1 L'ellisse

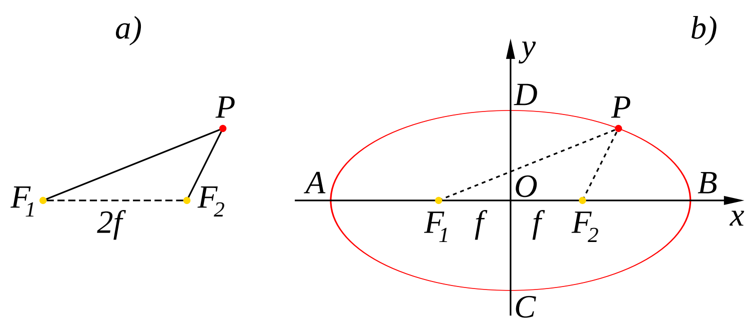
1.1 Definizione

Consideriamo due punti F_1 ed F_2 e sia $2f$ la loro distanza.
L'ellisse è il luogo dei punti P tali che la somma delle distanze $|PF_1|$ e $|PF_2|$ da F_1 ed F_2 è costante. Se indichiamo tale costante con $2a$ la condizione è [si veda la figura a)]

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a \tag{1}$$

I punti F_1 ed F_2 sono detti **fuochi**, f è detta **distanza focale**.
Si ricordi che in un triangolo la lunghezza di un lato è inferiore alla somma delle lunghezze degli altri due. Quindi

$$|PF_1| + |PF_2| \geq |F_1F_2| \Rightarrow a \geq f$$



1.2 Equazione in coordinate cartesiane

Introduciamo il sistema di riferimento indicato in figura b) con $F_1 = (-f, 0)$ ed $F_2 = (f, 0)$. Se $P = (x, y)$ la condizione (1) fornisce

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a$$

da cui

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2}.$$

Elevando al quadrato e semplificando i termini uguali nei due membri otteniamo

$$-2xf = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + 2xf.$$

Questa espressione puo' essere riscritta come

$$a^2 + xf = a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}.$$

Elevando di nuovo al quadrato e portando tutto a sinistra otteniamo

$$(a^2 - f^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - f^2) = 0.$$

Come abbiamo già detto $a \geq f$, per cui $a^2 - f^2 \geq 0$. Possiamo quindi definire

$$b = \sqrt{a^2 - f^2}$$

e riscrivere

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

Dividendo per a^2b^2 otteniamo l'**equazione canonica dell'ellisse in coordinate cartesiane**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{2}$$

L'ellisse è disegnata nella figura b) della pagina precedente. È simmetrica rispetto agli assi, interseca l'asse x nei punti A e B di coordinate $(\pm a, 0)$ e l'asse y nei punti C e D di coordinate $(0, \pm b)$. Il segmento AB che contiene i fuochi è detto **asse maggiore**, il segmento CD è detto **asse minore**. La lunghezza di AB è pari a $2a$, quella di CD è pari a $2b$. La nomenclatura maggiore/minore nasce dal fatto che $|AB| > |CD|$ dato che $a > b$. Le due costanti a e b sono chiamate

a lunghezza del semiasse maggiore

b lunghezza del semiasse minore.

Si definisce poi l'**eccentricità** e:

$$e = \frac{f}{a}.$$

Dato che $a \geq f$, il rapporto e è sempre minore o uguale a 1. Dato che f ed a sono positive, anche e è positivo. Quindi l'eccentricità varia nell'intervallo

$$0 \leq e \leq 1$$

Per $e = 0$ si ha $f = 0$ e $b = a$, per cui l'equazione canonica diventa

$$x^2 + y^2 = a^2$$

che corrisponde ad una circonferenza di raggio a. Quindi **una circonferenza è un'ellisse di eccentricità nulla**.

Il caso $e = 1$ è poco interessante. Se $e = 1$, si ha $f = a$ per cui la condizione (1) diventa

$$|PF_1| + |PF_2| = |F_1F_2|$$

Gli unici punti che soddisfano questa condizione sono quelli che appartengono al segmento che unisce F_1 ed F_2.

