Esame di Meccanica Quantistica, 25/01/2022

Esercizio 1. Si consideri una particella di massa m e spin 1 vincolata a muoversi su una sfera con Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\omega}{\hbar}\left(J_x^2 + J_y^2\right),$$

dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ è il momento angolare totale.

a) Si calcoli l'energia dei primi due livelli e la rispettiva degenerazione.

b) Si introduca una perturbazione

$$V = \frac{\epsilon\omega}{\hbar}\left(J_x^2 - J_y^2\right).$$

Utilizzando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, si calcoli l'effetto della perturbazione sui primi due livelli della Hamiltoniana H_0. Si specifichino le nuove energie e degenerazioni.

c) Considerando solo H_0 (ossia in assenza di perturbazione V) si determinino gli stati $|\psi\rangle$ tali che, al tempo $t_0 = 0$: i) una misura di energia dà sempre un valore corrispondente a quello dei primi due livelli; ii) una misura di J_z non fornisce mai valori negativi; iii) una misura di L^2 dà sempre un valore minore o uguale a $2\hbar^2$; iv) la probabilità di misurare $L^2 = 0$ è $\frac{1}{3}$; v) la probabilità di misurare $S_z = -\hbar$ è pari a $\frac{2}{9}$.
In una misura di L_z sugli stati $|\psi\rangle$, quali valori si ottengono e con quale probabilità?

d) Sempre in assenza di perturbazione, si calcoli il ket evoluto al tempo t, $|\psi(t)\rangle$, ed il valore medio $\langle\psi(t)|\frac{x}{r}|\psi(t)\rangle$.

Esercizio 2. Due particelle identiche di spin 1/2 e massa m sono vincolate a muoversi in una dimensione lungo l'asse x. L'Hamiltoniana è data da

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{4}m\omega^2\left(\hat{x}_1 - \hat{x}_2\right)^2 + \frac{2\omega}{\hbar}\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 + g\omega(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}) \tag{1}$$

con $g \geq 0$.

1. Si determinino autovalori e autofunzioni di $\hat{H}$ nel sistema di riferimento del centro di massa.

2. Si discuta la degenerazione dei livelli al variare del parametro g, per $0 \leq g \leq 1$.

3. Si assuma ora $g \ll 1$. Si determini lo stato quantistico $|\psi\rangle$ tale che: i) una misura dello spin di singola particella lungo l'asse identificato dal versore $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ fornisce sempre per entrambe le particelle il risultato $+\hbar/2$; ii) una misura di energia fornisce con certezza $E < \frac{5}{2}\hbar\omega$.

4. Si stabilisca se $|\psi\rangle$ è un autostato della Hamiltoniana e si calcoli $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$.

5. Sempre considerando lo stato $|\psi\rangle$, si determini la probabilità che una misura della componente z dello spin di singola particella fornisca come risultato $-\hbar/2$ per entrambe le particelle.

Esercizio 1

(a)
Sulla sfera, una base è data dalle autofunzioni $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ ①
quindi la particella può assumere tutti i valori di ℓ.
Dato che $\bar{J}=\bar{L}+\bar{S}$ e la particella ha spin 1, J può
assumere tutti i valori interi

$$H=\frac{\omega}{\hbar}(J_x^2+J_y^2)=\frac{\omega}{\hbar}(J^2-J_z^2)$$

Quindi i possibili valori di energia sono

$$E(j,j_z)=\hbar\omega(j(j+1)-j_z^2) \qquad \begin{matrix} j:0,1\dots\infty \\ j_z \text{ tra } [-j,j] \end{matrix}$$

Se uno stato ha momento angolare totale j, il
momento angolare può essere pari a $\ell=\begin{cases} j+1 & \\ j & (j\neq 0) \\ j-1 & (j\neq 0)\end{cases}$

LIVELLI

$\ell \; j \; j_z$

STATO FOND: $j=0 \quad j_z=0 \quad \ell=1 \quad E=0$ autof. $|1\,0\,0\rangle$

I ecc

$$\left.\begin{matrix} j=1 & j_z=\pm1 & \ell=0 \\ j=1 & j_z=\pm1 & \ell=1 \\ j=1 & j_z=\pm1 & \ell=2 \end{matrix}\right\} E=\hbar\omega \text{ autof } \begin{matrix}|0\,1\pm1\rangle \\ |1\,1\pm1\rangle \\ |2\,1\pm1\rangle\end{matrix}$$

deg. 6

b)
Sullo stato fondamentale $\langle 1\,0\,0|V|1\,0\,0\rangle=0$
dato che $J^2|\text{st. fond}\rangle=0$. Quindi l'energia non cambia

Sul I eccitato. Si tratta di un livello degenere di dimensione
6. Tuttavia il problema è semplificabile notando che
$[L^2,V]=0$. Quindi se ordiniamo gli stati
$\{|0\,1\,1\rangle, |0\,1\,-1\rangle, |1\,1\,1\rangle, |1\,1\,-1\rangle, |2\,1\,1\rangle, |2\,1\,-1\rangle\}$
otteniamo una struttura a blocchi. Dato che V
non dipende da L^2, i blocchi sono uguali

Quindi

$$\langle n|V|m\rangle = \left(\begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & A \end{array}\right)$$ con A matrice $\underline{2\times 2}$

Riscriviamo la perturbazione

$$V = \frac{\epsilon\omega}{\hbar}\left(J_x^2 - J_y^2\right) = \frac{\epsilon\omega}{2\hbar}\left(J_+^2 + J_-^2\right)$$

[Il valore di l è irrilevante nel calcolo]

$$\langle l\,1\,1|V|l\,1\,1\rangle = 0$$

$$\langle l\,1\,-1|V|l\,1\,-1\rangle = 0$$

$$\langle l\,1\,-1|V|l\,1\,1\rangle = +\frac{\epsilon\omega}{2\hbar}\langle l\,1\,-1|J_-^2|l\,1\,1\rangle$$

$$= +\frac{\epsilon\omega}{2\hbar}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,\hbar^2\langle l\,1\,-1|l\,1\,-1\rangle = \frac{\epsilon\omega}{\hbar}\hbar^2 = \epsilon\hbar\omega$$

$$\langle l\,1\,1|V|l\,1\,-1\rangle = \langle l\,1\,-1|V|l\,1\,1\rangle^* =$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon\hbar\omega \\ \epsilon\hbar\omega & 0 \end{pmatrix}$$

autovalori di A: $\det\begin{pmatrix} -\lambda & \epsilon\hbar\omega \\ \epsilon\hbar\omega & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \epsilon^2\hbar^2\omega^2 = 0 \qquad \lambda = \pm\epsilon\hbar\omega$

Quindi il livello si separa in 2 livelli con degenerazione 3 di energie $\hbar\omega \pm \epsilon\hbar\omega = \hbar\omega(1\pm\epsilon)$

c)

Condizione i) implica che $|\psi\rangle$ è combinazione lineare dei 7 stati che corrispondono ai primi due livelli

Le condizioni ii) e iii) permettono di escludere i 3 stati con $J_z = -1$ e gli stati con $l=2$. Quindi ψ è una combinazione di $|1\,0\,0\rangle$ (stato fondam.) e $|0\,1\,1\rangle$, $|1\,1\,1\rangle$ (stati del I livello eccitato)

$$|\psi\rangle = \alpha|\overset{l}{1}\overset{j}{0}\overset{j_z}{0}\rangle + \beta|011\rangle + \gamma|111\rangle$$

Con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ (normalizzazione)

La condizione iv) implica $|\beta|^2 = \frac{1}{3}$

Per imporre la condizione v) cambiamo base passando a $|l\, l_z\, s_z\rangle_{LS}$

$$|\overset{l}{1}\,\overset{j}{0}\,\overset{j_z}{0}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|11-1\rangle_{LS} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|100\rangle_{LS} + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1-11\rangle_{LS}$$ [tabelle CG 1×1]

$$|011\rangle = |001\rangle_{LS}$$

$$|111\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|110\rangle_{LS} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|101\rangle_{LS}$$ [tabelle CG 1×1]

Quindi

$$|\psi\rangle = \alpha\left[\sqrt{\tfrac{1}{3}}|11-1\rangle_{LS} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}|100\rangle_{LS} + \sqrt{\tfrac{1}{3}}|1-11\rangle_{LS}\right]$$
$$+\beta|001\rangle_{LS}$$
$$+\gamma\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}}|110\rangle_{LS} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}|101\rangle_{LS}\right]$$

$$\text{Prob}(S_z = -\hbar) = \frac{|\alpha|^2}{3} \Rightarrow \frac{|\alpha|^2}{3} = \frac{2}{9} \Longrightarrow |\alpha|^2 = \frac{2}{3}$$

Segue $|\gamma|^2 = 1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0$

Quindi con una opportuna scelta di fase possiamo porre $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $\beta = \frac{e^{ia}}{\sqrt{3}}$ (e^{ia}: fase non determinata)

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[|11-1\rangle_{LS} - |100\rangle_{LS} + |1-11\rangle_{LS}\right]$$
$$+\frac{e^{ia}}{\sqrt{3}}|001\rangle_{LS}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|\underset{l}{1}\,\underset{j}{0}\,\underset{j_z}{0}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{ia}|011\rangle$$

L_z può assumere i valori $\pm\hbar, 0$

$\text{Prob}\,(L_z = \pm\hbar) = \frac{2}{9}$

$\text{Prob}\,(L_z = 0) = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

d)

$$|\psi t\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|100\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i(a-\omega t)}\,|011\rangle$$

$$\langle\psi t|\frac{x}{r}|\psi t\rangle = \frac{2}{3}\langle 100|\frac{x}{r}|100\rangle + \frac{1}{3}\langle 011|\frac{x}{r}|011\rangle \quad \Big\} \text{ nulli per parità } \left(\text{gli stati hanno lo stesso } \ell\right)$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i(a-\omega t)}\langle 100|\frac{x}{r}|011\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i(a-\omega t)}\langle 011|\frac{x}{r}|100\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i(a-\omega t)}\langle 100|\frac{x}{r}|011\rangle + \text{complesso coniugato}$$

Ora

[passaggio alla base $|\ell\, \ell_z\, s_z\rangle$]

$$\langle 100|\frac{x}{r}|011\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\;{}_{LS}\langle \overset{\ell}{1}\;\overset{\ell_z}{1}\;\overset{s_z}{-1}|\frac{x}{r}|\overset{\ell}{0}\;\overset{\ell_z}{0}\;\overset{s_z}{1}\rangle_{LS} - \sqrt{\frac{1}{3}}\;{}_{LS}\langle 1\;0\;0|\frac{x}{r}|0\;0\;1\rangle_{LS} \quad \Big\} = 0 \left(\text{componenti } S_z \text{ diverse}\right)$$
$$+ \sqrt{\frac{1}{3}}\;{}_{LS}\langle 1\;-1\;1|\frac{x}{r}|0\;0\;1\rangle_{LS}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}}\langle \underset{\ell}{1}\;\underset{\ell_z}{-1}|\frac{x}{r}|\underset{\ell}{0}\;\underset{\ell_z}{0}\rangle \quad \left(\text{eseguito prodotto scalare nello spazio spin}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}}\int d\Omega\; Y_1^{-1*}\,\frac{x}{r}\,Y_0^0$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}}\int d\Omega\;\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{+i\varphi}\sin\theta\cos\varphi\,\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{4\pi}\int \underset{\substack{\downarrow \\ \cos\theta = x}}{d\cos\theta\,\sin^2\theta}\;\underbrace{\int d\varphi\; e^{+i\varphi}\,\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)}_{\pi}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\, 2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Quindi

$$\langle\psi\, t|\tfrac{x}{r}|\psi\, t\rangle = \frac{1}{9}e^{i(a-\omega t)} + \text{compl. con.} = \frac{2}{9}\cos(a-\omega t)$$

ESERCIZIO 2

a) Nel sistema del CM, in termini delle variabili associate al moto relativo $x = x_1 - x_2$, p momento coniugato e di $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$, abbiamo

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2}\omega^2 x^2 + \underbrace{\frac{\omega}{\hbar}(S^2 - S_1^2 - S_2^2) + g\omega S_z}_{H_S}$$

Gli autovalori e le autofunzioni di H_S sono

$$H_S|\underset{S}{1}\ \underset{S_z}{m}\rangle = \hbar\omega\left(2-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right) + g\hbar\omega m = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+mg\right)$$

$$H_S|0\ 0\rangle = \hbar\omega\left(-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}\hbar\omega$$

Per il principio di Pauli, se $|n\rangle$ sono gli autostati dell'oscillatore 1D con energie $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ abbiamo

n pari autostato $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{pari}\\ \text{sotto scambio}\\ \text{(parità)}}}{|n\rangle}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{dispari}\\ \text{sotto}\\ \text{scambio}}}{|\underset{S}{0}\ \underset{S_z}{0}\rangle}$ $\quad E = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\hbar\omega = \hbar\omega(n-1)$

n disp. autostato $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{dispari}}}{|n\rangle}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{pari}}}{|1\ m\rangle}$ $\quad E = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+mg\right) = \hbar\omega(n+1+mg)$

Per $g=0$

Stati con $S=0$ (non degeneri)

$n=0 \quad E=-\hbar\omega$ non deg.

$n=2 \quad E=\hbar\omega$ nondeg.

$n=4 \quad E=3\hbar\omega$ non deg.

Stati con $S=1$ (tutti con deg = 3)

$n=1 \quad E=2\hbar\omega$ deg. 3 $(s_z=\pm1,0)$

$n=3 \quad E=4\hbar\omega$ deg. 3 $(s_z=\pm1,0)$

Livelli più bassi

$4\hbar\omega$ $n=3$ $S=1$ deg. 3

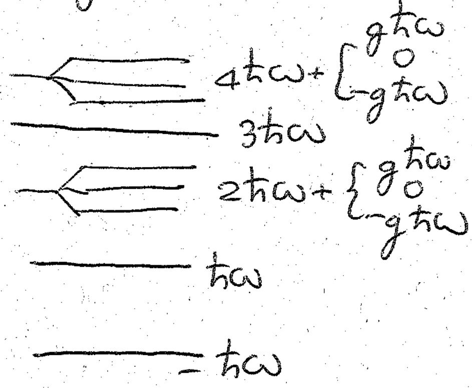
$3\hbar\omega$ $n=4$ $S=0$ non deg

$2\hbar\omega$ $n=1$ $S=1$ deg $=3$

$\hbar\omega$ $n=2$ $S=0$ non deg

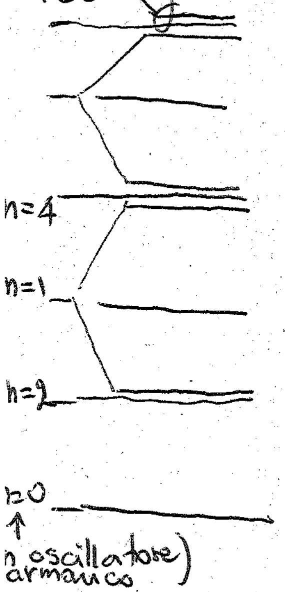
$-\hbar\omega$ $n=0$ $S=0$ non deg.

se $g\neq0$ ma minore di 1



Degenerazione completamente rimossa

Per $g=1$



$5\hbar\omega$: degenerazione 3

$4\hbar\omega$: non deg.

$3\hbar\omega$: degenerazione 3 $\begin{pmatrix} |3\rangle|1\,-1\rangle \\ |4\rangle|0\,0\rangle \\ |1\rangle|1\,1\rangle \end{pmatrix}$

$2\hbar\omega$: non degenere $(|1\rangle|1\,0\rangle)$

$\hbar\omega$: degenerazione 2 $\begin{pmatrix} |1\rangle|1\,-1\rangle \\ |2\rangle|0\,0\rangle \end{pmatrix}$

$-\hbar\omega \qquad |0\rangle|0\,0\rangle$

In generale: i livelli di energia sono $E_m=m\hbar\omega$, $m=-1,1,2,3\ldots$

I livelli con m pari sono nondegeneri

I livelli con m dispari, $m\geq3$ hanno degenerazione 3.

Il livello con $m=-1$ è non degenere, quello con $m=1$ ha deg. 2

3. Se $S_{1n} = \bar{S}_1 \cdot \hat{n}$, $S_{2n} = \bar{S}_2 \cdot \hat{n}$, $S_n = \bar{S}\cdot\hat{n} = S_{1n} + S_{2n}$

Sappiamo che

$$S_{1n}|\psi\rangle = +\frac{\hbar}{2}|\psi\rangle \qquad S_{2n}|\psi\rangle = +\frac{\hbar}{2}|\psi\rangle$$

Quindi $S_n|\psi\rangle = +\hbar|\psi\rangle$

Questo implica che $|\psi\rangle$ è una autofunzione di S^2 corrispondente a spin totale 1

Con energia $E < 5/2\,\hbar\omega$ vi sono solo tre stati con questa proprietà: $\underset{n}{|1\rangle}\,\underset{S\;S_z}{|1\;m\rangle}$. Possiamo quindi concludere che

$$|\psi\rangle = \underset{n}{|1\rangle}\,|\underset{S=1}{S}\;\underset{S_n=1}{S_n}\rangle_n$$

dove ~~[illegible]~~ $|1\;1\rangle_n$ è una combinazione lineare degli stati $\underset{S\;S_z}{|1\;m\rangle}$. Per calcolare tale combinazione notiamo che

$$|1\;1\rangle_n = \underset{S_1\;S_{1n}}{|\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\rangle_n}\,\underset{S_2\;S_{2n}}{|\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\rangle_n}$$

Esprimiamo ora lo stato $|\frac{1}{2}\;\frac{1}{2}\rangle_n$ in termini di $|\frac{1}{2}\;s_z\rangle$

Nella base delle autofunzioni di S_{1z}

$$\bar{S}_1\cdot\hat{n} = \frac{\hbar}{2}\,\bar{\sigma}\cdot\hat{n} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & 0\end{pmatrix}$$

Vogliamo calcolare l'autovettore con autovalore $+\hbar/2$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} e^{-i\pi/4}\beta = \alpha \\ e^{i\pi/4}\alpha = \beta \end{cases} \qquad |\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\rangle_n = \left(\alpha\,,\,\alpha e^{i\pi/4}\right)$$

La normalizzazione impone

$$2|\alpha|^2 = 1 \qquad |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi

$$\underset{S\ \ S\cdot n}{\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underset{S\ \ S_z}{\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}\underset{S\ \ S_z}{\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle}$$

Segue

$$|1\ 1\rangle_n = \frac{1}{2}\left(\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_1 + e^{i\pi/4}\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\right)\left(\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_2 + e^{i\pi/4}\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_2 + \frac{1}{2}e^{i\pi/4}\left(\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_2 + \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_2\right) + \frac{i}{2}\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_2$$

$$= \frac{1}{2}\underset{S\ \ S_z}{|1\ 1\rangle} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}\underset{S\ \ S_z}{|1\ 0\rangle} + \frac{i}{2}\underset{S\ \ S_z}{|1\ -1\rangle}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\overset{n}{|1\rangle}\overset{S\ S_z}{|1\,1\rangle} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}|1\rangle|1\ 0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle|1\ -1\rangle$$

4.) Non è autofunzione della Hamiltoniana per $g \neq 0$ dato che è combinazione di tre stati con energia $2\hbar\omega + g\hbar\omega$, $2\hbar\omega$, $2\hbar\omega - g\hbar\omega$

$$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \frac{1}{4}(2\hbar\omega + g\hbar\omega) + \frac{1}{2}(2\hbar\omega) + \frac{1}{4}(2\hbar\omega - g\hbar\omega) = 2\hbar\omega$$

5) $\text{Prob}\left(S_{1z} = -\frac{\hbar}{2} \text{ e } S_{2z} = -\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Soluzione alternativa (meno rapida) per esprimere $|1\ 1\rangle_n \equiv |S=1\ S_n=1\rangle$ in termini di $|S\ S_z\rangle$.

Si tratta di calcolare $\bar{S}\cdot\hat{n}$ per lo spin 1.

Nella base $|S\ S_z\rangle = \{|1\ 1\rangle, |1\ 0\rangle, |1\ -1\rangle\}$

$$S_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = S_+^+$$

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2i & 0 \\ -\sqrt{2}/2i & 0 & \sqrt{2}/2i \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S\cdot\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_x + S_y) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(1-i) & 0 \\ \frac{1}{2}(1+i) & 0 & \frac{1}{2}(1-i) \\ 0 & \frac{1}{2}(1+i) & 0 \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} & 0 & e^{-i\pi/4}/\sqrt{2} \\ 0 & \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Lo stato $|1\ 1\rangle_n$ è l'autovettore di autovalore $\hbar$

$$\hbar\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\pi/4}/\sqrt{2} & 0 \\ e^{i\pi/4}/\sqrt{2} & 0 & e^{-i\pi/4}/\sqrt{2} \\ 0 & \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4}\beta = \alpha \\ e^{i\pi/4}/\sqrt{2}\,\alpha + e^{-i\pi/4}/\sqrt{2}\,\gamma = \beta \Rightarrow \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}\beta = \gamma \end{cases}$$

L'autovettore è

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4}\beta,\ \beta,\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}\beta\right)$$

Normalizzazione

$$\frac{|\beta|^2}{2} + |\beta|^2 + \frac{|\beta|^2}{2} = 2|\beta|^2 = 1 \qquad |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Per avere lo stesso stato trovato prima scegliamo la fase di β in modo che $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} \beta = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} \beta = \frac{1}{2} e^{i\pi/2} = \frac{i}{2}$$

Quindi l'autovettore è

$$\overset{S\ \ S\cdot n}{|1\ 1\rangle_n} = \alpha|1\ 1\rangle + \beta|1\ 0\rangle + \gamma|1\ -1\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\underset{S\ S_z}{|1\ 1\rangle} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} \underset{S\ S_z}{|1\ 0\rangle} + \frac{i}{2} \underset{S\ \ S_z}{|1\ -1\rangle}$$

che ovviamente coincide con il risultato precedente

Esame di Meccanica Quantistica, 11/02/2022

Esercizio 1. Si consideri una particella di massa m e spin 1 libera di muoversi in tre dimensioni, soggetta alla Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \alpha z S_z$$

con $\alpha = A m^a \hbar^b \omega^c$ e A costante adimensionale.

a) Con l'analisi dimensionale si determinino gli esponenti a, b, c.

b) Assumendo $0 < |A| \leq 1$, si calcolino le energie e le degenerazioni dei primi quattro livelli della Hamiltoniana.

c) Si determinino tutti gli stati $|\psi\rangle$ tali che: (i) hanno energia pari a quella dello stato fondamentale; (ii) vale $\langle\psi|z|\psi\rangle = 0$. Si calcoli per tutti questi stati la dispersione Δz, dove $(\Delta z)^2 = \langle\psi|z^2|\psi\rangle - \langle\psi|z|\psi\rangle^2$.

d) Si consideri una perturbazione

$$V = B m^e \hbar^f \omega^g (x^2 + y^2) S_z$$

dove $|B| \ll 1$ è una costante adimensionale. Si calcolino i nuovi esponenti e, f, g, e l'effetto di tale perturbazione sullo stato fondamentale di H, calcolando l'energia dei nuovi livelli e la loro degenerazione.

Esercizio 2. Due particelle identiche non interagenti di massa m, spin 1/2 e carica elettrica nulla sono confinate sulla superficie laterale di un cilindro di altezza L e raggio R, ossia, in coordinate cilindriche (r, ϕ, z), sulla superficie $r = R$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq L$. Si assuma $R \gg L$.

1) Si ricavi lo spettro dei livelli energetici. In particolare, per i primi due livelli, si discuta la degenerazione e si scriva esplicitamente (in coordinate cilindriche) una base di autofunzioni per ciascun livello.

2) Ad un certo istante viene acceso un campo magnetico uniforme diretto lungo l'asse x, $\boldsymbol{B} = (B, 0, 0)$ in coordinate cartesiane. L'Hamiltoniana viene modificata in $H = H_0 + V$, dove H_0 è l'Hamiltoniana in assenza di campo magnetico, $V = \gamma \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B}$ è l'interazione dovuta al momento di dipolo magnetico delle particelle e $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ è lo spin totale del sistema. Si assuma $0 < \gamma B < \hbar/(10\, m R^2)$.
Si determini come i due livelli energetici considerati in precedenza vengono modificati, specificandone il nuovo grado di degenerazione.

3) Si determini lo stato $|\psi\langle$ tale che: i) una misura dell'energia (in presenza del campo magnetico, ossia con Hamiltoniana H) fornisce un risultato pari all'energia del primo livello eccitato; ii) una misura della componente del momento angolare totale lungo la direzione verticale, $L_z = L_{1z} + L_{2z}$ dà come risultato $+\hbar$.

