizzate:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{ik_0x}e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2}, \\
\psi_2(x) &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ik_0x}e^{-\frac{\alpha}{2}(x+x_0)^2}, \\
\psi_3(x) &= \mathcal{N}[\psi_1(x) + \psi_2(x)],
\end{aligned}$$

dove k_0, x_0, α sono parametri reali positivi e $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione supposta nota.

1) Si calcoli il valor medio dell'operatore posizione $\hat{x}$ nei tre casi, assumendo che la particella sia in uno stato descritto rispettivamente da $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ e $\psi_3(x)$. Si calcoli la densità di probabilità $\pi(x)$ per misure di posizione su $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$. Si faccia un grafico qualitativo delle due densità di probabilità a fissato x_0 per $\alpha = 1/x_0^2$ e $\alpha = 4/x_0^2$, e si discuta cosa succede nel limite $\alpha \gg 1/x_0^2$. Si faccia il grafico qualitativo della densità di probabilità per misure di posizione su $\psi_3(x)$ solo nel limite $\alpha \gg 1/x_0^2$.

2) Si calcoli il valor medio dell'operatore impulso $\hat{p}$, assumendo che la particella sia in uno stato descritto rispettivamente da $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ e $\psi_3(x)$. Si calcoli la densità di probabilità per misure di

impulso su $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$. Si faccia un grafico qualitativo delle due densità di probabilità a fissato k_0 per $\alpha = k_0^2$ e $\alpha = k_0^2/4$, e si discuta cosa succede nel limite $\alpha \ll k_0^2$. Si faccia il grafico qualitativo della densità di probabilità per misure di impulso su $\psi_3(x)$ solo nel limite $\alpha \ll k_0^2$.

3) Si determini il valor medio dell'operatore parità $\hat{\mathcal{P}}$ per la stato descritto da $\psi_3(x)$.

4) Si determinino i valori medi degli operatori $\hat{x}, \hat{p}$ e $\hat{\mathcal{P}}$ ad un generico istante di tempo $t > 0$ assumendo che al tempo $t = 0$ il sistema sia nello stato $\psi_3(x)$. Suggerimento: è possibile fare il calcolo senza determinare direttamente l'evoluto temporale $\psi_3(x,t)$.

Si supponga ora che la particella abbia spin 1/2 e che lo stato del sistema sia dato da

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_1(x)|+\rangle + i\sqrt{\frac{1}{3}}\psi_2(x)|-\rangle.$$

5) Si determinino i valori medi degli operatori $\hat{x}$ e $\hat{p}$ sullo stato $|\psi\rangle$.

Per la risoluzione del problema potrebbero essere (in)utile il seguente risultato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}+c} \qquad \text{con } \mathrm{Re}\,a > 0$$