Utilizziamo infine la relazione $f = ae$ per riscrivere

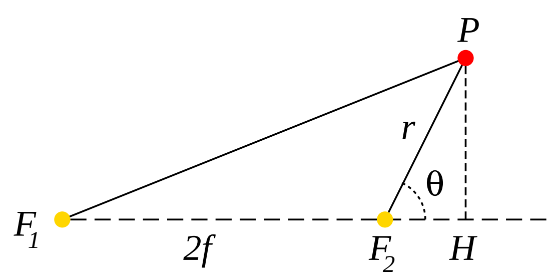
$$b = \sqrt{a^2 - f^2} = a\sqrt{1 - e^2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

Quando $e \to 1$, il rapporto $b/a \to 0$, per cui l'ellisse diventa sempre più schiacciata. Riassumiamo qui le **FORMULE UTILI**

$$\boxed{\begin{array}{c} b = \sqrt{a^2 - f^2} = a\sqrt{1 - e^2} \\ e = \dfrac{f}{a} \end{array}} \tag{3}$$

1.3 Equazione canonica in coordinate polari

Ricaviamo ora l'equazione dell'ellisse in coordinate polari. Caratterizziamo il punto P che soddisfa a (1) in termini della distanza $|PF_2| = r$ dal fuoco F_2 e dell'angolo θ che il raggio forma con il semiasse maggiore.



Dato che

$$|PF_1|^2 = (|F_1F_2| + |F_2H|)^2 + |PH|^2 = (2f + r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta,$$

l'equazione (1) fornisce

$$\sqrt{(2f + r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta} + r = 2a$$

Da ciò otteniamo

$$\sqrt{4f^2 + 4rf\cos\theta + r^2} = 2a - r.$$

Elevando al quadrato e semplificando otteniamo

$$4f^2 + 4rf\cos\theta = 4a^2 - 4ar$$

da cui

$$r(a + f\cos\theta) = a^2 - f^2.$$

Utilizzando $f = ae$ e $b^2 = a^2 - f^2$, otteniamo

$$ar(1 + e\cos\theta) = b^2,$$

ossia

$$\boxed{r(1 + e\cos\theta) = \frac{b^2}{a}} \tag{4}$$

Questa è **l'equazione canonica dell'ellisse in coordinate polari**.

NOTARE CHE: l'equazione

$$r(1 + e\cos\theta) = k$$

corrisponde ad un'ellisse quando $0 < e < 1$ (più esattamente per $|e| < 1$). Per $e \geq 1$ l'equazione descrive comunque una conica: per $e = 1$ si tratta di una parabola, per $e > 1$ si tratta di un'iperbole.

Verifichiamo cosa succede per $e = 1$. Se introduciamo un sistema di assi cartesiani tale che

$$r\cos\theta = x, \qquad r\sin\theta = y, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

abbiamo

$$r + r\cos\theta = k \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = k - x.$$

Elevando al quadrato e semplificando otteniamo

$$y^2 = k^2 - 2kx$$

da cui

$$x = -\frac{y^2}{2k} + \frac{k}{2}.$$

Si tratta di una parabola che ha come asse l'asse x e vertice in $(k/2, 0)$.

Una applicazione: La Terra descrive attorno al Sole un'ellisse in cui il Sole è nel fuoco. Il punto in cui la Terra è più vicina al Sole si chiama **perielio**, il punto in cui è più lontana è detto **afelio**. Dato che

$$r_p = a - f = a(1 - e) \qquad r_a = a + f = a(1 + e), \tag{5}$$

si ricava

$$a = \frac{1}{2}(r_a + r_p) \qquad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}.$$