4) Si calcoli la probabilità che le due particelle nello stato $|\psi\rangle$ si trovino entrambe nella metà della superficie cilindrica con $0 \leq \phi \leq \pi$. Quanto varrebbe la stessa probabilità se le due particelle fossero distinguibili?

5) Al tempo $t = 0$ il campo magnetico viene istantaneamente ruotato di un angolo θ rispetto ad un asse verticale, per cui per $t > 0$ il sistema evolve con Hamiltoniana H, avendo posto $\boldsymbol{B} = (B\cos\theta, B\sin\theta, 0)$. Si calcoli lo stato $|\psi_t\rangle$ ottenuto al tempo t.

Esercizio 1

a) Analisi dimensionale (z) (S_z)

$$[\epsilon] = [m]^a [\hbar]^b [\omega]^c [L][\hbar] \qquad [\hbar] = [ET] = [ML^2T^{-1}]$$

$$[ML^2T^{-2}] = [M^a][ML^2T^{-1}]^{b+1}[T^{-1}]^c[L]$$

$$\begin{array}{ll} (M) & 1 = a+b+1 \longrightarrow a = -b = 1/2 \\ (L) & 2 = 2b+2+1 \longrightarrow b = -1/2 \\ (T) & -2 = -b-1-c \longrightarrow c = 1-b = 3/2 \end{array}$$

$$\alpha = m^{1/2}\hbar^{-1/2}\omega^{3/2} A \qquad \alpha = \hbar\omega\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{1}{\hbar} A$$

$$\alpha z S_z = A \underbrace{\hbar\omega}_{\substack{\text{unità} \\ \text{di energia}}} \xi_z \frac{S_z}{\hbar} \qquad \xi_z = z\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

spin adimensionale

posizione adimensionalizzata

(b)

Dato che $[H, S_z] = 0$ cerchiamo autofunzioni ~~con~~ della forma $\psi(\vec{r})|s\rangle$ con $S_z|s\rangle = \hbar s|s\rangle$ $[s = -1, 0, 1]$

$$H\psi|s\rangle = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \hbar s\alpha z\right)\psi|\pm 1\rangle$$

Quindi $\psi(r)$ soddisfa a $[H\psi|s\rangle = E\psi|s\rangle]$

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \alpha\hbar s z\right)\psi = E\psi$$

Si tratta di un oscillatore armonico che oscilla attorno a punto di equilibrio $\bar{r}_{eq} = (0, 0, z_0)$ dove

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}\right|_{r=r_q} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = m\omega^2 z_0 + \alpha\hbar s = 0$$

$$\Rightarrow z_0 = A\hbar\omega\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{1}{\hbar}\frac{(-\hbar s)}{m\omega^2}$$

$$= -As\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Se cambiamo variabili in modo da avere il centro di oscillazione nell'origine, $Z = z - z_0$, otteniamo

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + \underbrace{\frac{1}{2}m\omega^2(Z+z_0)^2 + \hbar s\alpha\,(Z+z_0)}_{\text{i termini lineari in } Z \text{ si cancellano}}$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2 Z^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 z_0^2 + \hbar s\alpha z_0$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2 z_0^2 + \hbar s\alpha z_0 = \frac{m\omega^2}{2}A^2s^2\frac{\hbar}{m\omega} + \hbar s\,\hbar\omega\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\frac{A}{\hbar}\left(-As\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}A^2s^2\hbar\omega - A^2s^2\hbar\omega = -\frac{1}{2}A^2s^2\hbar\omega$$

Quindi
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+Z^2) - \frac{\hbar\omega}{2}A^2s^2$$

Spettro: $s = \pm 1$
$$E = \hbar\omega\left(n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2}\right) - \frac{\hbar\omega}{2}A^2$$

Spettro $s = 0$
$$E = \hbar\omega\left(n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2}\right)$$

<u>STATO FOND</u>:

$s = \pm 1$ $\quad n_x = n_y = n_z = 0 \quad E = \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{\hbar\omega}{2}A^2$ $\quad$ deg $= 2$

<u>I ecc</u>

$s = 0$ $\quad n_x = n_y = n_z = 0 \quad E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $\quad$ non deg.

II ecc.

$s = \pm 1$ $\quad (n_x, n_y, n_z) = \begin{cases}(1,0,0)\\(0,1,0)\\(0,0,1)\end{cases} \quad E = \frac{5}{2}\hbar\omega - \frac{\hbar\omega}{2}A^2$ $\quad$ deg $= 3\times 2 = 6$

III ecc.

$$S=0 \qquad (n_x, n_y, n_z) = \begin{cases} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{cases} \qquad E = \frac{5}{2}\hbar\omega \qquad deg = 3$$

c)
Lo stato fondamentale ha degenerazione 2. I due stati hanno $S=\pm 1$ e corrispondono a due oscillatori con minimo spostato in $\left(0,0,-AS\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\right) = (0,0,S r_0)$

$$r_0 = -A\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Definiamo le funzioni <u>spaziali</u>

$$|S=1\rangle_{\vec r} = |0\,0\,0\rangle_{S=1} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+Z^2)\right)$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+(z-r_0)^2)\right)$$

$$|S=-1\rangle_{\vec r} = |0\,0\,0\rangle_{S=-1} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+(z+r_0)^2)\right)$$

Notiamo che

$$_{\vec r}\langle S=1|z|S=1\rangle_{\vec r} = \langle S=1|Z+z_0|S=1\rangle$$

$$= \underbrace{\langle S=1|Z|S=1\rangle}_{=0} + z_0 = z_0 = r_0$$

$$_{\vec r}\langle S=-1|z|S=-1\rangle_{\vec r} = \underbrace{\langle S=-1|Z|S=-1\rangle}_{=0} + z_0 = z_0 = -r_0$$

$$_{\vec r}\langle S=1|z^2|S=1\rangle_{\vec r} = \underbrace{\langle S=1|Z^2|S=1\rangle}_{=\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}} + 2z_0 \underbrace{\langle S=1|Z|S=1\rangle}_{=0} + z_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega} + r_0^2 = \left(\frac{1}{2}+A^2\right)\frac{\hbar}{m\omega}$$

$$_{\vec r}\langle S=-1|z^2|S=-1\rangle = \left(\frac{1}{2}+A^2\right)\frac{\hbar}{m\omega}$$

Lo stato considerato è

$$|\psi\rangle = \alpha |s=1\rangle_{\vec{r}} \underset{\underset{\text{spin}}{\uparrow}}{|1\rangle} + \beta |s=-1\rangle_{\vec{r}} |-1\rangle$$

$$\langle\psi|z|\psi\rangle = |\alpha|^2 \langle 1| {}_r\langle s=1|z|s=1\rangle_r |1\rangle$$
$$+ |\beta|^2 \langle -1| {}_r\langle s=-1|z|s=-1\rangle_r |-1\rangle$$
$$\left.\begin{aligned} &+ \alpha^*\beta \langle 1| {}_r\langle s=1|z|s=-1\rangle_r |-1\rangle \\ &+ \alpha\beta^* \langle -1| {}_r\langle s=-1|z|s=1\rangle_r |1\rangle \end{aligned}\right\} = 0$$ per ortogonalità ket di spin

$$= |\alpha|^2 {}_r\langle s=1|z|s=1\rangle_r + |\beta|^2 {}_r\langle s=-1|z|s=-1\rangle_{\vec{r}}$$
$$= |\alpha|^2 r_0 + |\beta|^2(-r_0) = r_0 (|\alpha|^2 - |\beta|^2)$$

Quindi

$$\begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 & \text{normalizzazione} \\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 0 & \langle\psi|z|\psi\rangle = 0 \end{cases} \Longrightarrow |\alpha| = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |s=1\rangle_{\vec{r}} |1\rangle + \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} |s=-1\rangle_r |-1\rangle$$ $\alpha \equiv$ arbitraria

$$\langle\psi|z^2|\psi\rangle = |\alpha|^2 {}_r\langle s=1|z^2|s=1\rangle_r$$
$$+ |\beta|^2 {}_r\langle s=-1|z^2|s=-1\rangle_r$$

[I termini misti sono nulli per l'ortogonalità delle parte di spin]

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + A^2\right)\frac{\hbar}{m\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + A^2\right)\frac{\hbar}{m\omega}$$
$$= \left(\frac{1}{2} + A^2\right)\frac{\hbar}{m\omega}$$

$$\Delta z = \left(\frac{1}{2} + A^2\right)^{1/2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

d)

Per calcolare gli esponenti e, f, g si può procedere con l'analisi dimensionale oppure si può notare che

$$V = B\hbar\omega \left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right)\frac{S_z}{\hbar} \qquad \xi_x = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \qquad \xi_y = y\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

è dimensionalmente corretta

Quindi

$$V = B\hbar\omega \cdot \frac{m\omega}{\hbar}(x^2+y^2)\frac{S_z}{\hbar}$$

$$= B\frac{m\omega^2}{\hbar}(x^2+y^2)S_z \longrightarrow \quad e=1 \quad f=-1 \quad g=2.$$

Nelle direzione x e y si tratta di oscillatori che oscillano attorno all'origine quindi

$${}_r\langle s=\pm1|\,x^2\,|s=\pm1\rangle_r = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$${}_r\langle s=\pm1|\,y^2\,|s=\pm1\rangle_r = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

Quindi, i termini diagonali di V sulla base sono

$$\langle\pm1|\,{}_r\langle s=\pm1|V|s=\pm1\rangle_r|\pm1\rangle$$

elemento di matrice dello spin

$$= B\frac{m\omega^2}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}+\frac{\hbar}{2m\omega}\right)(\pm\hbar)$$

$$= \pm B\hbar\omega$$

I termini non diagonali sono nulli per l'ortogonalità delle funzioni di spin

$$\langle1|\,{}_r\langle s=1|V|s=-1\rangle_r|-1\rangle = 0$$

$$\langle-1|\,{}_r\langle s=-1|V|s=1\rangle_r|1\rangle = 0$$

Quindi

$$V = \begin{pmatrix} B\hbar\omega & 0 \\ 0 & -B\hbar\omega \end{pmatrix}$$

Il livello si separa in due livelli di energie

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2}A^2 + B\hbar\omega$$

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2}A^2 - B\hbar\omega$$

ADDENDUM

Si poteva trattare la Hamiltoniana $H+V$ anche in modo esatto, notando che su $\psi(r)|S\rangle$ ~~si~~ si riduce a

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2) + \alpha\hbar s z + sBm\omega^2(x^2+y^2)$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(1+2Bs)x^2 + \quad \left[\begin{matrix}\text{oscillatore con pulsazione} \\ \Omega = \omega(1+2Bs)^{1/2}\end{matrix}\right]$$

$$\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(1+2Bs)y^2 \quad \left[\begin{matrix}\text{oscillatore con pulsazione} \\ \Omega = \omega(1+2Bs)^{1/2}\end{matrix}\right]$$

$$\frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 + \alpha\hbar s z \quad \left[\begin{matrix}\text{oscillatore con pulsazione } \omega \\ \text{e punto eq. } -As\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\end{matrix}\right]$$

Quindi ~~per~~

$s=1 \qquad E = \hbar\omega(1+2B)^{1/2}(n_x+n_y+1) + \hbar\omega\left(n_z+\frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega}{2}A^2$

$s=0 \qquad E = \hbar\omega\left(n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2}\right)$

$s=-1 \qquad E = \hbar\omega(1-2B)^{1/2}(n_x+n_y+1) + \hbar\omega\left(n_z+\frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega}{2}A^2$

Esercizio 9

1) Il sistema ha simmetria cilindrica. La hamiltoniana in coordinate cilindriche è (per UNA particella)

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Il problema è separabile. Il problema in ϕ corrisponde alla particella sul cerchio, quello in z a quello di una buca di ampiezza L.

Quindi

$$E_{nM} = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2 n^2}{L^2}}_{\text{(buca)}} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{M^2}{R^2}}_{\text{(cerchio)}} \qquad \begin{array}{l} n: 1 \dots \infty \\ M: -\infty, \dots +\infty \end{array}$$

$$\psi_{nM}(z,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iM\phi} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{\pi n z}{L}$$

[Nota $L_z\psi_{nM} = \hbar M \psi_{nM}$]

Nel limite $R \gg L$ i due livelli più bassi sono

$$n=1 \quad M=0 \quad E_{10} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}$$

$$n=1 \quad M=\pm1 \quad E_{1,\pm1} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{\hbar^2}{2mR^2}$$

Spettro per due particelle (parte spaziale)

I due livelli più bassi sono

part. 1 $(n=1 \quad M=0)$ part. 2 $(n=1 \quad M=0)$ $\psi_{10}(z_1,\varphi_1)\psi_{10}(z_2,\varphi_2)$

$$E_0 = E_{10} + E_{10} = \frac{\hbar^2}{m}\frac{\pi^2}{L^2}$$

$$\begin{cases} \text{part. 1 } (n=1 \quad M=\pm1) \quad \text{part. 2 } (n=1 \quad M=0) \quad \psi_{1,\pm1}(z_1,\varphi_1)\psi_{10}(z_2,\varphi_2) \\ (n=1 \quad M=0) \quad (n=1 \quad M=\pm1) \quad \psi_{10}(z_2,\varphi_2)\psi_{1,\pm1}(z_1,\varphi_1) \end{cases}$$

$$E_1 = E_{10} + E_{1,\pm1} = \frac{\hbar^2}{m}\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{\hbar^2}{2mR^2}$$

Costruiamo le funzioni simmetriche ed antisimmetriche per scambio per il I° livello eccitato

$$\psi_{a,\pm1}(z_1,z_2,\varphi_1,\varphi_2) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{1,\pm1}(z_1,\varphi_1)\psi_{10}(z_2,\varphi_2) - \psi_{10}(z_1,\varphi_1)\psi_{1,\pm1}(z_2,\varphi_2)\right)$$

$$\psi_{s,\pm1}(z_1,z_2,\varphi_1,\varphi_2)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{1,\pm1}(z_1,\varphi_1)\psi_{10}(z_2,\varphi_2) + \psi_{10}(z_1,\varphi_1)\psi_{1,\pm1}(z_2,\varphi_2)\right)$$

Per il principio di Pauli otteniamo il seguente spettro

STATO FOND: $\qquad \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

$$\underbrace{\psi_{10}(z_1,\varphi_1)\psi_{10}(z_2,\varphi_2)}_{\text{pari sotto scambio}}\underbrace{|0\ 0\rangle}_{\text{dispari}} \qquad (S\ S_z) \qquad \text{energia } E_0$$

I eccitato

$\psi_{a,1}|1\ S_z\rangle$ 3 stati
$\psi_{a,-1}|1\ S_z\rangle$ 3 stati
$\psi_{s,1}|0\ 0\rangle$ 1 stato
$\psi_{s,-1}|0\ 0\rangle$ 1 stato

degen. 8

energia E_1

2) La nuova interazione agisce solo sugli stati $S=1$. Se $|1\ S_x\rangle_x$ sono gli autostati di S^2, S_x, il nuovo spettro è dato da

STATO FOND $\quad E = E_0$

$$\psi_{10}(z_1\,\varphi_1)\,\psi_{10}(z_2,\varphi_2)\,|0\ 0\rangle_x$$

I eccitato $\quad E = E_1 - \hbar\gamma B$

$\psi_{a1}\,|1\ -1\rangle_x$

$\psi_{a-1}\,|1\ -1\rangle_x$ $\quad$ deg. 2

II eccitato $\quad E = E_1$

$\psi_{a1}\,|1\ 0\rangle_x$

$\psi_{a-1}\,|1\ 0\rangle_x$

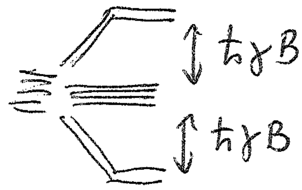
$\psi_{s1}\,|0\ 0\rangle_x$ $\quad$ deg. 4

$\psi_{s-1}\,|0\ 0\rangle_x$

III eccitato $\quad E = E_1 + \hbar\gamma B$

$\psi_{a1}\,|1\ 1\rangle_x$

$\psi_{a-1}\,|1\ 1\rangle_x$ $\quad$ deg. 2



Ridotta la degenerazione

$8 \rightarrow 2+4+2$

3)

Lo stato è $\quad |\psi\rangle = (\alpha\psi_{a1} + \beta\psi_{a-1})\,|1\ -1\rangle_x$

Quindi $\quad L_z = L_{1z} + L_{2z}$

$\langle\psi|L_z|\psi\rangle =$ (effettuando prodotto scalare sullo spin)

$$(\alpha^*\langle\psi_{a1}| + \beta^*\langle\psi_{a-1}|)\,L_z\,|(\alpha|\psi_{a1}\rangle + \beta|\psi_{a-1}\rangle)$$

Ora

$$(L_{1z}+L_{2z})|\psi_{a\pm1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(L_{1z}\psi^{(1)}_{1\pm1}\,\psi_{10}(2) - \cancelto{0}{L_{1z}\psi_{10}(1)}\,\psi_{1\pm1}(2) + \psi_{1\pm}(1)\,\cancelto{0}{L_{2z}\psi_{10}(2)} - \psi_{10}(1)\,L_{2z}\psi_{1\pm1}(2)\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\pm\hbar)\,\psi_{1\pm1}(1)\,\psi_{10}(2) - (\pm\hbar)\,\psi_{10}(1)\,\psi_{1\pm1}(2)\Big)$$

$= \pm\hbar \, | \psi_{a,\pm 1} \rangle$

Quindi $\langle \psi | L_z | \psi \rangle = \hbar \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 \right)$

La normalizzazione impone $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$$\begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ \hbar \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 \right) = \hbar \end{cases} \qquad \begin{matrix} |\alpha|^2 = 1 \\ |\beta|^2 = 0 \end{matrix}$$

Quindi $|\psi\rangle = |\psi_{a1}\rangle |1 \, -1\rangle_x$

4.

Definiamo $f(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi z}{L}$ $\qquad \left[\int_0^L dz \, f(z)^2 = 1 \text{ da notare} \right]$

$$\psi_{1,\pm 1}(z, \varphi) = f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i \varphi}$$

$$\psi_{1,0}(z, \varphi) = f(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\psi_{a1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(f(z_1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi_1} f(z_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} -$$

$$- f(z_1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(z_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i \varphi_2} \Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi} f(z_1) f(z_2) \left(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2} \right)$$

Quindi

$$\text{Prob.} = \int_0^L dz_1 \int_0^\pi d\varphi_1 \int_0^L dz_2 \int_0^\pi d\varphi_2 \, |\psi_{a1}|^2 \underbrace{{}_x\langle 1 \, -1 | 1 \, -1 \rangle_x}_{=1}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \underbrace{\int_0^L dz_1 \, f(z_1)^2}_{=1} \underbrace{\int_0^L dz_2 \, f(z_2)^2}_{=1} \int_0^\pi d\varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \left| e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2} \right|^2$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} d\varphi_2 \, \underbrace{(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2})(e^{-i\varphi_1} - e^{-i\varphi_2})}_{= \left(2 - e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} - e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2}\right)}$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \cdot 2 \cdot \pi^2 - \left(\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\pi} d\varphi_1 \, e^{i\varphi_1} \int_0^{\pi} d\varphi_2 e^{-i\varphi_2} + \text{complesso coniugato} \right)$$

$$= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{8\pi^2} (2i)(-2i) + \text{complesso coniugato} \right)$$

$$= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}$$

Il calcolo delle probabilità non dipende dalla distinguibilità / indistinguibilità delle particelle. Si noti però che l'indistinguibilità ha giocato un ruolo fondamentale nel definire $|\psi\rangle$. Per particelle distinguibili, la parte spaziale sarebbe stata una combinazione arbitraria di φ_{a1} e φ_{s1}.

■.

5. Per questa domanda la parte spaziale è irrilevante. Il problema consiste nel riscrivere lo stato $|1\,-1\rangle_x$ in termini delle autofunzioni di $S\cdot\hat{n}$, ossia riscrivere

$$|1\,-1\rangle_x = a\,|1\,1\rangle_{S\cdot\hat{n}} + b\,|1\,0\rangle_{S\cdot\hat{n}} + c\,|1\,-1\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$

Quindi

$$|\psi\rangle = |\psi_{a1}\rangle\,|1\,-1\rangle_x$$

$$|\psi_t\rangle = e^{-iHt/\hbar}\,|\psi\rangle$$

$$= \left(e^{-iH_0t/\hbar}\,|\psi_{a1}\rangle\right) e^{-iVt/\hbar}\,|1\,-1\rangle_x$$

ψ_{a1} è una autofunzioni di H_0 $\quad \left[E_{a1} = \frac{\hbar^2}{m}\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{\hbar^2}{2mR^2}\right]$
quindi $e^{iH_0t/\hbar}|\psi_{a1}\rangle = e^{-iE_{a1}t/\hbar}\,|\psi_{a1}\rangle$

$$= e^{-iE_{a1}t/\hbar}\,|\psi_{a1}\rangle\,e^{-iVt/\hbar}\,|1\,-1\rangle_x$$

fase eliminabile

Quindi

$$|\psi_t\rangle = |\psi_{a1}\rangle\,e^{-iVt/\hbar}\left(a|1\,1\rangle_{S\cdot\hat{n}} + b|1\,0\rangle_{S\cdot\hat{n}} + c|1\,-1\rangle_{S\cdot\hat{n}}\right)$$

$$= |\psi_{a1}\rangle\Big[a\,e^{-i\gamma Bt}\,|1\,1\rangle_{S\cdot\hat{n}} + b\,|1\,0\rangle_{S\cdot\hat{n}} + c\,e^{i\gamma Bt}\,|1\,-1\rangle_{S\cdot\hat{n}}\Big]$$

Quindi il problema si riduce al calcolo di a, b, c.

METODO 1:

$$|1\,-1\rangle_x = \left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{x,1}\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{x,2}$$

funzione di spin delle due particelle.

Riscriviamo ora $\left|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right\rangle_x$ di singola particella in termini delle autofunzioni di $S_1\cdot\hat{n}$ e $S_2\cdot\hat{n}$.

