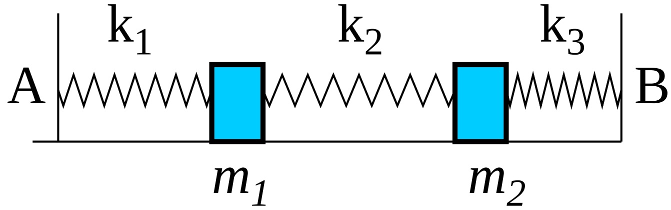
1 Oscillazioni normali



Consideriamo il sistema indicato in figura. Due corpi (il corpo a sinistra ha massa m_1 ed il corpo a destra ha massa m_2) sono vincolati a muoversi lungo una retta sotto l'azione di tre molle di costanti elastiche e lunghezze a riposo (da sinistra a destra) k_1 ed l_1, k_2 ed l_2, k_3 ed l_3. Le dimensioni dei corpi sono trascurabili. La distanza tra i punti A e B è d. Vogliamo descrivere il moto del sistema.

Scegliamo innanzitutto un sistema di riferimento tale che ξ_1 è la distanza dal punto A della massa m_1 e ξ_2 è la distanza dal punto A della massa m_2. Quindi la lunghezza dalla molla 1 è ξ_1, quella della molla 2 è $\xi_2 - \xi_1$, quella della molla 3 è $d - \xi_2$.

Scriviamo ora le equazioni di Newton per le due masse:

$$m_1 a_1 = m_1 \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = F_{\text{molla},1} + F_{\text{molla},2} = -k_1(\xi_1 - l_1) + k_2(\xi_2 - \xi_1 - l_2),$$
$$m_2 a_2 = m_2 \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = F_{\text{molla},2} + F_{\text{molla},3} = -k_2(\xi_2 - \xi_1 - l_2) + k_3(d - \xi_2 - l_3).$$

Le posizioni di equilibrio $\xi_{1,\text{eq}}$ e $\xi_{2,\text{eq}}$ si ottengono risolvendo le precedenti equazioni per $a_1 = a_2 = 0$. Quindi

$$\begin{aligned} -k_1(\xi_{1,\text{eq}} - l_1) + k_2(\xi_{2,\text{eq}} - \xi_{1,\text{eq}} - l_2) &= 0 \\ -k_2(\xi_{2,\text{eq}} - \xi_{1,\text{eq}} - l_2) + k_3(d - \xi_{2,\text{eq}} - l_3) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Risolvendo tale sistema algebrico si ottengono le posizioni di equilibrio in funzione di tutti i parametri del problema.

Per trattare i problemi di oscillazione è sempre comodo utilizzare sistemi di riferimento con origine nei punti di equilibrio. Poniamo quindi

$$\xi_1 = x_1 + \xi_{1,\text{eq}} \qquad \qquad \xi_2 = x_2 + \xi_{2,\text{eq}}.$$

Ricaviamo l'equazione per x_1:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= m_1 \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = -k_1(x_1 + \xi_{1,\text{eq}} - l_1) + k_2(x_2 + \xi_{2,\text{eq}} - x_1 - \xi_{1,\text{eq}} - l_2) = \\ &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) - k_1(\xi_{1,\text{eq}} - l_1) + k_2(\xi_{2,\text{eq}} - \xi_{1,\text{eq}} - l_2) \\ &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \end{aligned} \tag{2}$$

dove abbiamo usato (1): l'equazione per la variabile x_1 si ottiene da quella per ξ_1 eliminando tutti i termini costanti che appaiono al secondo membro. Procedendo in maniera analoga per la seconda equazione otteniamo alla fine

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 \\
m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2.
\end{aligned}
$$

Al fine di semplificare i calcoli (ma il procedimento è concettualmente sempre lo stesso) supponiamo che $m_1 = m_2 = m$ e $k_3 = k_1$. Per rendere le espressioni più semplici introduciamo poi le notazioni

$$
c = \frac{k_1 + k_2}{k_2}, \qquad \omega_0^2 = \frac{k_2}{m}.
$$

Le equazioni differenziali diventano:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -c\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\
\frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \omega_0^2 x_1 - c\omega_0^2 x_2.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della forma:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= A\cos(\Omega t + \phi) \\
x_2 &= B\cos(\Omega t + \phi).
\end{aligned}
$$

Le due coordinate oscillano con la stessa frequenza ma con ampiezze diverse. Una soluzione di questo tipo si chiama **modo normale** ed Ω si chiama **frequenza normale**. Sostituendo nelle equazioni (3) otteniamo:

$$
\begin{aligned}
-\Omega^2 A\cos(\Omega t + \phi) &= -c\omega_0^2 A\cos(\Omega t + \phi) + \omega_0^2 B\cos(\Omega t + \phi) \\
-\Omega^2 B\cos(\Omega t + \phi) &= \omega_0^2 A\cos(\Omega t + \phi) - c\omega_0^2 B\cos(\Omega t + \phi)
\end{aligned} \tag{4}
$$