Nell'equazione

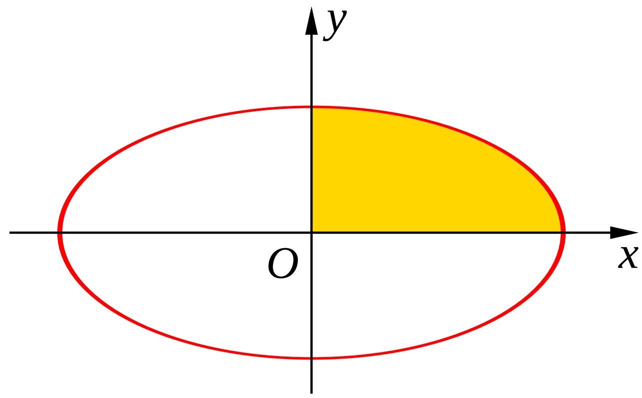
$$r = \frac{b^2}{a(1 + e\cos\theta)}$$

il perielio corrisponde a $\theta = 0$ e l'afelio a $\theta = \pi$.

1.4 Area dell'ellisse

Per ragioni ovvie di simmetria l'area A dell'ellisse è pari a 4 volte quella ombreggiata in figura.
Quindi

$$A = 4\int_0^a y(x)dx,$$



dove $y(x)$ è data da [vedi (2)]

$$y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}.$$

Quindi

$$A = 4b \int_0^a \sqrt{1 - x^2/a^2}\, dx.$$

Cambiamo variabili ponendo:

$$x = a \sin\theta, \qquad \sqrt{1 - x^2/a^2} = \cos\theta, \qquad dx = a \cos\theta\, d\theta.$$

Quindi

$$A = 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta.$$

Ora

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta),$$

per cui

$$A = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta.$$

Segue

$$A = 2ab \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2ab \times \pi/2 = \pi ab.$$

Quindi

$$\boxed{A = \pi ab.} \tag{6}$$

Se $a = b$ l'ellisse si riduce ad una circonferenza di raggio a; in questo caso riotteniamo la formula usuale $A = \pi a^2$.

2 Derivazione della III legge di Keplero

Partiremo da due risultati del Focardi: 1) l'equazione per il moto relativo nel sistema del CM e' dato da [Eq. (9.20)]

$$r(1 + e\cos\theta) = \frac{p^2}{\mu\alpha}$$

dove μ è la massa ridotta, $\alpha = Gm_1m_2$, p il momento angolare; 2) la II legge di Keplero si esprime dicendo che la velocità areolare $v_{\rm ar}$ è pari a

$$v_{\rm ar} = \frac{p}{2\mu}.$$

Confrontando con l'equazione canonica (4) possiamo identificare

$$\frac{b^2}{a} = \frac{p^2}{\mu\alpha}. \tag{7}$$

Dato che la velocità areolare è costante, in un periodo T viene percorsa una ellisse completa di area πab. Quindi

$$\text{Area ellisse} = \pi ab = v_{\rm ar}T = \frac{p}{2\mu}T$$

Segue

$$T = \frac{2\pi\mu ab}{p}$$

Quindi

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu^2a^2b^2}{p^2} \times \frac{1}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu^2}{p^2} \times \frac{b^2}{a}$$

Utilizzando (7) abbiamo

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu^2}{p^2} \times \frac{p^2}{\mu\alpha} = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha}$$

Utilizzando l'espressione di α e

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

otteniamo

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

Osservazioni: 1) il rapporto è indipendente da p e dipende solo dalle masse m_1 ed m_2; 2) nel sistema solare in cui $m_1 = M_{\rm Sole}$ è molto maggiore delle masse m_2 dei pianeti, si può scrivere

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\rm Sole}}.$$

Il rapporto è quindi anche indipendente dal pianeta considerato.

Per il moto lungo una circonferenza il risultato può essere ottenuto molto facilmente. L'equazione del moto per il moto relativo è data da

$$\mu \mathbf{a} = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore radiale. Dato che la forza è centrale il moto è uniforme. Per un moto circolare uniforme si ha

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\mathbf{r},$$

dove ω è la velocità angolare. Sostituendo nella formula precedente otteniamo

$$\mu \frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{\alpha}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{4\pi^2 \mu}{\alpha} = \frac{T^2}{r^3}$$

che coincide con l'espressione trovata prima nel caso generale (ovviamente $r = a$).