Per lo spin ½

$$S\cdot\hat{n} = \frac{\hbar}{2}\,\bar{\sigma}\cdot\hat{n} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta - i\sin\theta \\ \cos\theta + i\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

Autofunzioni

autoval $+\frac{\hbar}{2}$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} e^{-i\theta} b = a \\ e^{i\theta} a = b \end{cases} \qquad \bar{v} = (a,\ e^{i\theta} a) \qquad |v|^2 = |a|^2 + |a|^2 = 1$$

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}\right) \qquad |a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

autoval $-\frac{\hbar}{2}$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} e^{-i\theta} b = -a \\ e^{i\theta} a = -b \end{cases} \qquad \bar{v} = (a,\ -e^{i\theta} a) \qquad |v|^2 = |a|^2 + |a|^2 = 1$$

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{e^{+i\theta}}{\sqrt{2}}\right) \qquad |a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi, dato che ~~gbsi~~ $S_x = S\cdot\hat{n}$ per $\theta = 0$ abbiamo

$$|\tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\rangle_x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = a'|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot\hat{n}} + b'|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$

$$a' = {}_{S\cdot\hat{n}}\langle\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle_x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-i\theta} = \frac{1}{2}(1 - e^{-i\theta}) = i e^{-i\theta/2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$b' = {}_{S\cdot\hat{n}}\langle\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle_x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\theta}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + e^{-i\theta}) = \frac{e^{-i\theta/2}}{2}(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})$$

$$= e^{-i\theta/2}\cos\frac{\theta}{2}$$

Segue

$$|1\,-1\rangle_x = |\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle_{x1}|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle_{x2}$$

$$= a'^2\,|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot\hat{n},1}|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot\hat{n},2}$$

$$+ b'^2\,|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot\hat{n},1}|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot\hat{n},2}$$

$$+ ab'\left(|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot\hat{n},1}|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot\hat{n},2} + |\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot\hat{n},1}|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot\hat{n},2}\right)$$

$$= a'^2\,|1\,1\rangle_{S\cdot\hat{n}} + b'^2\,|1\,-1\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$

$$+ \sqrt{2}\,a'b'\,|1\,0\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$

$$a'^2 = -e^{-i\theta} \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$b'^2 = e^{-i\theta} \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{2}a'b' = \sqrt{2}\, i e^{-i\theta} \sin\theta/2 \cos\frac{\theta}{2} = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} \sin\theta$$

Quindi

$$|1\,-1\rangle_x = -e^{-i\theta} \sin^2\frac{\theta}{2} |1\;1\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$
$$+\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} \sin\theta |1\,0\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$
$$+e^{-i\theta} \cos^2\frac{\theta}{2} |1\,-1\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$

<u>METODO 2</u>

È possibile ridefinire (in modo ciclico) gli assi

$Z = x \quad X = y \quad Y = z$

Nel nuovo sistema $\quad (1,0,0) \longrightarrow (0,0,1)$

$(\cos\theta, \sin\theta, 0) \rightarrow (\sin\theta, 0, \cos\theta)$

Quindi, nel nuovo sistema d'assi vogliamo esprimere $|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle_z$ in termini degli autovettori di

$$\bar{S}\cdot\hat{n} = \frac{\hbar}{2}\bar{\sigma}\cdot\hat{n} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Autofunzioni

autoval $+\hbar/2$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\cos\theta\, a + \sin\theta\, b = a \\ \sin\theta\, a - \cos\theta\, b = b\end{cases} \qquad b = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\, a = \frac{2\sin^2\theta/2}{2\sin\theta/2\cos\theta/2}\, a$$

$$= \tan\frac{\theta}{2}\, a$$

$$\bar{v} = \left(a, \tan\frac{\theta}{2} a\right) \qquad |v|^2 = \left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)|a|^2 = \frac{|a|^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = 1 \qquad |a| = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$v = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

autoval $-\hbar/2$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

$$\cos\theta\, a + \sin\theta\, b = -a$$

$$\sin\theta\, a - \cos\theta\, b = -b \qquad a = -\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\, b = -\tan\frac{\theta}{2}\, b$$

$$\bar{v} = \left(-\tan\frac{\theta}{2}\, b, b\right) \qquad |b| = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$v = \left(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

Quindi

$$\left|\tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_z = (0,1) = a'\left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle_{S\cdot\hat{n}} + b'\left|\tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$

$$a' = {}_{S\cdot\hat{n}}\left\langle\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\middle|\tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_z = (0,1)\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right) = \sin\frac{\theta}{2}$$

$$b' = {}_{S\cdot\hat{n}}\left\langle\tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\middle|\tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_z = (0,1)\cdot\left(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2}$$

Quindi otteniamo

$$\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle_z = \sin\frac{\theta}{2}\left|\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\right\rangle_{S\cdot\hat{n}} + \cos\frac{\theta}{2}\left|\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$

che è equivalente (a meno di una ridefinizione delle fase degli stati) a quella trovata con il primo metodo [SULLE FASI vedere CAVEAT alla fine)

TERZO METODO: direttamente nello spazio $S=1$

Nello spazio vettoriale $S=1$, nella base degli autostati di S_z abbiamo

$$S_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad S_y = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{n}\cdot S = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ e^{i\theta} & 0 & e^{-i\theta} \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

autovettore con autoval $+\hbar$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ e^{i\theta} & 0 & e^{-i\theta} \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} \beta = \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\theta}\alpha + e^{-i\theta}\gamma) = \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \beta = \gamma \end{cases}$$

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta}\beta, \beta, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}\beta\right)$$

$$\langle v|v\rangle = \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right)|\beta|^2 = 2|\beta|^2 = 1$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|1\ 1\rangle_{S\cdot\hat{n}} = \left(\frac{e^{-i\theta}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{i\theta}}{2}\right)$$

autovett. con autoval. $-\hbar$

Stesso calcolo con $\beta \to -\beta$ $\quad |1\ -1\rangle_{S\cdot\hat{n}} = \left(\frac{e^{-i\theta}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{i\theta}}{2}\right)$

autovett. con autoval 0

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ e^{i\theta} & 0 & e^{-i\theta} \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} e^{-i\theta}\beta = 0 \\ e^{i\theta}\alpha + e^{-i\theta}\gamma = 0 \\ e^{i\theta}\beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \beta = 0 \\ \gamma = -e^{2i\theta}\alpha \end{matrix}$$

$$v = (\alpha, 0, -e^{2i\theta}\alpha) \qquad \langle v|v\rangle = 2|\alpha|^2 = 1 \qquad |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\alpha = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}$ (scelta di fase comoda)

$$v = \left(\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\right)$$

Quindi vogliamo esprimere

$$|1\ -1\rangle_x = \left.\left(\frac{e^{-i\theta}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{i\theta}}{2}\right)\right|_{\theta=0} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

nella base di $S\cdot\hat{n}$

$$|1\ -1\rangle_x = a|1, 1\rangle_{S\cdot n} + b|1\ 0\rangle_{S\cdot n} + c|1\ -1\rangle_{S\cdot n}$$

$$a = \langle 1\, 1 | 1\, -1 \rangle_x = \left(\frac{e^{i\theta}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-i\theta}}{2} \right) \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$$
$S\cdot\hat{n}$

$$= \frac{1}{4} e^{i\theta} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-i\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1-\cos\theta) = -\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$b = \langle 1\, 0 | 1\, -1 \rangle_x = \left(\frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$$
$S\cdot\hat{n}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\theta} - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\theta} =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} (-1) \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin\theta$$

$$c = \langle 1\, -1 | 1\, -1 \rangle_x = \left(\frac{e^{i\theta}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-i\theta}}{2} \right) \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$$
$S\cdot\hat{n}$

$$= \frac{1}{4} e^{i\theta} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-i\theta}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

A parte le fasi otteniamo il risultato trovato precedentemente

CAVEAT SULLE FASI:

I risultati ottenuti differiscono per delle fasi. Questo <u>NON</u> significa che ~~tutte~~ le fasi sono arbitrarie, ma solo che nei tre calcoli abbiamo definito in modo diverso gli autostati.

VERIFICHIAMO ESPLICITAMENTE L'EQUIVALENZA.

Nel metodo 1 abbiamo definito

$$\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_{S\cdot\hat{n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_{S\cdot\hat{n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}\right)$$

Ridefiniamoli come

$$\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_{S\hat{n}} = \underbrace{ie^{-i\theta/2}}_{\text{fase}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{i\theta/2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{ie^{-i\theta/2}}{\sqrt{2}}, \frac{ie^{i\theta/2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_{S\cdot\hat{n}} = \underbrace{e^{-i\theta/2}}_{\text{fase}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\theta/2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta/2}\right)$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_x = \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_{S\cdot n}\Big|_{\theta=0} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$a' = {}_{Sn}\!\left\langle\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\middle|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_x = \left(-\frac{ie^{i\theta/2}}{\sqrt{2}}, \frac{-ie^{-i\theta/2}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{i}{2}e^{i\theta/2} + \frac{i}{2}e^{-i\theta/2} = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}\right)$$

$$= \sin\frac{\theta}{2}$$

$$b' = {}_{Sn}\!\left\langle\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\middle|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_x = \left(\frac{e^{i\theta/2}}{\sqrt{2}}, -\frac{e^{-i\theta/2}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{i\theta/2} + \frac{1}{2}e^{-i\theta/2} = \cos\frac{\theta}{2}$$

Abbiamo riottenuto il risultato del metodo 2

Nel metodo 2 otterremmo

$$|1\ -1\rangle_x = \sin^2\frac{\theta}{2}\,|1\ 1\rangle_{S\cdot\hat{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\,|1\ 0\rangle_{S\cdot n} + \cos^2\frac{\theta}{2}\,|1\ -1\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$

Nel metodo 3 otteniamo un risultato con fasi diverse

Per ottenere lo stesso risultato basta ridefinire

$$|1\ 1\rangle_{S\cdot n} = -\left(\frac{e^{-i\theta}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{i\theta}}{2}\right)$$
$$= \left(-\frac{e^{-i\theta}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)$$

$$|1\ 0\rangle_{S\cdot n} = -i\left(\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\right)$$

lasciando invariato $|1\ -1\rangle_{S\cdot\hat{n}}$.

Calcolo ~~del~~ punto 5. usando le matrici di rotazione

QUARTO METODO

Utilizziamo il fatto che lo spin è il generatore delle rotazioni

$$e^{-i\theta S_z/\hbar} S_x e^{i\theta S_z/\hbar} = S_x \cos\theta + S_y \sin\theta = S\cdot\hat{n}$$

Questa relazione è vera per qualsiasi spin. Verifichiamola per lo spin 1/2

$$e^{i\theta S_z/\hbar} = e^{i\sigma_z\theta/2} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \qquad [\sigma_z \text{ è diagonale}]$$

$$\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} = \left[e^{-i\theta S_z/\hbar} S_x e^{i\theta S_z/\hbar}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta/2} \\ e^{i\theta/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\sigma_x \cos\theta + \frac{\hbar}{2}\sigma_y \sin\theta = S_x \cos\theta + S_y \sin\theta$$

Si vede subito che se $S_x|v\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|v\rangle$ allora gli stati $|w\rangle = \exp(-i\theta S_z/\hbar)|v\rangle$ sono autostati di $S\cdot\hat{n}$. Infatti

$$S\cdot\hat{n}|w\rangle = S\cdot n\, e^{-i\theta S_z/\hbar}|v\rangle$$

$$= e^{-i\theta S_z/\hbar}\big(\underbrace{e^{i\theta S_z/\hbar}\, \bar{S}\cdot\hat{n}\, e^{-i\theta S_z/\hbar}}_{S_x}\big)|v\rangle$$

$$= \pm\frac{\hbar}{2} e^{-i\theta S_z/\hbar}|v\rangle$$

$$= \pm\frac{\hbar}{2}|w\rangle$$

Quindi definiamo

$$|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot n} = e^{-i\theta S_z/\hbar}\ |\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_x$$

$$|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot n} = e^{-i\theta S_z/\hbar}\ |\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_x$$

Se

$$|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_x = a'\,|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot\hat{n}} + b'\,|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$

$$a' = {}_{S\cdot\hat{n}}\langle \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_x = {}_x\langle \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}|e^{-i\theta S_z/\hbar}|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_x$$

$$b' = {}_{S\cdot\hat{n}}\langle \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_x = {}_x\langle \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}|e^{-i\theta S_z/\hbar}|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_x$$

In questo metodo è necessario calcolare solo gli autovalori di S_x che sono nella base S_z

$$|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle_x = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad |\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_x = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$a' = \begin{pmatrix}\tfrac{1}{\sqrt{2}} & \tfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\theta/2} & \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}e^{-i\theta/2} - \tfrac{1}{2}e^{+i\theta/2} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}\right) = -\,i\sin\theta/2$$

$$b' = \begin{pmatrix}\tfrac{1}{\sqrt{2}} & -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\theta/2} & -\tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}e^{-i\theta/2} + \tfrac{1}{2}e^{i\theta/2} = \cos\frac{\theta}{2}$$

QUINTO METODO

Il calcolo risulta ancora più rapido se operiamo lo scambio di assi del II metodo

$$a' = {}_z\langle \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2} | e^{-i\theta S_y/\hbar} | \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2} \rangle_z$$

$$b' = {}_z\langle \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2} | e^{-i\theta S_y/\hbar} | \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2} \rangle_z$$

In questo caso basta calcolare $e^{-i\theta S_y/\hbar}$

$$\exp\left(-i\theta S_y/\hbar\right) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_y\right) = \exp\left(\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{\theta}{2}A\right) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = -I$$

$$= \sum \left(\frac{\theta}{2}\right)^n \frac{1}{n!} A^n$$

$$= \sum_{n\ \text{pari}} \left(\frac{\theta}{2}\right)^n \frac{1}{n!} (-1)^{n/2} \longrightarrow \mathbb{1}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$+ A \sum_{n\ \text{disp}} \left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \longrightarrow A\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= \mathbb{1}\cos\frac{\theta}{2} + A\sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\theta/2 \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$a' = (1,0)\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\theta/2 \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\theta/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\sin\frac{\theta}{2}$$

$$b' = (0,1)\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos\frac{\theta}{2}$$

Esame di Meccanica Quantistica, 27/04/2022

Esercizio 1. Si consideri una particella di massa m libera di muoversi in tre dimensioni, soggetta alla Hamiltoniana dell'oscillatore armonico isotropo

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

La sua funzione d'onda normalizzata ha la forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = a f_a(r) + b f_b(r) \sin\theta e^{i\phi},$$

dove $f_a(r)$ e $f_b(r)$ sono normalizzate secondo

$$\int_0^\infty r^2 dr\, |f_{a,b}|^2 = 1.$$

a) Sapendo che una misura di H su ψ fornisce con certezza un risultato inferiore a $3\hbar\omega$, si scriva la funzione d'onda ψ come combinazione lineare delle autofunzioni $|n_x n_y n_z\rangle$ della Hamiltoniana ottenute come prodotto di autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale: $\psi_{n_x,n_y,n_z}(x, y, z) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z)$, in rappresentazione di Schrödinger. Si determinino inoltre (a meno di una fase) le funzioni $f_a(r)$ e $f_b(r)$.

b) Si determinino tutti gli stati ψ tali che una misura di L^2 sulla particella dia 0 con probabilità 1/2. Si calcoli poi l'evoluto temporale $\psi(t)$.

c) Si calcolino $\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle$, $\langle\psi(t)|y|\psi(t)\rangle$, $\langle\psi(t)|z|\psi(t)\rangle$, $\langle\psi(t)|L_x|\psi(t)\rangle$, $\langle\psi(t)|L_y|\psi(t)\rangle$ e $\langle\psi(t)|L_z|\psi(t)\rangle$.

Esercizio 2. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di Hamiltoniana $\hat{H}_0$ con massa m e pulsazione ω. Al tempo $t = 0$ lo stato del sistema è descritto dalla seguente funzione d'onda normalizzata:

$$\langle x|\alpha\rangle = \psi_\alpha(x) = i\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{\left(\sqrt{2}\xi - i\right)^2}{\sqrt{6}} e^{-\xi^2/2}, \qquad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

Si determinino:

a) i valori che si possono ottenere facendo una misura dell'energia e le relative probabilità;

b) i valori medi degli operatori $\hat{x}, \hat{p}$ e dell'operatore parità $\hat{\Pi}$ al variare del tempo.

Il sistema viene perturbato, aggiungendo alla Hamiltoniana il termine

$$\delta\hat{H} = \lambda\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + 2m\omega^2(\hat{x} - x_0)^2\right) \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

dove λ è un parametro adimensionale tale che $|\lambda| \ll 1$. Si calcolino:

c) gli autovalori della Hamiltoniana $\hat{H} = \hat{H}_0 + \delta\hat{H}$ al primo ordine in λ;

d) gli autovalori esatti di $\hat{H}$ per $\lambda > 0$.

Autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale. L'autofunzione del livello n-esimo [$E = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$] è

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \qquad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

con $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, ...

Esercizio 1

Riscriviamo la parte angolare in termini delle armoniche sferiche

$$\psi = \underbrace{a\sqrt{4\pi}\, f_a(r)\, Y_0^0}_{L=L_z=0} - b\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\, \underbrace{f_b(r)\, Y_1^1(\theta,\varphi)}_{L=1 \quad L_z=1}$$

Se H fornisce sempre un valore $< 3\hbar\omega$, ψ è necessariamente una combinazione lineare di autofunzioni corrispondenti ai primi due livelli; nella base in cui sono diagonali H, L^2, L_z, $|n\,\ell\,m\rangle$, abbiamo

$$\psi = A|000\rangle + B|11-1\rangle + C|110\rangle + D|111\rangle$$

Confrontando a meno di fase possiamo scrivere

$$\begin{cases} A = a\sqrt{4\pi}, & |000\rangle = f_a(r)Y_0^0 \\ D = -b\sqrt{\frac{8\pi}{3}}, & |111\rangle = f_b(r)Y_1^1 \end{cases}$$

$B = C = 0$

uguaglianza a meno di fase

NOTA: la condizione $\int_0^\infty dr\, r^2 |f_{a,b}|^2 = 1$ garantisce che $f_a(r)Y_0^0$ e $f_b Y_1^1$ siano normalizzate in $\mathbb{R}^3$

Passiamo ora alla base $|n_x\, n_y\, n_z\rangle_{xyz}$

$$\overset{n\,\ell\,m}{|000\rangle} = \overset{n_x\,n_y\,n_z}{|000\rangle_{xyz}}$$

$$|111\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|100\rangle_{xyz} + i|010\rangle_{xyz}\right)$$

Quindi

$$\psi = A|000\rangle_{xyz} + \frac{D}{\sqrt{2}}\left(|100\rangle_{xyz} + i|010\rangle_{xyz}\right)$$

con $A = a\sqrt{4\pi}$ $\quad D = -b\sqrt{\frac{8\pi}{3}}$

Calcoliamo $f_a(r)$ e $f_b(r)$

$$f_a(r) Y_0^0 = |\overset{n\,l\,m}{0\,0\,0}\rangle = |\overset{n_x\,n_y\,n_z}{0\,0\,0}\rangle_{xyz}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2)/2}$$

$$f_a(r) = \sqrt{4\pi}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2\right)$$

$$f_b(r) Y_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\,0\rangle_{xyz} + i\,|0\,1\,0\rangle_{xyz}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4}\left[\sqrt{2}\,\xi_x e^{-(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2)/2} + i\sqrt{2}\,\xi_y e^{-(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2)/2}\right]$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,(x+iy)\, e^{-r^2\frac{m\omega}{2\hbar}}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, r\sin\theta\, e^{i\varphi} e^{-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}}$$

Quindi

$$f_b(r)\left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\right)\sin\theta\, e^{i\varphi} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, r\sin\theta\, e^{i\varphi} e^{-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}}$$

$$f_b(r) = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, r\, e^{-m\omega r^2/2\hbar}$$

b)
$$\psi = A|\overset{n\,l\,m}{000}\rangle + D|\overset{n\,l\,m}{111}\rangle$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Prob}\,(L^2=0) = |A|^2 = 1/2 \\ \text{normalizzazione}: \quad |A|^2 + |D|^2 = 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}|A| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ |D| = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}|111\rangle \qquad \alpha \text{ fase arbitraria}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\alpha-\omega t)}|111\rangle$$

(c)

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle_{xyz} + \frac{1}{2}e^{i\hat{\alpha}}\left(|100\rangle_{xyz} + i|010\rangle_{xyz}\right) \qquad \boxed{\hat{\alpha} = \alpha - \omega t}$$

Calcoliamo $\langle\psi|x|\psi\rangle$, tenendo conto che $\langle n|x|n\rangle = 0$ per l'oscillatore 1D:

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}_{xyz}\langle 000| + \frac{1}{2}e^{-i\hat{\alpha}}\left({}_{xyz}\langle 100| - i\,{}_{xyz}\langle 010|\right)\right] x \cdot$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2}e^{i\hat{\alpha}}\left(|100\rangle_{xyz} + i|010\rangle_{xyz}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 000|x|100\rangle \frac{1}{2}e^{i\hat{\alpha}}$$

$$+ \frac{1}{2}e^{-i\hat{\alpha}}\langle 100|x|000\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\hat{\alpha}}\langle 0|x|1\rangle_{1D} + \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-i\hat{\alpha}}\langle 1|x|0\rangle_{1D}$$

[$\langle\ \rangle_{1D}$: calcolato per l'oscill. arm. in 1 dim]

Se $\quad a = \dfrac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega q) \qquad a^+ = -\dfrac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega q)$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}(a + a^+)$$

$$\langle 1|x|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\langle 1|a + a^+|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\langle 0|x|1\rangle = \langle 1|x|0\rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Quindi

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\hat{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\cos(\alpha - \omega t)$$

Poi

$$\langle\psi|y|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}_{xyz}\langle 000|y|010\rangle_{xyz}\,\frac{i}{2}e^{i\hat{\alpha}}$$

$$- \frac{1}{2}e^{-i\hat{\alpha}}\langle 010|y|000\rangle_{xyz}\frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{i}{2\sqrt{2}}e^{i\hat{\alpha}}\langle 0|x|1\rangle_{1D} - \frac{i}{2\sqrt{2}}e^{-i\hat{\alpha}}\langle 1|x|0\rangle_{1D}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\hat{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\sin(\alpha - \omega t)$$

Esercizio 2 ①

a) Lo stato riportato è della forma $e^{-\xi^2/2}$ per un polinomio di secondo grado in ξ e quindi è una combinazione lineare degli stati con $n=0,1,2$:

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\xi^2/2}$$

$$\psi_1 = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \xi\, e^{-\xi^2/2}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} (2\xi^2-1)\, e^{-\xi^2/2}$$

Quindi

$$\psi_\alpha(x) = i\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\xi^2 - 2i\sqrt{2}\,\xi - 1\right) e^{-\xi^2/2}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} (2\xi^2-1)\, e^{-\xi^2/2}$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \xi\, e^{-\xi^2/2}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{3}}\psi_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi_1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\psi_2$$

[Si nota che lo stato è normalizzato $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$]

Quindi i valori possibili di energia sono

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ prob. $2/3$ $(n=1)$

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ prob. $1/3$ $(n=2)$

b)

$$\psi_\alpha(x,t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-iE_1 t/\hbar}\,\psi_1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\, e^{-iE_2 t/\hbar}\,\psi_2$$

$$\overset{\text{modulo fase}}{=} \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi_1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_1-E_2)t\right)\psi_2 \qquad E_1 - E_2 = -\hbar\omega$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi_1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\, e^{-i\omega t}\,\psi_2$$

$$|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}e^{-i\omega t}|2\rangle$$

$$\langle\alpha|x|\alpha\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1| - \frac{i}{\sqrt{3}}e^{i\omega t}\langle 2|\right) x \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}e^{-i\omega t}|2\rangle\right)$$

$$= \frac{2}{3}\langle 1|x|1\rangle + \frac{1}{3}\langle 2|x|2\rangle$$

$$- \frac{i\sqrt{2}}{3}e^{i\omega t}\langle 2|x|1\rangle + \frac{i\sqrt{2}}{3}e^{-i\omega t}\langle 1|x|2\rangle$$

Ora $\langle n|x|n\rangle = 0$ per parità. Dobbiamo solo calcolare $\langle 2|x|1\rangle$ e $\langle 1|x|2\rangle = \langle 2|x|1\rangle^*$

Notiamo che le fasi in ψ_1 e ψ_2 sono state fissate in modo tale che $|1\rangle = a^+|0\rangle$ e $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{+2}|0\rangle$ dove

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(ip + m\omega q) \qquad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(-ip + m\omega q)$$

Quindi $q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}(a + a^+)$

$$\langle 2|x|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\langle 2|a + a^+|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\langle 2|a^+|1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Quindi

$$\langle\alpha|x|\alpha\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(-ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}(-i)(2i)\sin\omega t = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\sin\omega t$$

Dato che $\langle n|p|n\rangle = 0$ per parità abbiamo

$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = -i\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\omega t}\langle 2|p|1\rangle + \frac{i\sqrt{2}}{3}e^{-i\omega t}\langle 1|p|2\rangle$$

Ora $p = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\hbar\omega}\,(a - a^+)$

$$\langle 2|p|1\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\hbar\omega}\,\langle 2|a-a^\dagger|1\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\hbar\omega}\,\sqrt{2}$$

$$= i\sqrt{m\hbar\omega}$$

$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\omega t}\sqrt{m\hbar\omega} + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i\omega t}\sqrt{m\hbar\omega}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{m\hbar\omega}\,\cos\omega t$$

Si poteva ottenere il risultato ricordando che i valori medi soddisfano le eq. di Hamilton.

$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = m\frac{d}{dt}\langle\alpha|x|\alpha\rangle$$

$$= m\,\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\omega\cos\omega t$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{m\hbar\omega}\,\cos\omega t$$

Per la parità

$$\langle\alpha|\Pi|\alpha\rangle = \frac{2}{3}\langle 1|\Pi|1\rangle + \frac{1}{3}\langle 2|\Pi|2\rangle$$

$$= -\frac{2}{3}+\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

c)

Dobbiamo calcolare

$$\langle n|\delta\hat{H}|n\rangle = \frac{\lambda}{2m}\langle n|p^2|n\rangle + \lambda\, 2m\omega^2\langle n|x^2|n\rangle$$

$$+\lambda(2m\omega^2)(-2x_0)\langle n|x|n\rangle \longrightarrow 0 \text{ per parità}$$

$$+\lambda(2m\omega^2)x_0^2\langle n|n\rangle$$

$$\langle n|p^2|n\rangle = |\,p|n\rangle|^2$$

$$p|n\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\hbar\omega}\,(a-a^\dagger)|n\rangle$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\hbar\omega}\left[|n-1\rangle\langle n-1|a|n\rangle - |n+1\rangle\langle n+1|a^\dagger|n\rangle\right]$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\hbar\omega}\left[\sqrt{n}\,|n-1\rangle - \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right]$$

$$\langle n|p^2|n\rangle = \frac{1}{2}m\hbar\omega\,(n + n+1) = \frac{2n+1}{2}\,m\hbar\omega$$

$$\langle n|x^2|n\rangle = |\,x|n\rangle|^2$$

$$x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,(a+a^\dagger)|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\sqrt{n}\,|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right)$$

$$\langle n|x^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\,(2n+1)$$

Quindi

$$\langle n|\delta\hat{H}|n\rangle = \lambda\,\frac{2n+1}{4}\hbar\omega + \lambda\hbar\omega\,(2n+1) + 2\lambda\hbar\omega$$

$$\lambda\hbar\omega\left(\frac{5}{2}n + \frac{13}{4}\right)$$

I valori medi di p^2 e x^2 si potevano anche calcolare utilizzando il teorema del viriale

$$\left\langle 2\cdot\frac{p^2}{2m}\right\rangle + \langle qF\rangle = 0 \qquad \text{Dato che} \quad F = -m\omega^2 q$$

$$\begin{cases} \left\langle \dfrac{p^2}{m}\right\rangle - m\omega^2\langle q^2\rangle = 0 \;\text{[viriale]} \\ \langle H\rangle = \dfrac{1}{2m}\langle p^2\rangle + \dfrac{m\omega^2}{2}\langle q^2\rangle = E \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m\omega^2\langle q^2\rangle = E \\ \left\langle \dfrac{p^2}{m}\right\rangle = E \end{cases}$$

Quindi

$$\langle n|q^2|n\rangle = \frac{1}{m\omega^2}E_n = \frac{1}{m\omega^2}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\langle n|p^2|n\rangle = m E_n = m\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

d)

L'Hamiltoniana è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{\lambda p^2}{2m} + 2\lambda m\omega^2(x^2 - 2x x_0 + x_0^2)$$

$$= \frac{(1+\lambda)}{2m}p^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\omega^2(1+4\lambda)x^2 - 4\lambda m\omega^2 x x_0}_{V(x)} + 2\lambda m\omega^2 x_0^2$$

Si tratta di un oscillatore che oscilla attorno a $x = x_{eq}$ con $x_{eq} \neq 0$. Per calcolare x_{eq} imponiamo

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x_{eq}} = 0 \qquad m\omega^2(1+4\lambda)x_{eq} - 4\lambda m\omega^2 x_0 = 0$$

$$x_{eq} = \frac{4\lambda}{1+4\lambda}x_0$$

Definiamo ora $X = x - x_{eq}$ in modo che il centro delle oscillazioni corrisponda a $X=0$.

$$V(x) + 2\lambda m\omega^2 x_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(1+4\lambda)(X+x_{eq})^2 - 4\lambda m\omega^2(X+x_{eq})$$
$$+ 2\lambda m\omega^2 x_0^2 =$$ (i termini lineari in X si cancellano per costruzione)

$$= \frac{1}{2}m\omega^2(1+4\lambda)X^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(1+4\lambda)x_{eq}^2$$
$$-4\lambda m\omega^2 x_{eq} + 2\lambda m\omega^2 x_0^2$$
$$= \frac{1}{2}m\omega^2(1+4\lambda)X^2 + m\omega^2 x_0^2\left[\frac{1+4\lambda}{2}\cdot\frac{16\lambda^2}{(1+4\lambda)^2}\right.$$
$$\left. - 4\lambda\frac{4\lambda}{(1+4\lambda)} + 2\lambda\right] =$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 (1+4\lambda) X^2 + m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} \cdot \frac{2\lambda}{1+4\lambda}$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 (1+4\lambda) X^2 + \frac{2\lambda}{1+4\lambda} \hbar\omega$$

Quindi

$$H = \frac{1+\lambda}{2m} P^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 (1+4\lambda) X^2 + \frac{2\lambda}{1+4\lambda} \hbar\omega$$

Definiamo ora una nuova massa e pulsazione

$$\begin{cases} \frac{1}{M} = \frac{1+\lambda}{m} \\ m\omega^2(1+4\lambda) = M\Omega^2 \end{cases} \qquad M = \frac{m}{1+\lambda}$$

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{m(1+4\lambda)}{M}} = \omega \sqrt{(1+\lambda)(1+4\lambda)}$$

per cui

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2} M \Omega^2 X^2 + \frac{2\lambda}{1+4\lambda} \hbar\omega$$

Lo spettro è quindi

$$E_n = \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{2\lambda}{1+4\lambda} \hbar\omega$$

$$= \hbar\omega \sqrt{(1+\lambda)(1+4\lambda)} \left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{2\lambda}{1+4\lambda} \hbar\omega$$

Per $|\lambda| \ll 1$ $\quad \sqrt{(1+\lambda)(1+4\lambda)} \approx \sqrt{1+5\lambda} \approx \left(1+\frac{5\lambda}{2}\right)$

$$E_n \approx \hbar\omega \left(1+\frac{5\lambda}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right) + 2\lambda\hbar\omega$$

$$\approx \hbar\omega \left(n+\frac{1}{2}\right) + \lambda\hbar\omega \left[\frac{5}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right) + 2\right]$$

$$= \hbar\omega \left(n+\frac{1}{2}\right) + \lambda\hbar\omega \left[\frac{5n}{2} + \frac{13}{4}\right] \quad \text{come già trovato}$$

Esame di Meccanica Quantistica, 26/05/2022

Esercizio 1. Due particelle non identiche di spin 1/2 sono soggette alla Hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{\hbar}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})^2 \qquad \boldsymbol{n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ è lo spin totale.

a) Si determinino gli autovalori di H e la loro degenerazione.

b) Si determini una base formata da autovettori di H. Si scrivano gli elementi della base come combinazioni lineari di autovettori di S^2 ed S_z.

c) Al tempo $t = 0$ le due particelle si trovano nello stato $|\psi\rangle = a|\frac{1}{2}\rangle_1|-\frac{1}{2}\rangle_2 + a|-\frac{1}{2}\rangle_1|\frac{1}{2}\rangle_2$, dove a è una costante di normalizzazione. Gli stati $|s_z\rangle_1$ e $|s_z\rangle_2$ sono rispettivamente autovettori di $S_{1,z}$ ed $S_{2,z}$.

Una misura di H su ψ, quali risultati dà e con quali probabilità?

d) Si calcoli l'evoluto temporale $|\psi(t)\rangle$; una misura di S_z al tempo t che risultati dà e con quali probabilità?

Esercizio 2. Una particella di massa m e spin 1/2 è vincolata a muoversi nella regione R bidimensionale $-L/2 \leq x \leq +L/2$, $-L/2 \leq y \leq +L/2$ del piano xy, nella quale è presente un campo magnetico di modulo B diretto lungo l'asse z con verso positivo, perpendicolare al piano. La Hamiltoniana è

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \gamma\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S} + V(x,y)$$

dove γ è positivo ed $\boldsymbol{S}$ è lo spin della particella. Il potenziale $V(x,y)$ è nullo nella regione R ed infinito al di fuori di R.

a) Si calcolino gli autovalori di H come funzione di $\alpha = \gamma B$ e $\omega = \pi^2\hbar/(2mL^2)$. Si specifichi l'energia e la degenerazione dei primi due livelli, al variare di α e ω.

b) Si supponga $\alpha \gg \omega$. Si determini la correzione all'energia dei primi due livelli di H_0 dovuta alla perturbazione $\Delta H = \epsilon\, xy$. Si calcoli la correzione al primo ordine perturbativo in ϵ. Suggerimento: si faccia uso di argomenti di simmetria.

c) Si considerino ora due particelle identiche (sempre di spin 1/2) ciascuna delle quali è soggetta alla Hamiltoniana H_0 (non vi è la perturbazione ΔH). Come ai punti precedenti, entrambe sono vincolate a muoversi nella regione bidimensionale $-L/2 \leq x \leq +L/2$, $-L/2 \leq y \leq +L/2$ del piano xy. Nel limite $\alpha \ll \omega$, si calcolino le energie dei primi quattro livelli energetici e la loro degenerazione. Si specifichi una base di autofunzioni o autoket.

Integrali utili:

$$I_{m,n} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx\, x\cos mx\, \sin nx.$$

Vale: $I_{1,1} = \frac{\pi}{4}$, $I_{1,2} = \frac{8}{9}$, $I_{1,3} = \frac{\pi}{8}$, $I_{2,1} = -\frac{10}{9}$, $I_{2,2} = -\frac{\pi}{8}$, $I_{2,3} = \frac{26}{25}$.

Problema 1

a) Date due particelle di spin $1/2$, lo spin totale può essere 0 oppure 1. Dato che $\bar{S}\cdot\hat{n}$ è la proiezione dello spin nella direzione $\hat{n}$, $\bar{S}\cdot\hat{n}$ può assumere solo i valori (autovalori di $\bar{S}\cdot\hat{n}$ nel sottospazio)

$$S=0 \qquad S\cdot\hat{n} \to 0$$
$$S=1 \qquad S\cdot\hat{n} \to \pm\hbar, 0$$

Quindi lo spettro è

a) $E=0$ base formata da $|0\,0\rangle_{\hat{n}}, |1\,0\rangle_{\hat{n}}$

b) $E=\hbar\omega$ $|1\,1\rangle_{\hat{n}}, |1\,-1\rangle_{\hat{n}}$

Gli stati $|S\;S\cdot\hat{n}\rangle_{\hat{n}}$ sono autovettori di S^2 e $\bar{S}\cdot\hat{n}$

b) Dobbiamo riscrivere $|S\;S\cdot\hat{n}\rangle_{\hat{n}}$ in termini di $|S\;S_z\rangle_z$, autovettori di S^2, S_z.

Lo spazio vettoriale con $S=0$ ha dimensione 1 e quindi

$$|0\,0\rangle_{\hat{n}} = |0\,0\rangle_z$$

Esprimiamo ora $|1\;S\cdot\hat{n}\rangle_{\hat{n}}$ in termini di $|1\;S_z\rangle_z$

Vogliamo ora scrivere la matrice di $S\cdot\hat{n}$ nel sottospazio $S=1$, nella rappresentazione

$$|1\,1\rangle_z = (1\;0\;0)$$
$$|1\,0\rangle_z = (0\;1\;0)$$
$$|1\,-1\rangle_z = (0\;0\;1)$$

[rappresentazione in cui S_z è diagonale]

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = S_+^\dagger = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S \cdot \hat{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} S_x - \frac{1}{2} S_z = \hbar \begin{pmatrix} -1/2 & \frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \\ \sqrt{6}/4 & 0 & \sqrt{6}/4 \\ 0 & \sqrt{6}/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Non è necessario calcolare gli autovalori di $S \cdot \hat{n}$ dato che sappiamo a priori che gli autovalori sono $+\hbar, -\hbar, 0$. Calcoliamo gli autovettori.

Autovalore $+\hbar$

$$\hbar \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \\ \sqrt{6}/4 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} + b\frac{\sqrt{6}}{4} = a \\ \frac{\sqrt{6}}{4}(a+c) = b \\ \frac{\sqrt{6}}{4} b + \frac{c}{2} = c \end{cases} \qquad \begin{matrix} b\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{3a}{2} & a = \frac{b}{\sqrt{6}} \\ \\ \frac{\sqrt{6}}{4} b = \frac{c}{2} & c = \frac{\sqrt{6}}{2} b \end{matrix}$$

$$V = \left(\frac{b}{\sqrt{6}}, b, \frac{\sqrt{6}}{2} b \right) \qquad |V|^2 = \frac{|b|^2}{6} + |b|^2 + \frac{3}{2}|b|^2 = \frac{16}{6}|b|^2$$

Scegliamo $|b| = \frac{\sqrt{6}}{4}$ $\quad V = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3}{4} \right)$

$$b = +\frac{\sqrt{6}}{4}$$

Autovalore 0

$$\hbar\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt6}{4} & 0 \\ \sqrt6/4 & 0 & \sqrt6/4 \\ 0 & \sqrt6/4 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} -\frac{a}{2} + \frac{b\sqrt6}{4} = 0 & a = \frac{\sqrt6}{2} b \\ \frac{\sqrt6}{4}(a+c) = 0 & \\ \frac{\sqrt6}{4} b + \frac{c}{2} = 0 & c = -\frac{\sqrt6}{2} b \end{cases}$$

$$v = \left(\frac{\sqrt6}{2} b,\ b,\ -\frac{\sqrt6}{2} b\right) \qquad |v|^2 = \frac{3}{2}|b|^2 + |b|^2 + \frac{3}{2}|b|^2 = 4|b|$$

Se $b = \frac{1}{2}$ $\qquad v = \left(\frac{\sqrt6}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{\sqrt6}{4}\right)$

Autovalore $-\hbar$

$$\hbar\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt6}{4} & 0 \\ \sqrt6/4 & 0 & \sqrt6/4 \\ 0 & \sqrt6/4 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c\end{pmatrix} = -\hbar\begin{pmatrix} a \\ b \\ c\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt6}{4} b = -a & b\frac{\sqrt6}{4} = -\frac{a}{2} \qquad a = -\frac{\sqrt6}{2} b \\ \frac{\sqrt6}{4}(a+c) = -b & \\ \frac{\sqrt6}{4} b + \frac{c}{2} = -c & \frac{\sqrt6}{4} b = -\frac{3}{2} c \qquad c = -\frac{b}{\sqrt6} \end{cases}$$

$$V = \left(-\frac{\sqrt6}{2} b,\ b,\ -\frac{b}{\sqrt6}\right) \qquad |V|^2 = \frac{3}{2}|b|^2 + |b|^2 + \frac{|b|^2}{6} = \frac{16}{6}|b|^2$$

$b = -\frac{\sqrt6}{4}$ $\qquad V = \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt6}{4}, \frac{1}{4}\right)$

SOMMARIO

$$|0\,0\rangle_{\hat{n}} = |0\,0\rangle_z$$

$$|1\,1\rangle_{\hat{n}} = \frac{1}{4}|1\,1\rangle_z + \frac{\sqrt{6}}{4}|1\,0\rangle_z + \frac{3}{4}|1\,-1\rangle_z$$

$$|1\,0\rangle_{\hat{n}} = \frac{\sqrt{6}}{4}|1\,1\rangle_z + \frac{1}{2}|1\,0\rangle_z - \frac{\sqrt{6}}{4}|1\,-1\rangle_z$$

$$|1\,-1\rangle_{\hat{n}} = \frac{3}{4}|1\,1\rangle_z - \frac{\sqrt{6}}{4}|1\,0\rangle_z + \frac{1}{4}|1\,-1\rangle_z$$

c)

La costante a segue da $\langle\psi|\psi\rangle = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Utilizzando le relazioni per $\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}$

si vede che

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{z,1}\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{z,2} + \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_{z,1}\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_{z,2}\right) =$$

$$= |\underset{\substack{\uparrow \\ S}}{1}\quad \underset{\substack{\uparrow \\ S_z}}{0}\rangle_z \qquad (\text{qui } \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2)$$

Dato che lo stato ha $S = 1$ si potrà scrivere come

$$|\psi\rangle = a|1\,1\rangle_{\hat{n}} + b|1\,0\rangle_{\hat{n}} + c|1\,-1\rangle_{\hat{n}}$$

Non appare $|0\,0\rangle_{\hat{n}}$ che corrisponde a $S = 0$.

$$a = \langle\psi|1\,1\rangle_{\hat{n}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$b = \langle\psi|1\,0\rangle_{\hat{n}} = \frac{1}{2}$$

$$c = \langle\psi|1\,-1\rangle_{\hat{n}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

Quindi

$$\text{Prob}(E=\hbar\omega) = |a|^2+|c|^2 = \frac{3}{8}+\frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Prob}(E=0) : |b|^2 = \frac{1}{4}$$

d) $$|\psi\, t\rangle = a e^{-i\omega t}|1\ 1\rangle_n + b|1\ 0\rangle_{\hat{n}} + c e^{-i\omega t}|1\,-1\rangle_{\hat{n}}$$

$$= a e^{-i\omega t}\left(\frac{1}{4}|1\ 1\rangle_z + \frac{\sqrt{6}}{4}|1\ 0\rangle_z + \frac{3}{4}|1\,-1\rangle_z\right)$$

$$+ b\left(\frac{\sqrt{6}}{4}|1\ 1\rangle_z + \frac{1}{2}|1\ 0\rangle_z - \frac{\sqrt{6}}{4}|1\,-1\rangle_z\right)$$

$$+ c e^{-i\omega t}\left(\frac{3}{4}|1\ 1\rangle_z - \frac{\sqrt{6}}{4}|1\ 0\rangle_z + \frac{1}{4}|1\,-1\rangle_z\right)$$

$$\text{Prob}(S_z=+\hbar) = \left|\frac{1}{4}a e^{-i\omega t} + \frac{\sqrt{6}}{4}b + \frac{3}{4}c e^{-i\omega t}\right|^2$$

$$= \left|\frac{\sqrt{6}}{16}e^{-i\omega t} + \frac{\sqrt{6}}{8} - \frac{3\sqrt{6}}{16}e^{-i\omega t}\right|^2$$

$$= \left|\frac{\sqrt{6}}{8} - \frac{\sqrt{6}}{8}e^{-i\omega t}\right|^2 = \frac{6}{64}\left|1-e^{-i\omega t}\right|^2$$

$$= \frac{3}{32}(2-2\cos\omega t) = \frac{3}{16}(1-\cos\omega t)$$

$$\text{Prob}(S_z=0) : \left|\frac{\sqrt{6}}{4}a e^{-i\omega t} + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4}c e^{-i\omega t}\right|^2$$

$$= \left|\frac{3}{8}e^{-i\omega t} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}e^{-i\omega t}\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-i\omega t}\right|^2 = \frac{1}{16}(1+3e^{-i\omega t})(1+3e^{i\omega t})$$

$$= \frac{1}{16}(1+9+6\cos\omega t) = \frac{1}{8}(5+3\cos\omega t)$$

$$\text{Prob}\,(S_z = -\hbar)$$

$$= \left| \frac{3}{4} a e^{-i\omega t} - b\frac{\sqrt{6}}{4} + c e^{-i\omega t}\frac{1}{4} \right|^2$$

$$= \left| \frac{3}{16}\sqrt{6}\, e^{-i\omega t} - \frac{\sqrt{6}}{8} - \frac{\sqrt{6}}{16} e^{-i\omega t} \right|^2$$

$$= \left| \frac{\sqrt{6}}{8} e^{-i\omega t} - \frac{\sqrt{6}}{8} \right|^2 = \frac{6}{64} \left| e^{-i\omega t} - 1 \right|^2$$

$$= \frac{3}{32}(2 - 2\cos\omega t) = \frac{3}{16}(1 - \cos\omega t)$$

<u>CHECK</u> :

$$P(\hbar) + P(0) + P(-\hbar) = \frac{3}{16} - \frac{3}{16}\cos\omega t$$

$$+ \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos\omega t$$

$$+ \frac{3}{16} - \frac{3}{16}\cos\omega t$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{5}{8} + \frac{3}{16} = 1 \qquad \text{ok}$$

Esercizio 2

(a)

La parte spaziale corrisponde ad una buca bidimensionale.
Se $\psi_n(x)$ sono le autofunzioni della buca in una dimensione con $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} n^2 = \hbar\omega n^2 \quad n = 1, \dots \infty$

Quindi i livelli sono

$$E_{n,m} = \hbar\omega(n^2+m^2) \qquad n = 1, \dots \infty, \quad m = 1, \dots \infty$$

$$\psi_{nm}(x,y) = \psi_n(x)\psi_m(y)$$

Se includiamo il termine di spin $\gamma \bar{B}\cdot\bar{S} = \alpha S_z$ otteniamo

$$E_{n,m,\pm} = \hbar\omega(n^2+m^2) \pm \frac{\hbar\alpha}{2} \qquad (\alpha > 0)$$

Livelli più bassi

- Stato fondamentale.

Corrisponde a $n, m = 1 \quad S_z = -\frac{\hbar}{2}$

$$E_{SF} = 2\hbar\omega - \frac{\hbar\alpha}{2} \qquad \psi_{SF} \doteq \psi_1(x)\psi_1(y)\left|-\tfrac{1}{2}\right>$$

- Primo stato eccitato

Vi sono diverse possibilità a seconda del valore di ω e α

1ª possibilità $\begin{cases} n=1 & m=2 \\ n=2 & m=1 \end{cases} \quad S_z = -\frac{\hbar}{2} \quad E_A = 5\hbar\omega - \frac{\hbar\alpha}{2}$

2ª possibilità $\quad n=1 \quad m=1 \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \quad E_B = 2\hbar\omega + \frac{\hbar\alpha}{2}$

Notiamo che $E_A = E_B$ implica $\quad 5\hbar\omega - \frac{\hbar\alpha}{2} = 2\hbar\omega + \frac{\hbar\alpha}{2}$

$$3\hbar\omega = \hbar\alpha$$

Quindi per

$\hbar\alpha < 3\hbar\omega$ vi è un unico stato ~~eccitato~~
con energia $E = 2\hbar\omega + \frac{\hbar\alpha}{2}$
funzione d'onda $\psi_a = \psi_1(x)\psi_1(y)|\frac{1}{2}\rangle$

Per $h\alpha > 3\hbar\omega$ vi sono due stati degeneri
con energia $E = 5\hbar\omega - \frac{\hbar\alpha}{2}$

$$\psi_b = \psi_2(x)\psi_1(y)|-\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$\psi_c = \psi_1(x)\psi_2(y)|-\tfrac{1}{2}\rangle$$

Per $h\alpha = 3\hbar\omega$ i tre stati ψ_a, ψ_b, ψ_c sono degeneri.

b)
Lo stato fondamentale è non degenere

$$\Delta E = \langle\psi_{SF}|\epsilon x y|\psi_{SF}\rangle$$
$$= \epsilon\langle\psi_1|x|\psi_1\rangle\langle\psi_1|y|\psi_1\rangle = 0 \quad \text{per parità}$$

Per $\alpha \gg \omega$ il primo livello eccitato è dato da

$$\psi_b = \psi_2(x)\psi_1(y)|-\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$\psi_c = \psi_1(x)\psi_2(y)|-\tfrac{1}{2}\rangle$$

Gli elementi di matrice

$$\langle\psi_b|xy|\psi_b\rangle = \langle\psi_2|x|\psi_2\rangle\langle\psi_1|y|\psi_1\rangle = 0$$
$$\langle\psi_c|xy|\psi_c\rangle = \langle\psi_1|x|\psi_1\rangle\langle\psi_2|y|\psi_2\rangle = 0 \quad \text{per parità}$$

sono nulli

Dobbiamo solo calcolare gli elementi fuori diagonale

$$\langle\psi_b|xy|\psi_c\rangle = \langle\psi_c|xy|\psi_b\rangle^*$$

Ora

$$\langle \psi_b | xy | \psi_c \rangle = \langle \psi_2 | x | \psi_1 \rangle \langle \psi_1 | y | \psi_2 \rangle$$
$$= |\langle \psi_2 | x | \psi_1 \rangle|^2$$

Ora

$$\langle \psi_2 | x | \psi_1 \rangle = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, x \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

dato che $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{\pi x}{L}$ e $\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L}$

Se $z = \frac{\pi x}{L}$ $dx = \frac{L}{\pi} dz$

$$\langle \psi_2 | x | \psi_1 \rangle = \frac{2}{L} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dz\, z \sin 2z \cos z = \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{8}{9} L$$

Quindi

$$\langle \psi_b | xy | \psi_c \rangle = \left(\frac{16}{9\pi^2}\right)^2 L^2 = \mathcal{E}$$

Quindi la matrice della pert è

$$V_p = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \mathcal{E} \\ \epsilon \mathcal{E} & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalori di V_p: $\det \begin{pmatrix} -\lambda & \epsilon \mathcal{E} \\ \mathcal{E}\epsilon & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \mathcal{E}^2 \epsilon^2 \Rightarrow \lambda = \pm \mathcal{E} \epsilon$

Quindi il primo eccitato si separa in due livelli di energie

$$5\hbar\omega - \frac{\hbar\alpha}{2} \pm \left(\frac{16}{9\pi^2}\right)^2 L^2 \epsilon$$

c) Dato che $\alpha \ll \omega$, consideriamo lo spettro per $\alpha = 0$.