3 Energia meccanica del moto

Sappiamo che l'energia meccanica si scrive come

$$E = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{p^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

L'energia meccanica si conserva e quindi possiamo calcolarla in qualsiasi punto dell'orbita. Se scegliamo il punto più vicino al fuoco (perielio nel caso del moto della Terra intorno al Sole) abbiamo

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

per cui

$$E = \frac{p^2}{2\mu r_p^2} - \frac{\alpha}{r_p}$$

Dalla (7) segue che

$$\frac{p^2}{\mu} = \alpha \frac{b^2}{a} = \alpha a(1 - e^2)$$

dove abbiamo anche usato $b^2 = a^2(1 - e^2)$. La (5) implica

$$r_p = a(1 - e) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{p^2}{2\mu r_p} = \frac{\alpha a(1 - e^2)}{2a(1 - e)} = \frac{\alpha(1 + e)}{2}$$

Quindi

$$E = \frac{\alpha(1 + e)}{2r_p} - \frac{\alpha}{r_p} = -\frac{\alpha(1 - e)}{2r_p} = -\frac{\alpha}{2a}.$$

L'energia meccanica dipende solo dalla lunghezza del semiasse maggiore, ma non dall'eccentricità.

È facile derivare la formula finale nel caso del moto circolare uniforme. Come già discusso nel paragrafo precedente deve valere

$$\mu\omega^2 r = \frac{\alpha}{r^2}$$

da cui

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\mu r^3} \qquad\qquad v^2 = \omega^2 r^2 = \frac{\alpha}{\mu r}$$

Quindi

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{2r} - \frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{2r}.$$

4 Traiettoria dalle condizioni iniziali

Da un punto di vista osservativo è importante determinare le caratteristiche dell'orbita, dall'osservazione di posizione e velocità ad un dato istante. Supponiamo di conoscere al tempo $t = 0$ la distanza r_0 Terra-Sole e la velocità relativa $\mathbf{v} = v_r\hat{\mathbf{u}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{u}}_\theta$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu(v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{\alpha}{r_0}, \\ p &= \mu r_0 v_\theta \ . \end{aligned}$$

Il valore del semiasse maggiore a is ricava utilizzando l'energia

$$a = -\frac{\alpha}{2E}.$$

Segue poi

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{p^2}{\mu\alpha}a \\ T &= \frac{2\pi\mu ab}{p}. \end{aligned}$$

Infine si vuole conoscere l'angolo θ_0 tra il raggio Sole-Terra passante per la posizione iniziale ed il semiasse maggiore. A questo fine riprendiamo la relazione di Lenz [Eq. (9-19) del Focardi]:

$$\frac{p}{\alpha}\mathbf{v} - \hat{u}_\theta = e\hat{\mathbf{j}}.$$

Per determinare l'equazione del moto abbiamo moltiplicato scalarmente questa equazione per $\hat{\mathbf{u}}_\theta$. Ora la moltiplicheremo per $\hat{\mathbf{u}}_r$, ottenendo

$$\frac{p}{\alpha}v_r = e\sin\theta_0,$$

da cui

$$\sin\theta_0 = \frac{pv_r}{\alpha e}.$$

Questa equazione ha ovviamente due soluzioni. Solo una però soddisfa l'equazione della traiettoria

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\mu\alpha}{p^2}(1 + e\cos\theta_0).$$

In tutte le formule riportate appare la massa μ ed α. Se $m_1 \gg m_2$ per cui $\mu \approx m_2$, i risultati sono indipendenti dalla massa m_2.

$$E/m_2 = \mathcal{E} = \frac{1}{2}(v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{Gm_1}{r_0},$$

$$p/m_2 = \mathcal{P} = r_0 v_\theta.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{Gm_1}{2\mathcal{E}}, \\
b^2 &= \frac{\mathcal{P}}{Gm_1}a \\
T &= \frac{2\pi ab}{\mathcal{P}} \\
\sin\theta_0 &= \frac{\mathcal{P}v_r}{Gm_1 e} \\
r &= \frac{\mathcal{P}}{Gm_1}(1 + e\cos\theta)^{-1}.
\end{aligned}$$