Ignorando Pauli gli stati sono

n_1	m_1	n_2	m_2	
1	1	1	1	$E = 4\hbar\omega$
2	1	1	1	
1	2	1	1	$E = 7\hbar\omega$ | degenerazione 4
1	1	2	1	
1	1	1	2	

Consideriamo ora le combinazioni pari e dispari sotto scambio e inseriamo le funzioni di spin $|S\, S_z\rangle$ autofunzioni di S^2, S_z, con $\bar{S} = S_1 + S_2$

S Fondamentale

$\psi_{SF} = \psi_1(x_1)\psi_1(y_1)\psi_1(x_2)\psi_1(y_2)|0\ 0\rangle$ non degenere

I livello

- $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_2(x_1)\psi_1(y_1)\psi_1(x_2)\psi_1(y_2) + \psi_1(x_1)\psi_1(y_1)\psi_2(x_2)\psi_1(y_2)\right)|0\ 0\rangle$
  $= \psi_a(\bar{r}_1, \bar{r}_2)|0\ 0\rangle$ 1 stato

- $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_2(x_1)\psi_1(y_1)\psi_1(x_2)\psi_1(y_2) - \psi_1(x_1)\psi_1(y_1)\psi_2(x_2)\psi_1(y_2)\right)|1\ m\rangle$
  $= \psi_b(\bar{r}_1, r_2)|1\ m\rangle$ 3 stati

- $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x_1)\psi_2(y_1)\psi_1(x_2)\psi_1(y_2) + \psi_1(x_1)\psi_1(y_1)\psi_1(x_2)\psi_2(y_2)\right)|0\ 0\rangle$
  $= \psi_c(\bar{r}_1, r_2)|0\ 0\rangle$ 1 stato

- $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x_1)\psi_2(y_1)\psi_1(x_2)\psi_1(y_2) - \psi_1(x_1)\psi_1(y_1)\psi_1(x_2)\psi_2(y_2)\right)|1\ m\rangle$
  $= \psi_d(\bar{r}_1, \bar{r}_2)|1\ m\rangle$ 3 stati

Deg: 8

Il termine dovuto al campo magnetico è $\gamma B S_{1z} + \gamma B S_{2z} = \alpha S_z$ $[S_z = S_{1z} + S_{2z}]$ e dà luogo ad una correzione $\pm \hbar \alpha$ per gli stati con $S=1$ $S_z = \pm \hbar$

Quindi

Stato fondamentale : ψ_{SF} $E = 4\hbar\omega$ non degenere

I eccitato: $\begin{cases} \psi_b |1 -1\rangle \\ \psi_d |1 -1\rangle \end{cases}$ $E = 7\hbar\omega - \hbar\alpha$ deg: 2

II eccitato: $\begin{cases} \psi_a |0\, 0\rangle \\ \psi_b |1\, 0\rangle \\ \psi_c |0\, 0\rangle \\ \psi_d |1\, 0\rangle \end{cases}$ $E = 7\hbar\omega$ deg 4

III eccitato $\begin{cases} \psi_b |1\, 1\rangle \\ \psi_d |1\, 1\rangle \end{cases}$ $E = 7\hbar\omega + \hbar\alpha$ deg. 2

Esame di Meccanica Quantistica, 28/06/2022

Esercizio 1. Una coppia di quark distinguibili, di spin 1/2, aventi la stessa massa m, interagiscono con il seguente potenziale

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{A\hbar c}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + k\,|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$$

dove A e k sono parametri dati e c è la velocità della luce. Si risolva il problema nel sistema del centro di massa delle due particelle.

1) Si calcolino i livelli energetici del sistema per $k = 0$. Per lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato si specifichino le degenerazioni.

2) Si calcolino i valori medi della distanza tra le due particelle, $\langle Elm|\,|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\,|Elm\rangle$, per tutti gli autoket simultanei $|Elm\rangle$ di $\hat{H}$, $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_z$, limitatamente agli stati relativi ai primi due livelli. Anche in questo caso si assuma $k = 0$.

Si assuma ora $k > 0$.

3) Si stabilisca se esistano autostati della Hamiltoniana appartenenti allo spettro continuo (stati di scattering). La risposta verrà valutata solo se motivata in dettaglio.

4) Si determinino le dimensioni del parametro k (in unità di lunghezza, tempo e massa) e si calcolino le correzioni agli autovalori dell'energia al primo ordine in k per i primi due livelli energetici. Si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

Si consideri ora la perturbazione

$$V_{\text{spin}} = \beta\, \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2\, \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

dove $\beta > 0$, $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ sono gli operatori di spin delle due particelle, e $\delta(\boldsymbol{r})$ è la funzione δ tridimensionale (quindi $\int d^3\boldsymbol{r}\, \delta(\boldsymbol{r}) = 1$).

5) Si determinino le dimensioni del parametro β e, per $k = 0$, si calcolino le correzioni agli autovalori dell'energia al primo ordine in β per i primi due livelli energetici. Si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

6) Si definisca $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$, dove $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare orbitale. Si consideri la sua rappresentazione di Heisenberg $\boldsymbol{J}(t)$, definita con riferimento alla Hamiltoniana con potenziale $V + V_{\text{spin}}$. Si stabilisca se $\boldsymbol{J}(t)$ sia costante nel tempo o meno. La risposta verrà valutata solo se motivata in dettaglio.

7) Il modello è una buona rappresentazione per i quark charm, anti-charm. Si stimi (precisione 10%) l'energia (in MeV) dello stato fondamentale e del primo stato eccitato e la distanza (in femtometri, fm) tra le due particelle in tali stati nell'approssimazione $k = 0$, $\beta = 0$ (si utilizzino i risultati ottenuti rispondendo alle domande 1 e 2). In questo caso $A \approx 0.5$, $mc^2 \approx 1500$ MeV. Costante utile: $\hbar c \approx 200$ MeV·fm.

Autofunzione radiali $R_{nl}(\rho)$ per il problema Coulombiano. Se $\rho = r/r_B$ (r_B è il raggio di Bohr), abbiamo:

$$R_{10} = \frac{2}{r_B^{3/2}} e^{-\rho} \qquad R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{r_B^{3/2}} (1 - \rho/2) e^{-\rho/2} \qquad R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{1}{r_B^{3/2}} \rho e^{-\rho/2} \qquad .$$

Le autofunzioni sono normalizzate, ossia soddisfano a:

$$\int_0^\infty r^2 dr\, |R_{nl}(\rho)|^2 = 1$$

Integrale utile:

$$I_n = \int_0^\infty dr\, r^n e^{-r} = n!$$

Esercizio 2. Si consideri una particella di massa m e spin 1/2 libera di muoversi in tre dimensioni, soggetta alla Hamiltoniana $H = H_1 + H_{\rm spin}$ con

$$H_1 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \qquad H_{\rm spin} = \frac{a\omega}{\hbar}(S_x S_z - S_z S_x),$$

dove a è un numero complesso. Quali sono le limitazioni sui valori che a può assumere dovuti al fatto che H è un'osservabile?

a) Si determini la fase della costante a in modo che $|a| = 2$ e che $\langle \frac{1}{2}|H_{\rm spin}|\frac{1}{2}\rangle > 0$, dove gli stati sono autovettori dell'operatore di spin S_y con autovalore $+\hbar/2$. Si calcoli l'energia dei primi tre livelli di H e la rispettiva degenerazione.

b) Si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = A\left(\sqrt{2}\frac{z}{r_0}\chi_+ - \chi_-\right)e^{-r^2/2r_0^2} \qquad r_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$$

con $S_z\chi_\pm = \pm\frac{1}{2}\hbar\chi_\pm$. Si determini A in modo che lo stato sia normalizzato. Se si effettua una misura di H_1 su $|\psi\rangle$, quali valori si ottengono e con quale probabilità?

c) Al tempo $t = 0$ viene fatta una misura di J^2 ed una misura di J_z ($\boldsymbol{J} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{L}$) su $|\psi\rangle$ ottenendo rispettivamente $\frac{3}{4}\hbar^2$ e $\frac{1}{2}\hbar$. Si calcoli lo stato normalizzato $|\psi_1\rangle$ ottenuto dopo la misura. Se si effettua una misura di $H_{\rm spin}$ sullo stato $|\psi_1\rangle$, quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?

d) Si calcoli l'evoluto $|\psi_{1t}\rangle$. Se viene fatta una misura di J_z su $|\psi_{1t}\rangle$ quali valori si ottengono e con quale probabilità?

Autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(\xi)e^{-\xi^2/2} \qquad \xi = x/r_0,$$

con

$$H_0(\xi) = 1, \qquad H_1(\xi) = 2\xi, \qquad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$$

① 1° esercizio

Per $k=0$ la Hamiltoniana è

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V \qquad V = -\frac{A\hbar c}{|r_1 - r_2|}$$

Nel sistema del CM, se $\mu = m/2$ è la massa ridotta e $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$ è la posizione relativa

$$H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{A\hbar c}{r}$$

Si tratta della Hamiltoniana del problema Coulombiano. Le autofunzioni sono qui $|Elm\rangle = R_{nl} Y_l^m \chi_{spin}$ e

$$E = -\frac{\mu (A\hbar c)^2}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{A^2}{4} mc^2 \frac{1}{n^2} \qquad n: 1, 2 \dots$$

Per il problema Coulombiano le degenerazioni dei livelli sono: $n=1$ deg. 1 $\quad n=2$ deg: 4

Vi sono 4 diversi stati di spin quindi

SF $\quad E = -\frac{A^2}{4} mc^2 \quad$ degenerazione $1 \times 4 = 4$

I ecc $\quad E = -\frac{A^2}{16} mc^2 \quad$ degenerazione $4 \times 4 = 16$

②

Le autofunzioni sono $R_{nl} Y_l^m \chi_{spin}$ con $r_B = \frac{\hbar^2}{\mu (A\hbar c)} = \frac{2\hbar}{Amc}$

Quindi

$$\langle Elm | r | Elm \rangle = \langle \chi_{spin} | \int dr\, r^2 d\Omega\, r |R_{nl}|^2 |Y_l^m|^2 | \chi_{spin} \rangle$$

$$= \int_0^\infty dr\, r^3 |R_{nl}|^2 \qquad \rho = r/r_B$$

[le armoniche sferiche e χ_{spin} sono normalizzate

$$= r_B^4 \int_0^\infty d\rho\, \rho^3 |R_{nl}|^2$$

Il valor medio non dipende dalla funzione di spin e non dipende da m. Dipende solo da n (livello) e l (momento angolare)

$$\overset{n\,l\,m}{\langle 1\,0\,0|r|1\,0\,0\rangle} = 4 r_B \int_0^\infty d\rho\, \rho^3 e^{-2\rho} \qquad 2\rho = x$$

$$= \frac{r_B}{4}\int_0^\infty dx\, x^3 e^{-x} = \frac{r_B}{4}\, 3! = \frac{3}{2} r_B$$

$$\langle 2\,0\,0|r|2\,0\,0\rangle = \frac{r_B}{2}\int d\rho\, \rho^3 \left(1-\frac{\rho}{2}\right)^2 e^{-\rho}$$

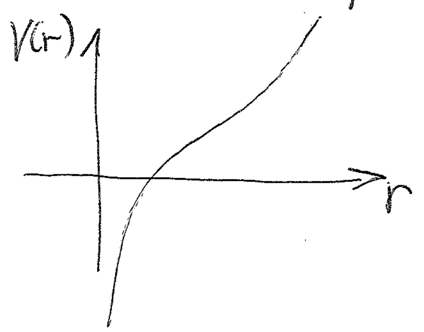
$$= \frac{r_B}{2}\int_0^\infty d\rho \left(\rho^3-\rho^4+\frac{1}{4}\rho^5\right) e^{-\rho}$$

$$= \frac{r_B}{\cancel{4}\,2}\left(3!-4!+\frac{1}{4}5!\right) = \frac{r_B}{\cancel{4}\,2}\left(6-24+30\right) = 6 r_B$$

$$\left\langle 2\,1\begin{pmatrix}+1\\0\\-1\end{pmatrix}\right| r \left|2\,1\begin{pmatrix}+1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{r_B}{24}\int d\rho\, \rho^5 e^{-\rho} = \frac{r_B}{24}\, 5! = 5 r_B$$

3

$$V(r) = -\frac{A\hbar c}{r} + kr \qquad (k>0)$$



$V(r) \to \infty$ per $r \to \infty$

Quindi ~~tutte~~ le orbite classiche sono limitate

Tutti gli stati sono L_2 e non vi sono stati dello spettro continuo

4

La perturbazione è indipendente dallo spin e quindi la matrice è diagonale nello spazio dello spin. Inoltre dipende solo da r e non dagli angoli θ, φ

Quindi

$$\langle E l' m' | V | E l m\rangle =$$

$$\int dr\, r^2 V R_{nl'} R_{nl} \underbrace{\int d\Omega\, Y_{l'}^{m'*}\, Y_l^m}_{\text{diversa da zero solo per } l=l' \text{ e } m=m'}$$

$$= \delta_{l'l}\, \delta_{mm'} \int_0^\infty dr\, r^2 V R_{nl'} R_{nl}$$

Gli elementi di matrice sono quelli calcolati al punto 2

S.F.

$$E = -\frac{A'}{4}mc^2 + \frac{3}{2}kr_B$$

La degenerazione non cambia ; degenerazione 4

I ecc.

Consideriamo solo la parte spaziale della funzione d'onda.
Se ordiniamo la base: $|2\,0\,0\rangle, |2\,1\,1\rangle, |2\,1\,0\rangle, |2\,1\,-1\rangle$
$\quad n\,\ell\,m$

la matrice è

$$k\begin{pmatrix} 6r_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5r_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5r_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5r_B \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{stato } \ell = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{stati } \ell = 1 \end{array}$$

Quindi

stati con $E = -\frac{A'}{16}mc^2 + 6kr_B$ deg $1 \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(spin)}}}{4} = 4$

stati con $E = -\frac{A'}{16}mc^2 + 5kr_B$ deg. $3 \times 4 = 12$

La degenerazione è partialmente rimossa

16 stati → 4 stati

16 stati → 12 stati

DIMENSIONI DI k

$$[k] = \frac{[\text{Energia}]}{[\text{lunghezza}]} = \frac{[ML^2T^{-2}]}{[L]} = [MLT^{-2}]$$

⑤ Ricordando che $[\delta(r)] = [L^{-3}]$ abbiamo

$$[\beta] = \frac{[\text{energia}]}{[\hbar^2][L^{-3}]} = [ML^2T^{-2}][ML^2T^{-1}]^{-2}[L^3] = [LM^{-1}]$$

Riscriviamo

$$\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = \frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2) \qquad S = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$$

$$= \frac{S^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{3}{4}\hbar^2\right) = \frac{S^2}{2} - \frac{3}{4}\hbar^2$$

$$S_1 \cdot S_2 = \begin{cases} \hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 = \frac{\hbar^2}{4} & \text{su stati } S=1 \\ 0 - \frac{3}{4}\hbar^2 = -\frac{3\hbar^2}{4} & \text{su stati } S=0 \end{cases}$$

Prendiamo una base $\underbrace{|n\ell m\rangle}_{\text{parte spaziale.}} |S S_z\rangle$

Dobbiamo calcolare gli elementi di matrice

$$\langle n \ell' m' | \langle S' S_z' | V | S S_z \rangle | n \ell m \rangle$$ [con lo stesso n ossia per un dato livello]

$$= \beta \langle n \ell' m' | \delta(\bar{r}) | n \ell m \rangle \langle S' S_z' | \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 | S S_z \rangle$$

Ora

$$\langle n \ell' m' | \delta(\bar{r}) | n \ell m \rangle$$

$$= \int d^3r \, \psi^*_{n\ell' m'}(r) \, \delta(\bar{r}) \, \psi_{n\ell m}(r)$$

$$= \psi^*_{n\ell' m'}(0) \, \psi_{n\ell m}(0)$$

Ricordiamo che per $r \to \infty$ $\psi_{n\ell m}(r) \sim r^\ell$. Quindi l'elemento di matrice è non nullo solo per $\ell = \ell' = 0$ (e quindi $m = m' = 0$)

$$\langle n \ell' m' | \delta(r) | n \ell m \rangle = |\psi^*_{n00}(0)|^2 \, \delta_{\ell,0} \, \delta_{\ell',0} \, \delta_{m,0} \, \delta_{m',0}$$

Ora

$$\psi_{100}(0) = R_{10}(0) Y_0^0 \Rightarrow \quad |\psi_{100}(0)|^2 = \frac{4}{r_B^3} \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{\pi r_B^3}$$

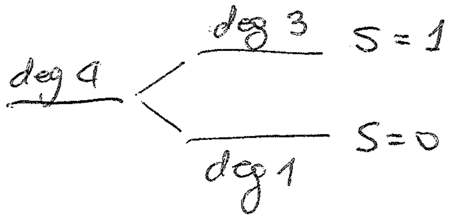
$$|\psi_{200}(0)|^2 = |R_{20}(0)|^2 |Y_0^0|^2 = \frac{1}{2 r_B^3} \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{8\pi r_B^3}$$

Si noti che l'elemento di matrice dipende da r_B secondo r_B^{-3} : questo è consistente con $[\delta(r)] = [L^{-3}]$

SF:

$$\Delta E = \begin{cases} \beta \dfrac{1}{\pi r_B^3} \dfrac{\hbar^2}{4} & S=1 \quad \text{degenerazione } 3 \\ \beta \dfrac{1}{\pi r_B^3} \left(-\dfrac{3\hbar^2}{4}\right) & S=0 \quad \text{degenerazione } 1 \end{cases}$$

Quindi

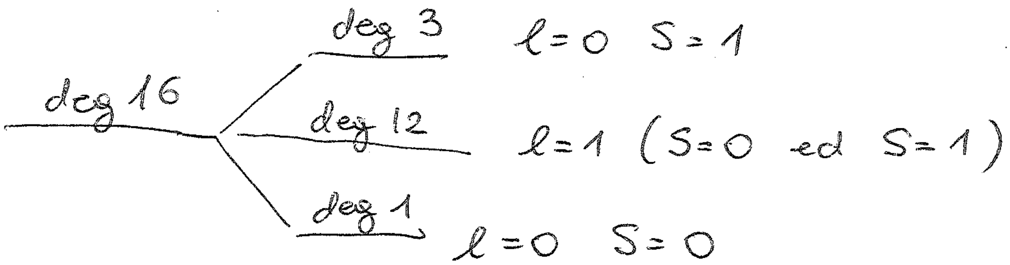


I ecc.

Gli stati con $l=1$ non variano

Stati con $l=0$

$$\Delta E = \begin{cases} \beta \dfrac{1}{8\pi r_B^3} \dfrac{\hbar^2}{4} & S=1 \quad \text{deg. } 3 \\ \beta \dfrac{1}{8\pi r_B^3} \left(-\dfrac{3\hbar^2}{4}\right) & S=0 \quad \text{deg. } 1 \end{cases}$$



(6)

La parte spaziale della Hamiltoniana è centrale e quindi $[H_{spaz}, \vec{L}] = 0$
non dipende da $\vec{S}$ e quindi $[H_{spaziale}, \vec{S}] = 0$

V_{spin} dipende da S^2 e quindi $[V_{spin}, \vec{S}] = 0$

Per capire ~~cosa succede~~ quanto valga $[V_{spin}, \vec{L}]$ si noti che $\delta(\vec{r})$ è invariante per rotazioni ($\delta(\vec{r}) \neq 0$ solo nell'origine, che è un punto invariante per rotazioni), quindi $[V_{spin}, \bar{L}] = 0$

Ne deduciamo che

$$[H_{spat} + V_{spin}, \bar{L}] = 0$$
$$[H_{spat} + V_{spin}, \bar{S}] = 0$$

L'Hamiltoniano totale commuta con $\bar{J}$: $J(t)$ non dipende da t

7 $A = 0.5 = \frac{1}{2}$

$$E_1 = -\frac{A^2}{4} mc^2 = -\frac{1}{16} 1500 \approx -100 \text{ MeV}$$

$$E_2 = \frac{1}{4} E_1 = -25 \text{ MeV}$$

$$r_B = \frac{2\hbar}{Amc} = 4 \frac{\hbar c}{mc^2} = 4 \frac{200}{1500} = \frac{8}{15} \text{ (fm)}$$

$$\langle 100 | r | 100 \rangle = \frac{3}{2} r_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{15} = \frac{4}{5} = 0.8 \text{ fm}$$

$$\langle 200 | r | 200 \rangle = 6 r_B = 6 \cdot \frac{8}{15} = \frac{16}{5} \approx 3 \text{ fm}$$

$$\langle 210 | r | 210 \rangle = 5 r_B = 5 \cdot \frac{8}{15} = \frac{8}{3} = 2.7 \text{ fm}$$

Esercizio 2

Notiamo che $S_x S_z - S_z S_x = [S_x, S_z] = -i\hbar S_y$

Quindi $H_{spin} = -ia\omega S_y$

Dato che H_{spin} deve essere hermitiana,

$H_s = H_s^+ \qquad -ia\omega S_y = ia^*\omega S_y \rightarrow \boxed{a^* = -a}$

Quindi a è immaginario puro, ossia $a = ib$ $b \in \mathbb{R}$

$H_{spin} = b\omega S_y$

(a)

${}_y\langle \frac{1}{2} | H_{spin} | \frac{1}{2} \rangle_y = b\omega \frac{\hbar}{2} \longrightarrow \quad b > 0$

Dato che $|a| = |b| = 2 \Longrightarrow b = 2$. Quindi $H_{spin} = 2\omega S_y$

Gli autostati di H_1 sono

$|n_x, n_y, n_z\rangle$ con autovalore $\hbar\omega(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})$

Gli autostati di H sono

$|n_x n_y n_z\rangle | S_y \rangle_y \longrightarrow E = \hbar\omega(\underbrace{n_x + n_y + n_z}_{n = n_x + n_y + n_z} + \frac{3}{2} + 2S_y)$

Quindi

<u>S.F.</u> $\quad |0\,0\,0\rangle | -\frac{1}{2} \rangle_y \qquad E = \hbar\omega\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{\hbar\omega}{2}$ deg 1

<u>I ecc</u> $\quad n=1 \quad |n_x n_y n_z\rangle | -\frac{1}{2} \rangle_y \qquad E = \hbar\omega\left(1 + \frac{3}{2} - 1\right) = \frac{3\hbar\omega}{2}$ deg 3

<u>II ecc</u>

$$\left.\begin{array}{l} |0\,0\,0\rangle | \frac{1}{2} \rangle_y \\ n=2 \quad |n_x n_y n_z\rangle | -\frac{1}{2} \rangle_y \end{array}\right\} E = \frac{5\hbar\omega}{2}$$

deg. $6 + 1 = 7$

$\uparrow$

$\boxed{\text{Stati con } n_x + n_y + n_z = 2}$

(b)

Autostati oscillatore unidimensionale

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-x^2/2r_0^2}$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{2}\,\frac{x}{r_0}\, e^{-x^2/2r_0^2}$$

Le autofunzioni di H_1 sono

$$|000\rangle = \psi_{000}(x,y,z) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-r^2/2r_0^2}$$

$$|001\rangle = \psi_{001}(x,y,z) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \sqrt{2}\,\frac{z}{r_0}\, e^{-r^2/2r_0^2}$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{3/4} A \left(|001\rangle\chi_+ - |000\rangle\chi_-\right)$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{3/2} |A|^2 \cdot (1+1) \implies |A| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4}$$

Scegliendo una fase abbiamo

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \qquad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|001\rangle\chi_+ - |000\rangle\chi_-\right)$$

Misura di H_1

$$|001\rangle \xrightarrow{H_1} E = \frac{5}{2}\hbar\omega$$

$$|000\rangle \xrightarrow{H_1} E = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

Quindi

$$\text{Prob}\left(H_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}\left(H_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega\right) = \frac{1}{2}$$

Cambiamo base $|n_x\, n_y\, n_z\rangle|S_z\rangle \longrightarrow |\underset{\uparrow}{n}\; \ell\; m\rangle|S_z\rangle$ (2.3)

$n = n_x + n_y + n_z$

Quindi

$$\begin{array}{ccc} n_x\, n_y\, n_z & & n\;\ell\; m \\ |0\,0\,0\rangle & = & |0\,0\,0\rangle \\ |0\,0\,1\rangle & = & |1\,1\,0\rangle \end{array}$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,1\,0\,\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0\,0\,0\,-\tfrac{1}{2}\rangle \qquad (n\;\ell\;m\;S_z)$$

Cambiamo ulteriormente base passando a $|n\,\ell\,j\,J_z\rangle_J$. Utilizzando le tavole dei Clebsch-Gordan

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\;1\;\tfrac{3}{2}\;\tfrac{1}{2}\rangle_J \right. \longrightarrow \text{stato con } j=3/2,\ J_z = 1/2$$

$$\left. -\sqrt{\frac{1}{3}}\,|1\;1\;\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\rangle_J\right] \longrightarrow \text{stato con } j=1/2,\ J_z=1/2$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}|0\;0\;\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\rangle_J \longrightarrow \text{stato con } j=1/2\ J_z=-\tfrac{1}{2}$$

($n\;\ell\;j\;J_z$)

Dopo la misura rimane solo lo stato $j=1/2\ J_z = 1/2$

Quindi

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)|1\;1\;\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\rangle_J$$

$$\longrightarrow (\text{normalizzazione}) \longrightarrow |1\;1\;\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\rangle_J$$

Ritornando alla base $|n\,\ell\,m\,S_z\rangle$

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\,1\,1\,-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1\,1\,0\,\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\,1\,1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle_z - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1\,1\,0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle_z$$

Dobbiamo ora cambiare base, esprimendo $|\pm\frac{1}{2}\rangle_z$, autostati di S_z, in termini di $|\pm\frac{1}{2}\rangle_y$, autostati di S_y

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

- Autostato $|\frac{1}{2}\rangle_y$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -ib = a \\ ia = b \end{cases}$$

$$v = (a, ia) \qquad |v|^2 = |a|^2 + |a|^2 \longrightarrow |a| = \frac{1}{\sqrt{2}} \xRightarrow{\text{(Scelta della fase)}} a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\tfrac{1}{2}\rangle_y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|\tfrac{1}{2}\rangle_z + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\tfrac{1}{2}\rangle_z$$

- Autostato $|-\frac{1}{2}\rangle_y$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -ib = -a \\ ia = -b \end{cases}$$

$$v = (a, -ia) \qquad |a| = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|-\tfrac{1}{2}\rangle_y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|\tfrac{1}{2}\rangle_z - \frac{i}{\sqrt{2}}|-\tfrac{1}{2}\rangle_z$$

Invertiamo queste relazioni

$$|\tfrac{1}{2}\rangle_z = |\tfrac{1}{2}\rangle_y\, {}_y\langle\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}\rangle_z + |-\tfrac{1}{2}\rangle_y\, {}_y\langle-\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}\rangle_z$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|\tfrac{1}{2}\rangle_y + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\tfrac{1}{2}\rangle_y$$

$$|-\tfrac{1}{2}\rangle_z = |\tfrac{1}{2}\rangle_y\, {}_y\langle\tfrac{1}{2}|-\tfrac{1}{2}\rangle_z + |-\tfrac{1}{2}\rangle_y\, {}_y\langle-\tfrac{1}{2}|-\tfrac{1}{2}\rangle_z$$
$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}|\tfrac{1}{2}\rangle_y + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\tfrac{1}{2}\rangle_y$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|111\rangle\left[-\frac{i}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_y + \frac{i}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_y\right]$$
$$-\sqrt{\frac{1}{3}}\,|110\rangle\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_y\right]$$

Quindi

$$\text{Prob}\,(H_{spin} = \hbar\omega) = \left|\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 + \left|-\sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}\,(H_{spin} = -\hbar\omega) = \left|\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|-\sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

(d)

$$|\psi\rangle = -i\frac{1}{\sqrt{3}}\,|\overset{n}{1}\,\overset{\ell}{1}\,\overset{m}{1}\rangle\left|\overset{S_y}{\frac{1}{2}}\right\rangle_y \longrightarrow E = \frac{7}{2}\hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega + 2\hbar\omega$$
$$+ i\frac{1}{\sqrt{3}}\,|111\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_y \longrightarrow E = \frac{3}{2}\hbar\omega$$
$$-\frac{1}{\sqrt{6}}\,|110\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle_y \longrightarrow E = \frac{7}{2}\hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega + 2\hbar\omega$$
$$-\frac{1}{\sqrt{6}}\,|110\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_y \qquad E = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

$$|\psi\, t\rangle = \exp\left(-\frac{3}{2}i\omega t\right)\times \leftarrow \text{fase eliminabile}$$
$$\left[-\frac{i}{\sqrt{3}}e^{-2i\omega t}\,|111\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle_y\right.$$
$$+\frac{i}{\sqrt{3}}\,|111\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_y$$
$$-\frac{1}{\sqrt{6}}e^{-2i\omega t}\,|110\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle_y$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{6}}\,|110\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_y\right]$$

$$|\psi t\rangle = -\frac{i}{\sqrt{6}} e^{-2i\omega t} |1\,1\,1\rangle \left(|\tfrac{1}{2}\rangle_z + i|-\tfrac{1}{2}\rangle_z \right)$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{6}} |1\,1\,1\rangle \left(|\tfrac{1}{2}\rangle_z - i|-\tfrac{1}{2}\rangle_z \right)$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-2i\omega t} |1\,1\,0\rangle \left(|\tfrac{1}{2}\rangle_z + i|-\tfrac{1}{2}\rangle_z \right)$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{3}} |1\,1\,0\rangle \left(|\tfrac{1}{2}\rangle_z - i|-\tfrac{1}{2}\rangle_z \right)$$

Valori possibili di J_z: $\frac{3}{2}\hbar, \frac{1}{2}\hbar, -\frac{1}{2}\hbar$

$$\mathrm{Prob}\left(J_z = \tfrac{3}{2}\hbar\right) = \left| -\frac{i}{\sqrt{6}} e^{-2i\omega t} + \frac{i}{\sqrt{6}} \right|^2$$

$$= \frac{1}{6} \left| 1 - e^{-2i\omega t} \right|^2 = \frac{1}{3}(1 - \cos 2\omega t)$$

$$\mathrm{Prob}\left(J_z = \tfrac{\hbar}{2}\right) = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-2i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2$$

$$+ \left| -\frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-2i\omega t} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right|^2$$

$$= \frac{1}{6} \left| 1 + e^{-2i\omega t} \right|^2 + \frac{1}{12} \left| 1 + e^{-2i\omega t} \right|^2$$

$$= \frac{1}{4} \left| 1 + e^{-2i\omega t} \right|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)$$

$$\mathrm{Prob}\left(J_z = -\tfrac{\hbar}{2}\right) = \left| -\frac{i}{2\sqrt{3}} e^{-2i\omega t} + \frac{i}{2\sqrt{3}} \right|^2$$

$$= \frac{1}{12} \left| 1 - e^{-2i\omega t} \right|^2 = \frac{1}{6}(1 - \cos 2\omega t)$$

Per $t=0$ $\mathrm{Prob}\left(J_z = \frac{\hbar}{2}\right) = 1$ ok

$$\Sigma \mathrm{Prob} = \frac{1}{3}(1 - \cos 2\omega t) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) + \frac{1}{6}(1 - \cos 2\omega t)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \cos 2\omega t = 1$$ <u>ok</u>

Esame di Meccanica Quantistica, 13/07/2022

Esercizio 1. Due particelle identiche di massa m e spin 1 sono vincolate a muoversi in una dimensione. Sono soggette ad una interazione spaziale con energia potenziale $V(x_1 - x_2)$, dove $V(x) = 0$ per $-L/2 < x < L/2$ e $V(x) = \infty$ per $|x| > L/2$. Le particelle, inoltre, interagiscono tra loro mediante un'interazione di tipo spin-spin

$$\hat{H}_{\rm spin} = \frac{3}{4}\pi^2 \hbar^\alpha m^\beta L^\gamma \, \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2,$$

dove α, β e γ sono parametri reali. Si studi il problema nel sistema di riferimento del centro di massa.

a) Si scriva la Hamiltoniana H_0 nel sistema di riferimento del centro di massa e si utilizzi l'analisi dimensionale per determinare gli esponenti α, β e γ.

b) Si determini l'energia dei primi 4 livelli indicandone la degenerazione e una base di autofunzioni.

c) Si consideri la perturbazione $\hat{H}_x = \epsilon(\hat{S}^2_{1z} + \hat{S}^2_{2z})$ con $\epsilon > 0$. Si determinino le dimensioni del parametro ϵ (in unità di massa, lunghezza e tempo) e si calcoli la correzione al primo ordine in ϵ ai prime due livelli energetici. Si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

d) Sia $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ lo spin totale e p l'impulso coniugato alla posizione relativa. Si determinino tutti gli stati $|\psi\rangle$ che hanno le seguenti proprietà: (i) una misura di $\hat{S}_y$ fornisce con certezza 0; (ii) una misura di $\hat{S}_z$ fornisce con certezza 0; (iii) una misura di H_0 fornisce con certezza un valore minore di $10\,\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}$; (iv) si abbia $\langle\psi|p^2|\psi\rangle = 3\frac{\pi^2\hbar^2}{L^2}$. Si calcoli la probabilità che la distanza tra le due particelle nello stato $|\psi\rangle$ sia inferiore ad $L/4$.

e) Gli stati quantistici determinati al punto d) sono autostati simultanei di $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$. Si spieghi come ciò sia consistente con le regole di commutazione tra $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$ (si calcoli il commutatore tra i due operatori). Si argomenti in dettaglio la risposta.

Integrali utili:

$$I_{mn} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dx \cos mx \, \cos nx$$

Vale: $I_{11} = (2+\pi)/4$, $I_{12} = 2\sqrt{2}/3$, $I_{13} = 1/2$, $I_{22} = \pi/4$, $I_{23} = 2\sqrt{2}/5$, $I_{33} = (3\pi - 2)/12$.

Esercizio 2. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R con Hamiltoniana $H_0 = L^2/(2mR^2)$, dove L^2 è il modulo quadro del momento angolare.

a) Si determinino i livelli energetici, se ne discuta la degenerazione e si identifichi una base di autoket di H_0.

b) Si consideri la riflessione rispetto ad un piano orizzontale passante per l'origine della sfera, definita da $(x, y, z) \to (x, y, -z)$. Si scriva la trasformazione in coordinate sferiche (r, θ, ϕ). Si faccia lo stesso per la parità $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$. Sia $\mathcal{R}$ l'operatore che implementa la riflessione, definito da $\mathcal{R}\psi(x, y, z) = \psi(x, y, -z)$, e sia Π l'operatore che implementa la parità. Si calcolino i commutatori $[H_0, \mathcal{R}]$ e $[H_0, \Pi]$.

c) Si determinino tutti gli stati quantistici $|\psi\rangle$ che soddisfano le seguenti condizioni: (i) una misura dell'energia fornisce con certezza un risultato minore di $5\hbar^2/(2mR^2)$; (ii) sotto parità $\Pi|\psi\rangle = -|\psi\rangle$;

(iii) una riflessione $\mathcal{R}$ lascia invariato lo stato: $\mathcal{R}|\psi\rangle = |\psi\rangle$; (iv) la probabilità che una misura di L_z fornisca il risultato $\hbar$ è pari a $1/2$.

d) Si calcoli $\langle\psi|L_x^2|\psi\rangle$ per gli stati determinati al punto c).

e) Utilizzando argomenti di simmetria, si calcoli $\langle\psi|L_x|\psi\rangle$. Si determini più in generale $\langle\psi|L_x^{2n+1}|\psi\rangle$ per ogni intero non negativo n.

f) Si consideri una perturbazione $\Delta H = \alpha\,(1+\cos^2\theta)$, con $\alpha \ll \hbar^2/(2mR^2)$. Si considerino i commutatori $[\Delta H, L_x]$, $[\Delta H, L_y]$, $[\Delta H, L_z]$. Con argomenti di simmetria, si specifichi quali commutatori sono nulli.

g) Utilizzando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in α, si determinino le correzioni ai primi due livelli energetici. Si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

Esercizio 1

a)

Nel sistema del CM, se $x = x_1 - x_2$ è la posizione relativa e p è il corrispondente impulso coniugato abbiamo

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + V(x) + \hat{H}_{spin} \qquad \mu = \frac{m}{2} \quad \text{massa ridotta}$$

Analisi dimensionale

$$[E] = [\hbar]^\alpha [m]^\beta [L]^\gamma [\hbar]^2$$

$$[ML^2T^{-2}] = [ML^2T^{-1}]^{\alpha+2} [M]^\beta [L^\gamma]$$

Quindi

$$M \Rightarrow \quad 1 = \alpha + 2 + \beta \qquad \beta = -1$$

$$L \Rightarrow \quad 2 = 2(\alpha+2) + \gamma \longrightarrow \gamma = -2$$

$$T \Rightarrow \quad -2 = -(\alpha+2) \longrightarrow \alpha = 0$$

$$\hat{H}_{spin} = \frac{3\pi^2}{4} \frac{1}{mL^2} \bar{S}_1 \cdot S_2 = \frac{3\pi^2}{4} \underbrace{\frac{\hbar^2}{mL^2}}_{\text{scala di energia}} \underbrace{\frac{\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2}{\hbar^2}}_{\text{adimensionale}}$$

b) La parte spaziale è una buca.

Quindi

$$E_n = E_1 n^2 \qquad n: 1, 2 \ldots \qquad E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\mu L^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2}$$

Ora $H_{spin} = \frac{3}{4} E_1 \left(\frac{\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2}{\hbar^2} \right)$

$$= \frac{3}{8} \frac{E_1}{\hbar^2} \left(S^2 - S_1^2 - S_2^2 \right) \qquad \bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$$

Trattandosi di particelle di spin 1 $\quad S_1^2 = S_2^2 = 2\hbar^2$

e $S = 0, 1, 2$.

Quindi

$$H_{spin} = \begin{cases} \frac{3}{4}E_1 & S=2 \quad (S^2 = 6\hbar^2) \\ -\frac{3}{4}E_1 & S=1 \quad (S^2 = 2\hbar^2) \\ -\frac{3}{2}E_1 & S=0 \quad (S^2 = 0) \end{cases}$$

Per assegnare correttamente lo spin a ciascun stato dobbiamo tenere conto delle parità (scambio particelle) della funzione spaziale

E_3 pari $\Longrightarrow$ stati con $S=0,2$

E_2 dispari $\Longrightarrow$ stati con $S=1$

E_1 pari $\Longrightarrow$ stati con $S=0,2$

Quindi

livello $n=1$ $\quad E_{spaz} = E_1 \longrightarrow \begin{cases} E_1 + \frac{3}{4}E_1 = \frac{7}{4}E_1 & S=2 \\ E_1 - \frac{3}{2}E_1 = -\frac{1}{2}E_1 & S=0 \end{cases}$

livello $n=2$ $\quad E_{spaz} = 4E_1 \longrightarrow 4E_1 - \frac{3}{4}E_1 = \frac{13}{4}E_1 \quad S=1$

livello $n=3$ $\quad E_{spaz} = 9E_1 \longrightarrow \begin{cases} 9E_1 + \frac{3}{4}E_1 = \frac{39}{4}E_1 & S=2 \\ 9E_1 - \frac{3}{2}E_1 = \frac{15}{2}E_1 & S=0 \end{cases}$

Quindi i primi 4 livelli sono:

s.f: $n=1$ $S=0$ $E = -\frac{E_1}{2}$ non degenere

I ecc: $n=1$ $S=2$ $E = \frac{7}{4}E_1$ deg. 5

II ecc: $n=2$ $S=1$ $E = \frac{13}{4}E_1$ deg. 3

III ecc. $n=3$ $S=0$ $E = \frac{15}{2}E_1$ deg. 1

c)

$$[\epsilon] = \frac{[\text{Energia}]}{[\hbar^2]} = \frac{[ML^2T^{-2}]}{[ML^2T^{-1}]^2} = [M^{-1}L^{-2}]$$

Correzione allo s.f. (non degenere)

$|\psi_{SF}\rangle = |1\rangle_{spaz} \underset{S\ S_z}{|0\ 0\rangle}$

$\langle\psi_{SF}|H_x|\psi_{SF}\rangle = \langle 0\ 0|H_x \overset{S\ S_z}{|0\ 0\rangle}$ dato che H_x non dipende da x (posizione spaziale

Utilizzando le tavole CG 1x1 abbiamo

$|0\ 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(|1-1\rangle - |0\ 0\rangle + |-1\ 1\rangle\right)$

$H_x|0\ 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left[\epsilon\hbar^2\right]\left[(1+1)|1-1\rangle + (1+1)|-1+1\rangle\right]$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\epsilon\hbar^2\left(|1-1\rangle + |-1\ 1\rangle\right)$

$\langle 0\ 0|H_x|0\ 0\rangle = \frac{2}{3}\epsilon\hbar^2(1+1) = \frac{4}{3}\epsilon\hbar^2 = \Delta E_{sf}$.

Il primo stato eccitato è 5 volte degenere. Gli stati sono $|1\rangle_{sp}|2\ m\rangle$. Dobbiamo quindi calcolare la matrice

$$\Delta E_{m,m'} = {}_{sp}\langle 1|\langle 2\ m|\Delta H||2\ m'\rangle|1_{sp}\rangle$$

$$= \langle 2\ m|\ \Delta H\ |2\ m'\rangle$$ [non dipende dalla parte spaziale]

Notiamo che $[\Delta H, S_z] = 0$ e quindi il vettore $|\psi\rangle = \Delta H|2\ m'\rangle$ è un autovalore di S_z con autovalore $\hbar m'$. Quindi $\langle 2\ m|\psi\rangle = 0$ se $m \neq m'$. Quindi $\Delta E_{m,m'} = 0$ se $m \neq m'$: la matrice è diagonale.

Calcoliamo gli elementi di matrice

$H_x \overset{S\ S_z}{|2\ 2\rangle} = H_x \overset{S_{1z}\ S_{2z}}{|1\ 1\rangle} = \hbar^2(1+1)\epsilon|1\ 1\rangle$

Quindi $\langle 2\ 2|H_x|2\ 2\rangle = 2\hbar^2\epsilon$

$H_x|2-2\rangle = H_x|-1-1\rangle = \hbar^2(1+1)\epsilon|-1-1\rangle$

Quindi $\langle 2-2|H_x|2\ -2\rangle = 2\hbar^2\epsilon$

$$H_x|2\,1\rangle = H_x \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\,1\rangle + |1\,1\,0\rangle\right) =$$

$$= \frac{\epsilon\hbar^2}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\,1\rangle + |1\,1\,0\rangle\right)$$

$$\langle 2\,1|H_x|2\,1\rangle = \frac{\epsilon\hbar^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1+1) = \epsilon\hbar^2$$

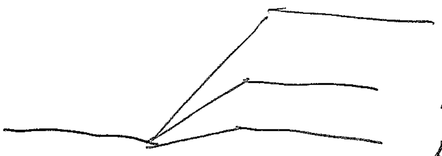
$$\langle 2\,-1|H_x|2\,-1\rangle = \epsilon\hbar^2$$

$$H_x|2\,0\rangle - H_x\left(\frac{1}{\sqrt{6}}|1\,-1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0\,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|-1\,1\rangle\right)$$

$$= \epsilon\hbar^2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 2|1\,-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\,2|-1\,1\rangle\right)$$

$$\langle 2\,0|H_x|2\,0\rangle = \epsilon\hbar^2\left(\frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 2\right) = \frac{2}{3}\epsilon\hbar^2$$

Quindi per il I eccitato



$\Delta E = 2\hbar^2\epsilon$ $\quad S_z = \pm 2$ deg. 2

$\Delta E = \hbar^2\epsilon$ $\quad S_z = \pm 1$ deg. 2

$\Delta E = \frac{2}{3}\hbar^2\epsilon$ $\quad S_z = 1$ non degenere

Degenerazione parzialmente rimossa

d) ed e)

Le condizioni i) e ii) danno $S_y|\psi\rangle = 0$, $S_z|\psi\rangle = 0$

Il fatto che $[S_y, S_z] = i\hbar S_x \neq 0$ non implica che non si possa MAI misurare contemporaneamente S_y e S_z. Infatti se $S_y|\psi\rangle = S_z|\psi\rangle = 0$ abbiamo pure $[S_y, S_z]|\psi\rangle = (S_y S_z - S_z S_y)|\psi\rangle = 0$

$$\Downarrow$$

$S_x|\psi\rangle = 0$ $\quad |\psi\rangle$ è anche autofunzione di S_x con autovalore 0.

Quindi $S^2|\psi\rangle = 0$ $\quad |\psi\rangle$ ha spin 0.

Sugli stati con $S=0$ si ~~[illegible]~~ possono misurare S_x, S_y, S_z contemporaneame

Te.

La condizione sull'energia implica

$$|\psi\rangle = a|n=1\rangle|S=0\rangle + b|n=3\rangle|S=0\rangle$$

Per utilizzare la condizione 4, ricordiamo che

$$\frac{p^2}{2\mu}|n\rangle = E_n|n\rangle \qquad \left[\begin{array}{l} \text{l'Hamiltoniana spaziale è} \\ p^2/2\mu \text{ tra } -L/2 \text{ e } L/2 \end{array}\right]$$

Quindi

$$\langle\psi|p^2|\psi\rangle = (|a|^2 E_1 + |b|^2 E_3)2\mu$$
$$= (|a|^2 + 9|b|^2)\,2\mu E_1 = (|a|^2 + 9|b|^2)\frac{\hbar^2\pi^2}{L^2}$$

Quindi iv) implica $|a|^2 + 9|b|^2 = 3$

La condizione di normalizzazione è $|a|^2 + |b|^2 = 1$

Quindi

$$\begin{cases} |a|^2 + 9|b|^2 = 3 \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{cases} \qquad |b|^2 = \frac{1}{4} \qquad |a|^2 = \frac{3}{4}$$

Quindi

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_{spaz}|\overset{S\ S_z}{0\ 0}\rangle \qquad |\psi_{spaz}\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|n=1\rangle + \frac{e^{i\alpha}}{2}|n=3\rangle$$

$$|n=1\rangle = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \qquad |n=3\rangle = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

$$\text{Prob}\left(-\frac{L}{4} < x < \frac{L}{4}\right) = \int_{-L/4}^{L/4} dx\, \langle\psi_{spaz}|\psi_{spaz}\rangle$$

$$= \int_{-L/4}^{L/4} dx \left[\frac{3}{4}\psi_1^2 + \frac{1}{4}\psi_3^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})\psi_1\psi_3\right]$$

$$= \frac{2}{L}\int_{-L/4}^{L/4} dx \left[\frac{3}{4}\cos^2\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{3\pi x}{L} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\cos\frac{\pi x}{L}\cos\frac{3\pi x}{L}\right]$$

Cambio di variabile $y = \frac{\pi x}{L}$ $\quad dx = \frac{L}{\pi}dy$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{3}{4} I_{11} + \frac{1}{4} I_{33} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\alpha \, I_{13}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{3}{4} \frac{2+\pi}{4} + \frac{1}{4} \frac{3\pi-2}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\alpha\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{2}{3\pi} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\cos\alpha$$

Esercizio 2

a) Le autofunzioni sono le armoniche sferiche $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

Quindi

$$E(\ell,m)=\frac{\hbar^2}{2mR^2}\ell(\ell+1) \quad \text{degenerazione } (2\ell+1), \quad m=-\ell\dots,\ell$$

b)

In coordinate sferiche

$$R \qquad (r,\theta,\varphi)\longrightarrow(r,\pi-\theta,\varphi)$$

$$\Pi \qquad (r,\theta,\varphi)\longrightarrow(r,\pi-\theta,\varphi+\pi)$$

Sotto parità $\vec{L}$ è invariante : $\Pi\vec{L}\Pi=\vec{L} \Rightarrow [\Pi,\vec{L}]$

Quindi $[\Pi,H_0]=0$

Sotto la riflessione R abbiamo

$$L_x=\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)(-i\hbar)\Rightarrow RL_xR=-L_x \qquad R^2=I$$

$$L_y=\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)(-i\hbar)\Rightarrow RL_yR=-L_y$$

$$L_z=\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)(-i\hbar)\Rightarrow RL_zR=+L_z$$

Quindi

$$\begin{aligned}RL^2R&=RL_x^2R+RL_y^2R+RL_z^2R\\&=RL_xR\,RL_xR+RL_yR\,RL_yR+RL_zR\,RL_zR\\&=(-L_x)(-L_x)+(-L_y)(-L_y)+L_zL_z\\&=L^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [R,L^2]=0 \Rightarrow [R,H_0]=0$$

c)

La condizione i) implica $\ell=0,1$

[Gli stati con $\ell=2$ hanno energia $E=6\cdot\frac{\hbar^2}{2mR^2}>5\frac{\hbar^2}{2mR^2}$]

La parità delle armoniche sferiche è $(-1)^\ell$: $\Pi Y_\ell^m = (-1)^\ell Y_\ell^m$. La condizione ii) permette di escludere gli stati con $\ell=0$.

Quindi i)+ii) implicano

$$|\psi\rangle = A Y_1^0 + B Y_1^1 + C Y_1^{-1}$$

Per calcolare $R Y_\ell^m$ notiamo che

$$Y_1^0 \sim \frac{z}{r} \qquad Y_1^{\pm 1} \sim \frac{x \pm iy}{r}$$

Quindi $R Y_1^0 = -Y_1^0 \qquad R Y_1^{\pm 1} = + Y_1^{\pm 1}$

La condizione iii) implica quindi: $A = 0$

La condizione iv) implica $|B|^2 = \frac{1}{2}$

La normalizzazione di $|\psi\rangle$ implica

$$\langle\psi|\psi\rangle = |B|^2 + |C|^2 = 1 \implies |C|^2 = \frac{1}{2}$$

Con opportuna scelta della fase possiamo prendere

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad C = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} \qquad \alpha: \text{fase arbitraria}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_1^1 + e^{i\alpha} Y_1^{-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\overset{\ell}{1}\,\overset{m}{1}\rangle + e^{i\alpha}|\overset{\ell}{1}\,\overset{m}{-1}\rangle\right)$$

d) Per fare il calcolo è comodo notare che

$$\langle\psi|L_x^2|\psi\rangle = |L_x|\psi\rangle|^2$$

Dato che $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ e

$$L_+|1\,{+1}\rangle = 0 \qquad L_+|1\,{-1}\rangle = \sqrt{2}\hbar|1\,0\rangle$$

$$L_-|1\,{+1}\rangle = \sqrt{2}\hbar|1\,0\rangle \qquad L_-|1\,{-1}\rangle = 0$$

$$L_x|\psi\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(L_+ + L_-)\left(|1\,1\rangle + e^{i\alpha}|1\,-1\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}|1\,0\rangle + e^{i\alpha}\sqrt{2}|1\,0\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1+e^{i\alpha})|1\,0\rangle$$

$$\langle\psi|L_x^2|\psi\rangle = \frac{\hbar^2}{4}|1+e^{i\alpha}|^2 = \frac{\hbar^2}{2}(1+\cos\alpha)$$

e)

Si poteva calcolare $\langle\psi|L_x|\psi\rangle$ utilizzando l'espressione precedente che dà immediatamente $\langle\psi|L_x|\psi\rangle = 0$

Tuttavia, si possono anche utilizzare argomenti di simmetria: $RL_xR = -L_x$ (vedi punto b) e $R|\psi\rangle = R$. Quindi $(R^2=1)$

$$\langle\psi|L_x|\psi\rangle = \underbrace{\langle\psi|R}_{\langle\psi|}\underbrace{(RL_xR)}_{(-L_x)}\underbrace{R|\psi\rangle}_{|\psi\rangle} = -\langle\psi|L_x|\psi\rangle$$

che implica $\langle\psi|L_x|\psi\rangle = 0$

L'argomento è facilmente generalizzabile:

$$RL_x^{2n+1}R = \underbrace{RL_xR\;RL_xR\ldots RL_xR}_{(2n+1)\text{ termini}} =$$

$$= (-L_x)(-L_x)\ldots(-L_x) = (-1)^{2n+1}L_x^{2n+1}$$

$$= -L_x^{2n+1}$$

Abbiamo

$$\langle\psi|L_x^{2n+1}|\psi\rangle = \langle\psi|R\,RL_x^{2n+1}R\,R|\psi\rangle$$

$$= -\langle\psi|L_x^{2n+1}|\psi\rangle$$

$$\Longrightarrow \langle\psi|L_x^{2n+1}|\psi\rangle = 0$$

f) Il potenziale si può riscrivere come

$$\Delta H = \alpha\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)$$

Si vede che

a) ΔH è invariante sotto rotazioni attorno all'asse z ($z \to z' = z$)

b) ΔH <u>non</u> è invariante sotto rotazioni attorno all'asse x ($z \to z' = z\cos\alpha + y\sin\alpha$)

c) ΔH <u>non</u> è invariante sotto rotazioni attorno all'asse y ($z \to z' = z\cos\alpha + x\sin\alpha$)

Quindi

(a) $$e^{i\alpha L_z/\hbar}\,\Delta H\, e^{-i\alpha L_z/\hbar} = \Delta H$$

(b) $$e^{i\alpha L_x/\hbar}\,\Delta H\, e^{-i\alpha L_x/\hbar} \neq \Delta H$$

(c) $$e^{i\alpha L_y/\hbar}\,\Delta H\, e^{-i\alpha L_y/\hbar} \neq \Delta H$$

[$e^{i\alpha \vec{L}\cdot\hat{n}/\hbar}$ è il generatore attorno allo asse di versore $\hat{n}$ della rotazione]

(a) è valida se e solo se $[L_z, \Delta H] = 0$

(b) è valida se e solo se $[L_x, \Delta H] \neq 0$

(c) è valida se e solo se $[L_y, \Delta H] \neq 0$

L'argomento di simmetria è quello che fornisce immediatamente il risultato richiesto.
Ovviamente si poteva pure fare il calcolo esplicito

$$[L_z, \Delta H] = -i\hbar \frac{\partial \Delta H}{\partial \varphi} = 0$$

$$[L_x, \Delta H] = i\hbar\left(\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi}\right)\Delta H$$

$$= i\hbar \sin\phi \frac{\partial \Delta H}{\partial \theta} \neq 0$$

$$[L_y, \Delta H] = -i\hbar\left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi}\right)\Delta H$$

$$= -i\hbar \cos\phi \frac{\partial \Delta H}{\partial\theta} \neq 0$$

g) Lo stato fondamentale è non degenere. Quindi

$$\Delta E = \langle 0\,0 | \Delta H | 0\,0 \rangle = \alpha \int d\Omega\, |Y_0^0|^2 (1+\cos^2\theta)$$

$$= \alpha \frac{1}{4\pi} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integrale in } \phi}}{2\pi} \int d\cos\theta\, (1+\cos^2\theta) \qquad x = \cos\theta$$

$$= \frac{\alpha}{2} \int_{-1}^{1} dx (1+x^2) = \frac{\alpha}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\alpha$$

I livello eccitato: Ha degenerazione 3 e quindi dobbiamo calcolare gli autovalori di $\langle 1\, m | \Delta H | 1\, m' \rangle = \Delta H_{mm'}$. Tuttavia se $Y_\ell^m = F_\ell^m(\theta) e^{im\varphi}$

$$\langle \ell\, m | \Delta H | \ell\, m' \rangle = \alpha \int d\Omega\, Y_\ell^{m*} Y_\ell^{m'} (1+\cos\theta)$$

$$= \alpha \int d\cos\theta\, F_\ell^m(\theta) F_\ell^{m'}(\theta) (1+\cos\theta) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-im\varphi} e^{im'\varphi}}$$

$= 0$ se $m \neq m'$

$= 2\pi$ se $m = m'$

Quindi

$\langle l m | \Delta H | l m' \rangle = 0$ se $m \neq m'$.

La perturbazione è quindi diagonale

Calcoliamo

$$\langle 1\,1 | \Delta H | 1\,1 \rangle = \alpha \int d\Omega \, |Y_1^1|^2 (1+\cos^2\theta)$$

$$= \alpha \int d\Omega \, \frac{3}{8\pi} \sin^2\theta \,(1+\cos^2\theta)$$

$$= \alpha \frac{3}{8\pi} \cdot 2\pi \int d\cos\theta \,(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta) \qquad \cos\theta = x$$

$$= \frac{3}{4}\alpha \int_{-1}^{1} dx \,(1-x^4) = \frac{3}{4}\alpha \cdot 2 \left(x - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{3\alpha}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5}\alpha$$

$$\langle 1\,{-1} | \Delta H | 1\,{-1} \rangle = \langle 1\,1 | \Delta H | 1\,1 \rangle = \frac{6}{5}\alpha$$

$$\langle 1\,0 | \Delta H | 1\,0 \rangle = \alpha \int d\Omega \, |Y_1^0|^2 (1+\cos^2\theta)$$

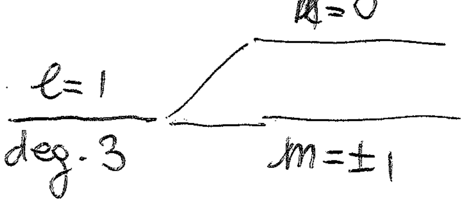
$$= \alpha \int d\Omega \, \frac{3}{4\pi} \cos^2\theta \,(1+\cos^2\theta)$$

$$= \alpha \frac{3}{4\pi} \cdot 2\pi \int d\cos\theta \,(\cos^2\theta + \cos^4\theta) \qquad \cos\theta = x$$

$$= \frac{3}{2}\alpha \int_{-1}^{1} dx \,(x^2+x^4) = \frac{3}{2}\alpha \cdot 2 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1$$

$$= 3\alpha \cdot \frac{8}{15} = \frac{8}{5}\alpha$$

Quindi



$\frac{\hbar^2}{mR^2} + \frac{8}{5}\alpha$ deg. 1

$\frac{\hbar^2}{mR^2} + \frac{6}{5}\alpha$ deg. 2

Esame di Meccanica Quantistica, 13/09/2022

Esercizio 1. Si consideri un sistema a tre livelli. Gli stati $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ sono una base ortonormale.

a) La Hamiltoniana H_0 del sistema ha tre autovalori distinti $E_1 < E_2 < E_3$. Si indichino con $|E_1\rangle$, $|E_2\rangle$, $|E_3\rangle$ i corrispondenti autostati normalizzati. Si determinino le tre energie E_1, E_2, E_3 sapendo che: (i) gli autostati $|E_2\rangle$ ed $|E_3\rangle$ sono dati da

$$|E_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|3\rangle \qquad |E_3\rangle = |2\rangle;$$

(ii) si ha $\langle 1|H_0|1\rangle = \frac{5}{3}\hbar\omega$, $\langle 2|H_0|2\rangle = 3\hbar\omega$, $\langle 3|H_0|3\rangle = \frac{4}{3}\hbar\omega$.

b) Si consideri ora la Hamiltoniana $H = H_0 + \epsilon\hbar\omega V$. Nella base $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ l'interazione V ha la seguente rappresentazione matriciale:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ a_1 & 0 & 1 \\ a_2 & a_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Si determinino le costanti a_1, a_2, a_3. Si determini, al primo ordine perturbativo in ϵ, lo stato fondamentale della Hamiltoniana H (lo si scriva come combinazione lineare dei vettori di base $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$) e la corrispondente energia.

Si consideri ora un sistema formato da due particelle identiche di spin 1/2 descritto dalla Hamiltoniana

$$H_{tot} = (4 - S^2/\hbar^2)(H_{0,1} + H_{0,2}),$$

dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ è lo spin totale e $H_{0,1}$ ed $H_{0,2}$ rappresentano la Hamiltoniana H_0 relativa, rispettivamente, alla particella 1 e 2. Indichiamo con $|1\rangle_1$, $|2\rangle_1$, $|3\rangle_1$ gli stati relativi alla particella 1 e con $|1\rangle_2$, $|2\rangle_2$, $|3\rangle_2$ quelli relativi alla particella 2. Le Hamiltoniane $H_{0,1}$ e $H_{0,2}$ non dipendono dagli operatori di spin.

c) Si calcolino le energie e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato. Si determinino i corrispondenti autostati: li si scriva come combinazioni lineari degli stati $|E_i\rangle_1|E_j\rangle_2|S, S_z\rangle$, $i, j = 1, 2, 3$. Gli stati $|E_i\rangle_1$ e $|E_i\rangle_2$ sono rispettivamente gli autostati di $H_{0,1}$ ed $H_{0,2}$ e gli stati di spin $|S, S_z\rangle$ sono autovettori di S^2 ed S_z.

d) Si determinino le energie di tutti gli autostati di H_{tot} che sono anche autostati di S^2 con autovalore $2\hbar^2$. Si scrivano gli autostati come combinazioni lineari degli stati $|E_i\rangle_1|E_j\rangle_2|S, S_z\rangle$, $i, j = 1, 2, 3$.

e) Si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle_1|2\rangle_2 - |2\rangle_1|1\rangle_2\right)|S, S_z = 0\rangle$$

Si specifichi il valore di S nella precedente espressione. In una misura di H_{tot} su $|\psi\rangle$ quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?

Esercizio 2. Una particella di spin 1/2 e massa m è vincolata a muoversi su una sfera di raggio R. Al tempo $t = 0$ lo stato della particella è descritto dallo spinore

$$|\psi\rangle_0 = N \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

dove N è una costante di normalizzazione.
La dinamica del sistema è governata dalla Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2mR^2} + \omega\left(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z\right) \tag{2}$$

dove ω è un parametro reale positivo.

1. Determinare al tempo $t = 0$ i possibili risultati di una misura di $\hat{L}_z$, $\hat{L}^2$, $\hat{S}_z$, $\hat{S}^2$, $\hat{J}_z$, e $\hat{J}^2$ e le relative probabilità. Gli operatori $\hat{L}_i, \hat{S}_i$ e $\hat{J}_i$ si riferiscono rispettivamente al momento angolare orbitale, di spin e totale della particella.

2. Determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$ e stabilire quali dei risultati al punto precedente valgono ad ogni tempo motivandone la risposta.

3. Determinare i punti sulla sfera con la minore densità di probabilità di trovare la particella all'istante iniziale.

4. Determinare al variare del parametro $\lambda \equiv \frac{2mR^2\omega}{\hbar}$ l'energia dello stato fondamentale di $\hat{H}$.

Esercizio 1

a) L'autostato $|E_1\rangle$ si determina ricordando che autostati di H con autovalori diversi sono ortogonali. Poniamo

$$|E_1\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle + c|3\rangle$$

Dato che

$$\begin{cases} \langle E_2|E_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a - \frac{i}{\sqrt{3}}\,c \\ \langle E_3|E_1\rangle = b \end{cases} \implies b=0 \qquad c=-i\sqrt{2}\,a$$

La condizione di normalizzazione è

$$|a|^2+|b|^2+|c|^2=1 \Rightarrow |a|^2+2|a|^2=1 \Rightarrow |a|^2=\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{Scelta la fase}} a=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$|E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|3\rangle$$

Ricaviamo ora $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ in termini di $|E_1\rangle, |E_2\rangle, |E_3\rangle$

$$|1\rangle = |E_1\rangle\langle E_1|1\rangle + |E_2\rangle\langle E_2|1\rangle + |E_3\rangle\langle E_3|1\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}|E_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|E_2\rangle$$

$$|2\rangle = |E_3\rangle$$

$$|3\rangle = |E_1\rangle\langle E_1|3\rangle + |E_2\rangle\langle E_2|3\rangle + |E_3\rangle\langle E_3|3\rangle$$
$$= i\sqrt{\frac{2}{3}}|E_1\rangle - i\frac{1}{\sqrt{3}}|E_2\rangle$$

Quindi

$$\langle 1|H_0|1\rangle = \frac{1}{3}E_1 + \frac{2}{3}E_2 = \frac{5}{3}\hbar\omega$$

$$\langle 2|H_0|2\rangle = E_3 = 3\hbar\omega \longrightarrow \begin{cases} E_3 = 3\hbar\omega \\ E_1+2E_2 = 5\hbar\omega \\ 2E_1+E_2 = 4\hbar\omega \end{cases}$$

$$\langle 3|H_0|3\rangle = \frac{2}{3}E_1 + \frac{1}{3}E_2 = \frac{4}{3}\hbar\omega$$

$$\longrightarrow E_1 = \hbar\omega \qquad E_2 = 2\hbar\omega \qquad E_3 = 3\hbar\omega$$

b)

Lo spettro è non degenere per cui

$$E_{SF} = E_1 + \langle E_1 | \epsilon\hbar\omega V | E_1 \rangle$$

$$|\psi_{SF}\rangle = |E_1\rangle + \sum_{i\neq 1} \frac{\langle E_i | \epsilon\hbar\omega V | E_1 \rangle}{E_1 - E_i} |E_i\rangle$$

Nella rappresentazione in cui è scritta V,

$$|1\rangle \to (1,0,0) \quad , \quad |2\rangle \to (0,1,0) \; , \; |3\rangle \to (0,0,1)$$

$$|E_1\rangle \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -i\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \quad |E_2\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \quad |E_3\rangle = (0,1,0)$$

$$V|E_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ -i\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

Abbiamo utilizzato il fatto che V è una matrice hermitiana per dedurre $a_1 = -i$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{2}) \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{2})|2\rangle = -\frac{i}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{2})|E_3\rangle$$

Quindi

$$\langle E_1 | V | E_1 \rangle = 0$$

$$\langle E_2 | V | E_1 \rangle = 0$$

$$\langle E_3 | V | E_1 \rangle = -\frac{i}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{2})$$

Segue $E_{sf} = E_1 + O(\epsilon^2)$ [nessuna correzione $O(\epsilon)$]

$$|\psi_{SF}\rangle = |E_1\rangle + \epsilon\hbar\omega \frac{\langle E_3 | V | E_1 \rangle}{E_1 - E_3} |E_3\rangle$$

$$= |E_1\rangle - \frac{\epsilon}{2}\left(-\frac{i}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{2})\right)|E_3\rangle$$

$$= |E_1 + \frac{i\epsilon}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{2})|2\rangle$$

c)

Per il principio di Pauli, consideriamo una base di autofunzioni di $H_{12} = H_{01} + H_{02}$ che sono pari o dispari sotto scambio

STATI PARI

$|E_1\rangle_1 |E_1\rangle_2 = |\psi_{S11}\rangle \qquad H_{12}|\psi_{S11}\rangle \Rightarrow 2E_1 = 2\hbar\omega$ autovalore

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_1\rangle_1 |E_2\rangle_2 + |E_2\rangle_1 |E_1\rangle_2\right) = |\psi_{S12}\rangle \qquad H_{12}|\psi_{S12}\rangle \Rightarrow E_1 + E_2 = 3\hbar\omega$ autovalore

⋮ ecc.

STATI DISPARI [dato che sono utili per rispondere allo domanda d) li scriviamo tutti]

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_1\rangle_1 |E_2\rangle_2 - |E_2\rangle_1 |E_1\rangle_2\right) = |\psi_{A12}\rangle \qquad H_{12}|\psi_{A12}\rangle = (E_1+E_2)|\psi_{A12}\rangle = 3\hbar\omega|\psi_{A12}\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_1\rangle_1 |E_3\rangle_2 - |E_3\rangle_1 |E_1\rangle_2\right) = |\psi_{A13}\rangle \qquad H_{12}|\psi_{A13}\rangle = (E_1+E_3)|\psi_{A13}\rangle = 4\hbar\omega|\psi_{A13}\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_2\rangle_1 |E_3\rangle_2 - |E_3\rangle_1 |E_2\rangle_2\right) = |\psi_{A23}\rangle \qquad H_{12}|\psi_{A23}\rangle = (E_2+E_3)|\psi_{A23}\rangle = 5\hbar\omega|\psi_{A23}\rangle$$

Contributo di spin:

Gli stati pari hanno spin $S=0$

dispari hanno spin $S=1$

$$\left(4 - S^2/\hbar^2\right) = \begin{cases} 4 & S=0 \\ 2 & S=1 \end{cases}$$

Quindi

STATI PARI

$|\psi_{S11}\rangle|S=0\ 0\rangle \rightarrow E = 4\times 2\hbar\omega = 8\hbar\omega$

$|\psi_{S12}\rangle|0\ 0\rangle \qquad E = 4\times 3\hbar\omega = 12\hbar\omega$

$\vdots$

STATI DISPARI

$|\psi_{A12}\rangle|1\ S_z\rangle \rightarrow E = 2\times 3\hbar\omega = 6\hbar\omega$

$|\psi_{A13}\rangle|1\ S_z\rangle \rightarrow E = 2\times 4\hbar\omega = 8\hbar\omega$

$|\psi_{A23}\rangle|1\ S_z\rangle \rightarrow E = 2\times 5\hbar\omega = 10\hbar\omega$

Questa è anche la risposta alla domanda d)

STATO FONDAMENTALE

$|\psi_{A12}\rangle|1\ S_z\rangle \qquad E = 6\hbar\omega$ degenerazione 3

I eccitato

$\begin{cases} |\psi_{A13}\rangle|1\ S_z\rangle \\ |\psi_{S11}\rangle|0 0\rangle \end{cases} \qquad E = 8\hbar\omega$ degenerazione 4

e)

Affinché $|\psi\rangle$ sia antisimmetrico sotto scambio deve essere $S=1$. Per rispondere alla domanda riscriviamo $|\psi\rangle$ in termini di autostati di H_{tot}

Ora

$$|1\rangle_1|2\rangle_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|E_1\rangle_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}|E_2\rangle_1\right)|E_3\rangle_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}|E_1\rangle_1|E_3\rangle_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}|E_2\rangle_1|E_3\rangle_2$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\psi_{A13}\rangle|1\ 0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_{A23}\rangle|1\ 0\rangle$$

Quindi in una misura i valori possibili sono $8\hbar\omega$ e $10\hbar\omega$

$$\text{Prob}(H_{tot} = 8\hbar\omega) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Prob}(H_{tot} = 10\hbar\omega) = \frac{2}{3}$$

Esercizio 2

Riscriviamo lo spinore in termini di armoniche sferiche:

$$-\sin\theta\cos\varphi = -\frac{1}{2}\sin\theta e^{+i\varphi} - \frac{1}{2}\sin\theta e^{-i\varphi}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y_1^1 - Y_1^{-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left(Y_1^1 - Y_1^{-1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_0^0 + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_1^0 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left(Y_0^0 + Y_1^0\right)$$

Quindi

$$|\psi\rangle = N\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_1^1 - Y_1^{-1}\right)\underbrace{|\tfrac{1}{2}\rangle}_{S_z} + \left(Y_0^0 + Y_1^0\right)\underbrace{|-\tfrac{1}{2}\rangle}_{S_z}\right]$$

$\langle\psi|\psi\rangle = 1$ $\qquad |N|^2\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1\right) = 1$ $\qquad |N|^2 = \frac{1}{4\pi}$

Se $N \in \mathbb{R}^+$ $\quad N = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ e

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(Y_1^1 - Y_1^{-1}\right)|\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(Y_0^0 + Y_1^0\right)|-\tfrac{1}{2}\rangle$$

1) L_z) $\text{Prob}(L_z = \hbar) = \text{Prob}(L_z = -\hbar) = \frac{1}{6}$ $\qquad \text{Prob}(L_z = 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

L^2) $\text{Prob}(L^2 = 2\hbar^2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $\qquad \text{Prob}(L^2 = 0) = \frac{1}{3}$

S_z) $\text{Prob}(S_z = \frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ $\qquad \text{Prob}(S_z = -\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

S^2) $\text{Prob}(S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2) = 1$ $\quad$ [è una part. di spin 1/2]

Dato che $J_z = L_z + S_z$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \underset{\downarrow\, J_z = \frac{3}{2}\hbar}{Y_1^1 \left|\tfrac{1}{2}\right\rangle} - \frac{1}{\sqrt{6}} \underset{\downarrow\, J_z = -\frac{\hbar}{2}}{Y_1^{-1}\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle} + \frac{1}{\sqrt{3}} \underset{\downarrow\, J_z = -\frac{\hbar}{2}}{Y_0^0 \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle} + \frac{1}{\sqrt{3}} \underset{\downarrow\, J_z = -\frac{\hbar}{2}}{Y_1^0 \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle}$$

$$\text{Prob}\left(J_z = \frac{3}{2}\hbar^2\right) = \frac{1}{6} \qquad \text{Prob}\left(J_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Per calcolare i valori possibili di J^2 dobbiamo cambiare base

$$Y_\ell^m |s_z\rangle \longrightarrow |\ell\, j\, j_z\rangle_J$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|1\, \tfrac{3}{2}\, \tfrac{3}{2}\right\rangle_J - \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\sqrt{\tfrac{1}{3}}\left|1\, \tfrac{3}{2}\, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_J - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|1\, \tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_J\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0\, \tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_J + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|1\, \tfrac{3}{2}\, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_J + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left|1\, \tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_J\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left|1\, \tfrac{3}{2}\, \tfrac{3}{2}\right\rangle_J + \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{18}} + \sqrt{\frac{2}{9}}\right)}_{=\sqrt{2}/6}\left|1\, \tfrac{3}{2}\, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_J$$

$$+\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)\left|1\, \tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_J + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|0\, \tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_J$$

$$\text{Prob}\left(J^2 = \frac{15}{4}\hbar^2\right) = \frac{1}{6} + \frac{2}{36} = \frac{2}{9}$$

$$\text{Prob}\left(J^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\right) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

Si può pure ricalcolare, per controllo, la probabilità di misura di J_z

$$\text{Prob}\left(J_z = \frac{3}{2}\hbar\right) = \frac{1}{6}$$

$$\text{Pro}\left(J_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{2}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Dato che $[H, L_z] = 0$, $[H, S_z] = 0$, $[H, J_z] = 0$ (dato che $J_z = L_z + S_z$) le probabilità di misurare queste quantità non dipende da t. Invece $[H, J^2] \neq 0$. Le probabilità di misurare J^2 dipendono da t. ⑦

Evoluzione temporale:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} Y_1^1 \left|\tfrac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} Y_1^{-1} \left|\tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_0^0 \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^0 \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$E = \frac{\hbar^2}{mR^2} + 2\hbar\omega \qquad \frac{\hbar^2}{mR^2} \qquad -\hbar\omega \qquad \frac{\hbar^2}{mR^2} - \hbar\omega$$

Se $\Omega = \frac{\hbar}{mR^2}$

$$|\psi_0\rangle = e^{-i\Omega t}\left[\frac{1}{\sqrt{6}} e^{-2i\omega t} Y_1^1 \left|\tfrac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} Y_1^{-1} \left|\tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i(\omega+\Omega)t} Y_0^0 \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\omega t} Y_1^0 \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle\right]$$

3. La densità di probabilità richiesta è

$$\text{Prob} = N^2\left[\sin^2\theta\cos^2\varphi + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \cos\theta\right)^2\right]$$

Essa è nulla (e questo rappresenta sicuramente il minimo) per

$$\begin{cases} \sin^2\theta\cos^2\varphi = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \cos\theta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} \cos\varphi = 0 \\ \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \\ \theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{matrix}$$

4. Gli autostati sono

$$\psi_{lmS_z} = Y_l^m |S_z\rangle \quad \text{con} \quad E_{lmS_z} = \frac{\hbar^2}{2mR^2} l(l+1) + \hbar\omega(m + 2S_z)$$

Essendo interessati al minimo di E_{lmS_z} al variare di $l\, m\, S_z$, possiamo innanzitutto notare che il minimo a l FISSATO corrisponde a $m = -l$ $S_z = -\frac{1}{2}$

Quindi

$$E_{fond} = \min_{\ell} \left[\frac{\hbar^2}{2mR^2}\ell(\ell+1) - \hbar\omega\ell\right] - \hbar\omega$$

$$= \frac{\hbar^2}{2mR^2} \min_{\ell} \left(\ell^2 + (1-\lambda)\ell\right) - \hbar\omega$$

Con autostato $|\ell \underset{\substack{\uparrow \\ \ell_z}}{-\ell}\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$

Se ℓ fosse una variabile continua il minimo corrisponderebbe a $\ell = \frac{\lambda-1}{2}$. Nel nostro caso ℓ è intero e quindi va considerato il valore intero più "vicino" a $\frac{\lambda-1}{2}$

STATI AL VARIARE DI λ

Se $\frac{\lambda-1}{2} < \frac{1}{2}$ ossia $\lambda < 2$, lo stato fond. ha $\ell=0$: $|0\,0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$

$$E_f = -\hbar\omega$$

Se $\frac{1}{2} < \frac{\lambda-1}{2} < \frac{3}{2}$ ossia $2<\lambda<4$ lo stato fond. ha $\ell=1$: $|1\,-1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2mR^2}(2-\lambda) - \hbar\omega$$

Se $\frac{3}{2} < \frac{\lambda-1}{2} < \frac{5}{2}$ ossia $4<\lambda<6$ lo stato fond ha $\ell=2$: $|2\,-2\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2mR^2}(6-2\lambda) - \hbar\omega, \ldots \text{ ecc.}$$

In generale, se $2n<\lambda<2n+2$ lo stato fondamentale ha $\ell=n$ ed è $|n\,-n\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ $[n \in \mathbb{N}]$

Se λ è un numero pari $2n$, gli stati $\ell=n$ e $\ell=n-1$ sono degeneri.

Per esempio

$\lambda=2$ Gli stati $|0\,0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ e $|1\,-1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ sono degeneri

$\lambda=4$ $|1\,-1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ e $|2\,-2\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ sono degeneri

ecc.

Esame di Meccanica Quantistica, 24/11/2022

Esercizio 1. Si consideri un sistema a 4 livelli e sia $\mathcal{B} = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$ una base ortonormale. Nella base $\mathcal{B}$, la Hamiltoniana $\hat{H}$ del sistema e una osservabile $\hat{\mathcal{P}}$ sono rappresentate dalle seguenti matrici

$$\hat{H} \doteq \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 1 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & -2i \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathcal{P}} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+k \end{pmatrix} \tag{1}$$

dove i termini a_{ij} e k sono numeri complessi.

a) Determinare i valori dei termini a_{ij}.

b) Determinare k in maniera tale che esista una base di autoket simultanei di $\hat{H}$ e $\hat{\mathcal{P}}$.

c) Assumendo il valore di k trovato al punto precedente, determinare gli autovalori di $\hat{H}$ e $\hat{\mathcal{P}}$ e una base di autoket simultanei.

d) Si consideri l'operatore $\hat{V}$, il quale nella base $\mathcal{B}$ è rappresentato da

$$\hat{V} \doteq \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i & 0 \\ 0 & -i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Si determinino gli autovalori dell'operatore $\hat{H} + \lambda\hat{V}$ al primo ordine perturbativo nel parametro λ. Si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione dello spettro.

e) Si ripeta il calcolo precedente considerando $\hat{V} = \hbar\omega\hat{\mathcal{P}}$. Si usi il valore di k trovato al punto b).

Esercizio 2. Una particella di spin 1/2 e massa m è soggetta alla Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$$

con $\alpha > 0$. Lo stato della particella è descritto dallo spinore normalizzato

$$|\psi\rangle_0 = \begin{pmatrix} f_1(r)\cos\theta \\ f_2(r)\sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{3}$$

dove $f_1(r)$ ed $f_2(r)$ sono funzioni da determinare.

a) Si determinino tutti gli stati $|\psi\rangle_0$ tali che: i) l'energia E dello stato è sempre inferiore a $E_f/5$, dove E_f è l'energia dello stato fondamentale di H_0; ii) la probabilità di misurare $L_z = \hbar$ su $|\psi\rangle_0$ è $\frac{1}{3}$. Per tali stati si specifichino le funzioni $f_1(r)$ ed $f_2(r)$ (si richieda che lo spinore sia normalizzato).

b) Si determinino i possibili risultati di una misura sugli stati $|\psi\rangle_0$ di $\hat{L}_z$, $\hat{L}^2$, $\hat{S}_z$, $\hat{S}^2$, $\hat{J}_z$, e $\hat{J}^2$ e le relative probabilità. Gli operatori $\hat{L}_i, \hat{S}_i$ e $\hat{J}_i$ si riferiscono rispettivamente al momento angolare orbitale, di spin e totale della particella.

c) Il sistema evolve con Hamiltoniana

$$H = H_0 + \frac{a}{\hbar^2} L_x^2$$

Si stabilisca, senza effettuare calcoli espliciti, quali dei risultati ottenuti al punto b) valgono sicuramente ad ogni tempo, motivandone la risposta.

d) Si calcoli lo stato $|\psi\rangle_t$ al tempo t. In una misura di H su $|\psi\rangle_t$ quali valori si possono ottenere e con quale probabilità? Si esprimano le energie in termini di E_f ed a.

e) Si calcoli il valor medio ${}_t\langle\psi|r|\psi\rangle_t$.

Autofunzione radiali $R_{nl}(\rho)$ per il problema Coulombiano. Se $\rho = r/r_B$ (r_B è il raggio di Bohr), abbiamo:

$$R_{10} = \frac{2}{r_B^{3/2}} e^{-\rho} \qquad R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{r_B^{3/2}} (1 - \rho/2) e^{-\rho/2} \qquad R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{1}{r_B^{3/2}} \rho e^{-\rho/2} \qquad .$$

Le autofunzioni sono normalizzate, ossia soddisfano a:

$$\int_0^\infty r^2 dr\, |R_{nl}(\rho)|^2 = 1$$

Integrale utile:

$$\int_0^\infty dr\, r^n e^{-r} = n!$$

Esercizio 1

(a) Per Hermiticità

$$H = \hbar\omega \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 2i & 0 \end{array}\right) = \hbar\omega \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

NOTARE la struttura a blocchi

(b) È necessario che $[H,P]=0$

$$\cancel{\hbar\omega}\, HP = \hbar\omega \overset{H}{\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)} \overset{P}{\left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 1 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)}$$

$$= \hbar\omega \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & BC \end{array}\right) \qquad BC = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i(k-1) \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

$$PH = \hbar\omega \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 1 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \hbar\omega \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & CB \end{array}\right)$$

$$CB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i(k-1) & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $[H,P]=0 \Longrightarrow$

$$2i = -2i(k-1)$$
$$1 = -k+1 \qquad k=0$$

Quindi $P = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1} \end{array}\right) \qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Essendo $\mathbb{P}$ diagonale, possiamo immediatamente concludere che gli autovalori di P sono ± 1, ciascuno dei due è due volte degenere.
Gli autovettori comuni si ottengono diagonalizzando H
Vista la struttura a blocchi è sufficiente considerare A e B

A $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda-1)(1-\lambda+1)$$
$$= -\lambda(2-\lambda) \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

autovett. con $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} a+b=0 \\ a=-b \end{matrix} \qquad \begin{matrix} v=(a,-a) \\ |v|^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \qquad v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

autovett. con $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a+b=2a \\ a+b=2b \end{cases} \Rightarrow a=b \qquad \begin{matrix} v=(a,a) \\ |v|^2=1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \qquad v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

B $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(B-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -2i \\ 2i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \qquad \lambda = \pm 2$$

autovett. con $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -2ib = 2a \\ 2ia = 2b \end{matrix} \qquad \begin{matrix} v=(a, ia) \\ |v|^2=1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \qquad v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

autovettori con $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 2ia = -2b \\ -2ib = -2a \end{matrix} \qquad \begin{matrix} v = (a, -ia) \\ |v|^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \qquad V = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, i\right.$$

Notiamo che: ad A corrisponde la matrice I in P
a B corrisponde la matrice $-I$ in P

Quindi gli autovettori di A sono anche autovettori del corrispondente blocco in P
gli autovettori di B sono autovett. del blocco di P

Otteniamo quindi la base comune

$$|v_1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \qquad H|v_1\rangle = 0 \qquad P|v_1\rangle = |v_1\rangle$$

$$|v_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \qquad H|v_2\rangle = 2\hbar\omega|v_2\rangle \qquad P|v_2\rangle = |v_2\rangle$$

$$|v_3\rangle = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \qquad H|v_3\rangle = 2\hbar\omega|v_3\rangle \qquad P|v_3\rangle = -|v_3\rangle$$

$$|v_4\rangle = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \qquad H|v_4\rangle = -2\hbar\omega|v_4\rangle \qquad P|v_4\rangle = -|v_4\rangle$$

d) Lo spettro di H ha 3 livelli:

$E = -2\hbar\omega$ non degenere, autovettore $|v_4\rangle$

$E = 0$ non degenere, autovettore $|v_1\rangle$

$E = 2\hbar\omega$ deg. 2, base data da $|v_2\rangle, |v_3\rangle$

Correzioni a $E = -2\hbar\omega$

$$\Delta E = \lambda\langle v_4|V|v_4\rangle = \lambda\hbar\omega\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i & 0 \\ 0 & -i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

NOTARE SEGNO

$$= \hbar\omega\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ i/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\lambda\hbar\omega$$

Correzioni a $E = 0$

$$\Delta E = \lambda \langle v_1 | V | v_1 \rangle = \lambda \hbar\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i & 0 \\ 0 & -i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \hbar\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -3/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \lambda \hbar\omega$$

Correzioni a $E = 2\hbar\omega$

Dobbiamo calcolare la matrice di V nello spazio con base data da $|v_2\rangle$ e $|v_3\rangle$

$$\langle v_2 | V | v_2 \rangle = \hbar\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i & 0 \\ 0 & -i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \hbar\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -i/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \hbar\omega$$

$$\langle v_3 | V | v_3 \rangle = \hbar\omega \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \underset{\boxed{\text{NOTARE SEGNO}}}{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i & 0 \\ 0 & -i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \hbar\omega \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ i/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \hbar\omega$$

$$\langle v_2 | V | v_3 \rangle = \hbar\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \begin{pmatrix} 0 \\ i/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar\omega \frac{i}{2}$$

$$\langle v_3 | V | v_2 \rangle = \langle v_2 | V | v_3 \rangle^* = -\hbar\omega \frac{i}{2}$$ [V è hermitiano]

Quindi nella base $\{|v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ abbiamo

$$V = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & i \\ -i & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = (3-\lambda-1)(3-\lambda+1)$$
$$= (2-\lambda)(4-\lambda)$$

Quindi $\lambda = 2, 4$.

Autovalori di V: $\frac{\hbar\omega}{2}\cdot 2 = \hbar\omega$ $\quad \frac{\hbar\omega}{2}\cdot 4 = 2\hbar\omega$

I livelli si separano in

$$\begin{cases} E = 2\hbar\omega + \lambda\hbar\omega \\ E = 2\hbar\omega + 2\lambda\hbar\omega \end{cases}$$

e) Gli stati $|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, |v_4\rangle$ sono autostati di H e P quindi anche di $H + \lambda\hbar\omega P$. Possiamo quindi calcolare lo spettro <u>ESATTO</u>

$H_{tot} = H + \lambda\hbar\omega P$ (definizione)

$H_{tot}|v_4\rangle = E_4|v_4\rangle \qquad E_4 = -2\hbar\omega - \lambda\hbar\omega$

$H_{tot}|v_1\rangle = E_1|v_1\rangle \qquad E_4 = \lambda\hbar\omega$

$H_{tot}|v_3\rangle = E_3|v_3\rangle \qquad E_3 = 2\hbar\omega - \lambda\hbar\omega$

$H_{tot}|v_2\rangle = E_2|v_2\rangle \qquad E_2 = 2\hbar\omega + \lambda\hbar\omega$

Lo spettro è NON degenere

Esercizio 2 (1)

a) Possiamo riscrivere $|\psi_0\rangle$ come

$$|\psi_0\rangle = f_1(r)\cos\theta\,|\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{2i} f_2(r)\left(\sin\theta e^{i\varphi} - \sin\theta e^{-i\varphi}\right)|-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= f_1(r)\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_1^0\,|\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$+ \frac{1}{2i} f_2(r)\left(-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\right)\left(Y_1^1 + Y_0^{-1}\right)|-\tfrac{1}{2}\rangle$$

Tutti gli stati hanno $l=1$.
La condizione i) ci dice che $|\psi\rangle_0$ è combinazione degli autostati di H_0 con $n=1$ e $n=2$ ossia

$$\underset{n\ l\ l_z}{|1\ 0\ 0\rangle},\quad \underset{n\ l\ l_z}{|2\ 0\ 0\rangle},\quad \underset{n\ l\ l_z}{|2\ 1\ m\rangle}$$

Dato che $|\psi_0\rangle$ è combinazione di stati con $l=1$, sono presenti solo gli stati $|2\ 1\ m\rangle$. Quindi la parte radiale è proporzionale a $R_{21}(r)$.
Poniamo quindi

$$f_1(r)\sqrt{\frac{4\pi}{3}} = A\,R_{21}(r)$$

$$\frac{1}{2i} f_2(r)\left(-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\right) = B\,R_{21}(r)$$

dove A e B sono costanti complesse da determinare.
Quindi

$$|\psi_0\rangle = R_{21}(r)\left[A\,Y_1^0\,|\tfrac{1}{2}\rangle + B\left(Y_1^1 + Y_1^{-1}\right)|-\tfrac{1}{2}\rangle\right]$$

Dato che $\int R_{21}^2\,|Y_l^m|^2\,d^3r = \int R_{21}^2\,r^2dr \int |Y_l^m|^2 d\Omega = 1$

la condizione

$$\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1 \implies |A|^2 + 2|B|^2 = 1$$

La condizione ii) implica $|B|^2 = \frac{1}{3} \implies |A|^2 = 1 - 2|B|^2 = \frac{1}{3}$

Fissando le fasi in modo che B sia reale otteniamo

$$B = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad A = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\alpha} \qquad (\alpha \text{ fase non determinata})$$

$$f_1(r) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\alpha} R_{21}(r)$$

$$f_2(r) = -2i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{\sqrt{3}} R_{21}(r)$$

Le funzioni $f_1(r)$ e $f_2(r)$ non sono determinate in modo univoco dato che possono essere moltiplicate per una fase comune (uguale per entrambe) arbitraria

b)

$$|\psi_0\rangle = R_{21} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\alpha} \overset{l\ l_z\ s_z}{|1 0 \tfrac{1}{2}\rangle} + \frac{1}{\sqrt{3}} \overset{l\ l_z\ s_z}{|1 1 -\tfrac{1}{2}\rangle} + \frac{1}{\sqrt{3}} \overset{l\ l_z\ s_z}{|1 -1 -\tfrac{1}{2}\rangle} \right]$$

L_z

$$\text{Prob}(L_z = \hbar) = \text{Prob}(L_z = 0) = \text{Prob}(L_z = -\hbar) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Prob}(L^2 = 2\hbar^2) = 1$$

$$\begin{cases} \text{Prob}(S_z = \frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{3} \\ \text{Prob}(S_z = -\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Prob}(S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2) = 1$$

$$\begin{cases} \text{Prob}(J_z = \frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ \text{Prob}(J_z = -\frac{3\hbar}{2}) = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad [\text{Ricordare } J_z = L_z + S_z]$$

Per calcolare i valori possibili per J^2 e le probabilità cambiamo base $|l\ l_z\ s_z\rangle \to |j\ j_z\rangle_J$ $[l=1, s=\frac{1}{2}, CG\ 1\times\frac{1}{2}]$

$$|\psi_0\rangle = R_{21}(r) \left[\frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\alpha} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \left|\tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_J - \sqrt{\frac{1}{3}} \left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_J \right) \right.$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left|\tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_J + \sqrt{\frac{2}{3}} \left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_J \right)$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \left|\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2}\right\rangle_J \right]$$

$$= R_{21}(r)\left[\frac{1}{3}(\sqrt{2}\,e^{i\alpha}+1)\left|\tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_J + \frac{1}{3}(\sqrt{2}-e^{i\alpha})\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_J + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2}\right\rangle_J\right]$$ ③

$$\text{Prob}\left(J^2=\frac{15}{4}\hbar^2\right) = \frac{1}{9}\left|\sqrt{2}\,e^{i\alpha}+1\right|^2+\frac{1}{3} = \frac{1}{9}\left(2+1+\sqrt{2}\,e^{i\alpha}+\sqrt{2}\,e^{-i\alpha}\right)+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{9}\cos\alpha$$

$$\text{Prob}\left(J^2=\frac{3}{4}\hbar^2\right) = \frac{1}{9}\left|\sqrt{2}-e^{i\alpha}\right|^2 = \frac{1}{9}\left(2+1-\sqrt{2}\,e^{i\alpha}-\sqrt{2}\,e^{-i\alpha}\right) = \frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{9}\cos\alpha$$

c)

Le probabilità non dipendono <u>SICURAMENTE</u> da t, se l'operatore commuta con H. Tutti gli operatori commutano con H_0 ($[H_0, L_i]=0$ perchè H_0 è invariante per rotazioni, $[H_0, S_i]=0$ perchè indipendente da $\vec{S}$). Basta calcolare il commutatore con L_x^2, ossia con L_x.

In generale: $[L^2, L_x]=0=[S^2, L_x]=[S_i, L_x]=0$. Le relative probabilità non dipendono da t.

Invece $[L_z, L_x]\neq 0$ $\quad [J_z, L_x]=[L_z, L_x]\neq 0$ $([S_z, L_x]=0)$

Inoltre $[J^2, L_x]\neq 0$ (L_x commuta solo CON GLI SCALARI CHE <u>NON</u> dipendono dallo spin. $[J^2, L_x] = \underbrace{[L^2, L_x]}_{=0} + \underbrace{[S^2, S_x]}_{=0} + \underbrace{2[\vec{L}\cdot\vec{S}, L_x]}_{\neq 0}$). Quindi le loro probabilità <u>POSSONO</u> (MA NON <u>DEVONO</u>) dipendere da t.

d)

Calcoliamo L_x nella base $|l\ m\rangle_z$ (l, l_z) di autostati di L^2, L_z

$$L_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA: è sufficiente calcolare gli autovettori di L_x dato che essi sono anche autovettori di L_x^2

che ha autovalori $\pm\hbar, 0$

① $|L_x = \hbar\rangle = |1\rangle_x = (a, b, c)$

$$\hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}/2\, b = a \\ \frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} c = b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b = c \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad |1\rangle_x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} b, b, \frac{\sqrt{2}}{2} b\right) \Longrightarrow {}_x\langle 1|1\rangle_x = 1 \qquad 2|b|^2 = 1 \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|1\rangle_x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

② $|L_x = 0\rangle = |0\rangle_x = (a, b, c)$

$$\hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} b = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} c = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} b = 0 \\ c = -a \end{matrix}$$

$|0\rangle_x = (a, 0, -a) \qquad {}_x\langle 0|0\rangle_x = 1 \Longrightarrow 2|a|^2 = 1 \qquad a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|0\rangle_x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

③ $|L_x = -\hbar\rangle = |-1\rangle_x = (a, b, c)$

$$\hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\hbar \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} b = -a \\ \frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} c = -b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b = -c \end{cases}$$

$|-1\rangle_x = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} b, b, -\frac{\sqrt{2}}{2} b\right) \qquad {}_x\langle -1|-1\rangle_x \Longrightarrow 2|b|^2 = 1 \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|-1\rangle_x = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

Quindi (gli stati sono $|m\rangle_x$ e $|m\rangle_z$, autostati di L_x e L_z): (5)

$$|1\rangle_x = \frac{1}{2}|1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_z + \frac{1}{2}|-1\rangle_z$$

$$|-1\rangle_x = \frac{1}{2}|1\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_z + \frac{1}{2}|-1\rangle_z$$

$$|0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle_z$$

Quindi

$$|1\rangle_x + |-1\rangle_x = |1\rangle_z + |-1\rangle_z$$

$$|1\rangle_x - |-1\rangle_x = \sqrt{2}|0\rangle_z$$

Segue

$$|\psi_0\rangle = R_{21}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}e^{i\alpha}\left(|\overset{\ell\ \ell_x}{1\ 1}\rangle_x - |1\,-1\rangle_x\right)\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\ 1\rangle_x + |1\ -1\rangle_x\right)\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle\right]$$

Lo stato $|\psi_0\rangle$ è autofunzione di H_0 con $n=2$ ed è anche autofunzione di L_x^2 con autovalore $+\hbar^2$ dato che è combinazione di stati $|1,1\rangle_x$ e $|1-1\rangle_x$ per i quali $L_x^2|1\pm1\rangle_x = \hbar^2|1\pm1\rangle_x$

Dato che
$$H_0|\psi_0\rangle = \frac{E_f}{4}|\psi_0\rangle$$
$$L_x^2|\psi_0\rangle = \hbar^2|\psi_0\rangle$$

a qualsiasi tempo si ottiene sempre

$$|\psi_0\, t\rangle = |\psi_0\rangle \quad \text{(a parte fase irrilevante)}$$

In una misura di H si ottiene

$$E = \frac{E_f}{4} + a$$

con probabilità 1.

Per il calcolo di r, notiamo che

$$|\psi\rangle_0 = R_{21}(r)\,\Psi(\theta,\varphi) \quad \text{dove lo spinore } \Psi(\theta,\varphi)$$

soddisfa a $\int d\Omega\ \Psi^+(\theta,\varphi)\,\psi(\theta,\varphi) = 1$ per garantire ${}_0\langle\psi|\psi\rangle_0 = 1$

Quindi

$$ {}_0\langle\psi|r|\psi\rangle_0 = \int_0^\infty dr\, r^2\, R_{21}(r)^2\, r$$

$$= r_B\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 \int_0^\infty d\rho\, \rho^3 \rho^2 e^{-\rho} = r_B \frac{1}{24}\cdot 120 = 5 r_B$$

<u>NOTA</u>: Si noti che $|\psi\rangle_0$ è un autovettore di H e quindi le probabilità delle misure ottenute per qualsiasi ~~operatore~~ osservabile non dipendono da t. Questo non è in contrasto con la risposta alla domanda c). A priori era <u>possibile</u> che i risultati per L_z, J_z e J^2 dipendessero da t. Questa conclusione è ovviamente diversa dall'affermazione: i risultati per L_z, J_z e J^2 <u>devono</u> dipendere da t (questa ultima affermazione è chiaramente falsa).

<u>METODO 2</u>:
Era anche possibile calcolare L_x^2 e studiarne gli autovettori

$$L_x^2 = L_x L_x = \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} = \hbar^2 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono 0 e $\hbar^2$ (degeneraz. 2)

1) $|L_x^2 = 0\rangle$

$$\hbar^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}c &= 0 \\ b &= 0 \\ \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}c &= 0 \end{aligned}$$

$|L_x^2=0\rangle = (a,0,-a)$ $\qquad \langle L_x^2=0|L_x^2=0\rangle = 1 \Rightarrow |a|^2=\frac{1}{2} \quad a=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$|L_x^2=0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad$ [Come ovvio si tratta dell'autovettore di L_x con autovettore nullo]

(b) Autovettori con autoval. $\hbar^2$

$$\hbar^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{c}{2}=a \\ b=b \\ \frac{a}{2}+\frac{c}{2}=a \end{cases} \Rightarrow \quad a=c$$

Sono autovettori tutti i vettori (a,b,a)

Dobbiamo sceglierne una coppia ortonormale.

La possibilità più semplice è

$|L_x^2=\hbar^2, 1\rangle = (a,0,a)$

$|L_x^2=\hbar^2, 2\rangle = (0,b,0)$ $\qquad$ che sono ovviamente ortogonali

Fissiamo la normalizzazione

$|L_x^2=\hbar^2, 1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\qquad a=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$|L_x^2=\hbar^2, 2\rangle = (0,1,0)$ $\qquad b=1$

↑ indice per distinguere i due autovettori

In termini di questi stati

$$|\psi\rangle_0 = R_{21}\left[\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{3}}|L_x^2=\hbar^2,2\rangle\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|L_x^2=\hbar^2,1\rangle\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle\right]$$

Anche questa espressione mostra che $|\psi\rangle_0$ è autofunzione di L_x^2 con autovalore $+\hbar^2$.