Dividendo ambo le equazioni per $\cos(\Omega t + \phi)$ otteniamo le equazioni

$$
\begin{aligned}
-A\Omega^2 &= -cA\omega_0^2 + B\omega_0^2 \\
-B\Omega^2 &= A\omega_0^2 - cB\omega_0^2,
\end{aligned} \tag{5}
$$

che possiamo riscrivere come

$$
\begin{aligned}
A(\Omega^2 - c\omega_0^2) + B\omega_0^2 &= 0 \\
A\omega_0^2 + B(\Omega^2 - c\omega_0^2) &= 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Dato che il termine noto è zero, queste equazioni hanno genericamente la sola soluzione $A = B = 0$. Una soluzione non banale si ottiene solo se **il determinante dei coefficienti è zero**, ossia se

$$
(\Omega^2 - c\omega_0^2)^2 - \omega_0^4 = 0.
$$

Segue

$$\Omega^2 - c\omega_0^2 = \pm\omega_0^2,$$

da cui

$$\Omega^2 = (c \pm 1)\omega_0^2.$$

Si ottengono dunque due frequenze normali. Si noti che tali frequenze esistono solo per $c \pm 1 > 0$, ossia per $c > 1$. Per $c < 1$ le frequenze sono immaginarie e quindi questo significa che ci sono soluzioni particolari delle equazioni (3) di tipo esponentiale $e^{|\Omega|t}$. In questo caso il moto non è oscillatorio. Nel nostro problema

$$c = 1 + k_1/k_2 > 1$$

e quindi le due frequenze esistono sempre (come ovvio! nel nostro sistema il moto puo' solo essere oscillatorio).

Per i due valori Ω le due equazioni sono linearmente dipendenti e quindi forniscono solo il rapporto A/B. Si ha quindi:

$$\begin{array}{ll}
\text{modo normale 1} & \Omega_1 = \omega_0\sqrt{c+1} = \sqrt{\dfrac{k_1+2k_2}{m}} \qquad A/B = -1 \\
& x_1 = A_1 \cos(\Omega_1 t + \phi_1) \\
& x_2 = -A_1 \cos(\Omega_1 t + \phi_1) \\
\text{modo normale 2} & \Omega_2 = \omega_0\sqrt{c-1} = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}} \qquad A/B = 1 \\
& x_1 = A_2 \cos(\Omega_2 t + \phi_2) \\
& x_2 = A_2 \cos(\Omega_2 t + \phi_2)
\end{array}$$

È interessante notare a cosa corrispondono i due moti normali. Il primo corrisponde ad un moto simmetrico delle due masse rispetto al punto centrale ($\xi = d/2$). Il secondo modo normale corrisponde invece ad un moto in cui le due masse si muovono assieme, mantenendo costante la lunghezza della molla centrale.

La soluzione generale del problema si ottiene sommando i due modi normali. Quindi

$$\begin{aligned}
x_1 &= A_1 \cos(\Omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\Omega_2 t + \phi_2) \\
x_2 &= -A_1 \cos(\Omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\Omega_2 t + \phi_2)
\end{aligned} \tag{7}$$

Appaiono in questa soluzione 4 costanti arbitrarie A_1, A_2, ϕ_1 e ϕ_2. Esse sono definite dalle 4 condizioni iniziali: il valore di x_1 ed x_2 e delle due corrispondenti velocità per $t = 0$.

ESEMPIO: Si supponga che $x_1 = x_2 = 0$, $v_1 = v_0$, $v_2 = 0$ per $t = 0$. La condizione $x_1 = x_2 = 0$ implica

$$A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2 = 0, \qquad -A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2 = 0,$$

che implica:

$$A_1 \cos\phi_1 = 0, \qquad A_2 \cos\phi_2 = 0. \tag{8}$$

La condizione per le velocità implica:

$$-\Omega_1 A_1 \sin\phi_1 - \Omega_2 A_2 \sin\phi_2 = v_0, \qquad \Omega_1 A_1 \sin\phi_1 - \Omega_2 A_2 \sin\phi_2 = 0,$$

che implica

$$A_1 \sin\phi_1 = -\frac{v_0}{2\Omega_1} \qquad A_2 \sin\phi_2 = -\frac{v_0}{2\Omega_2}.$$

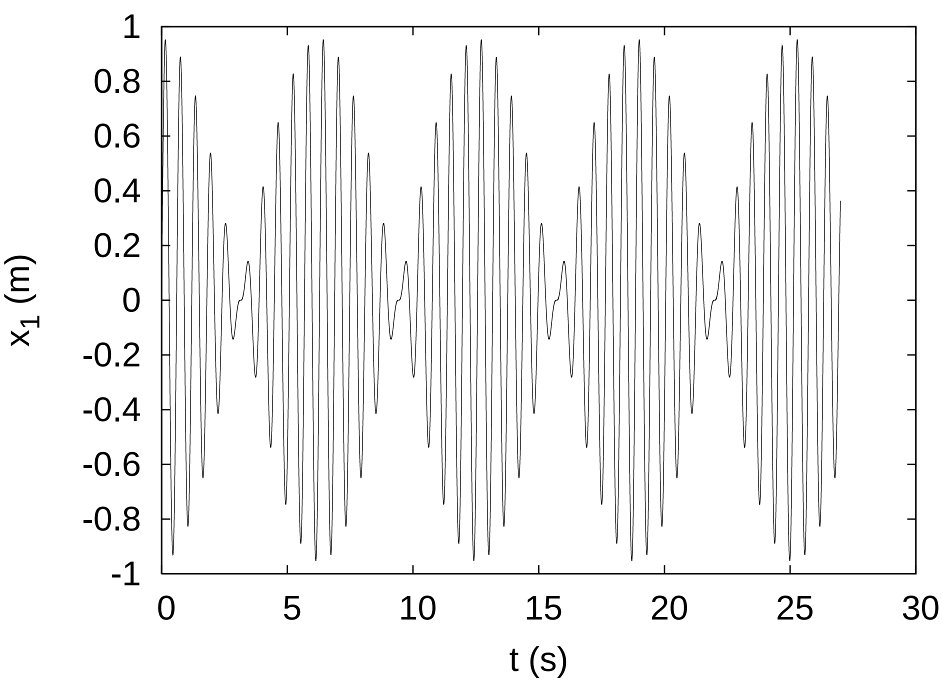
La precedente equazione unita a (8) dà

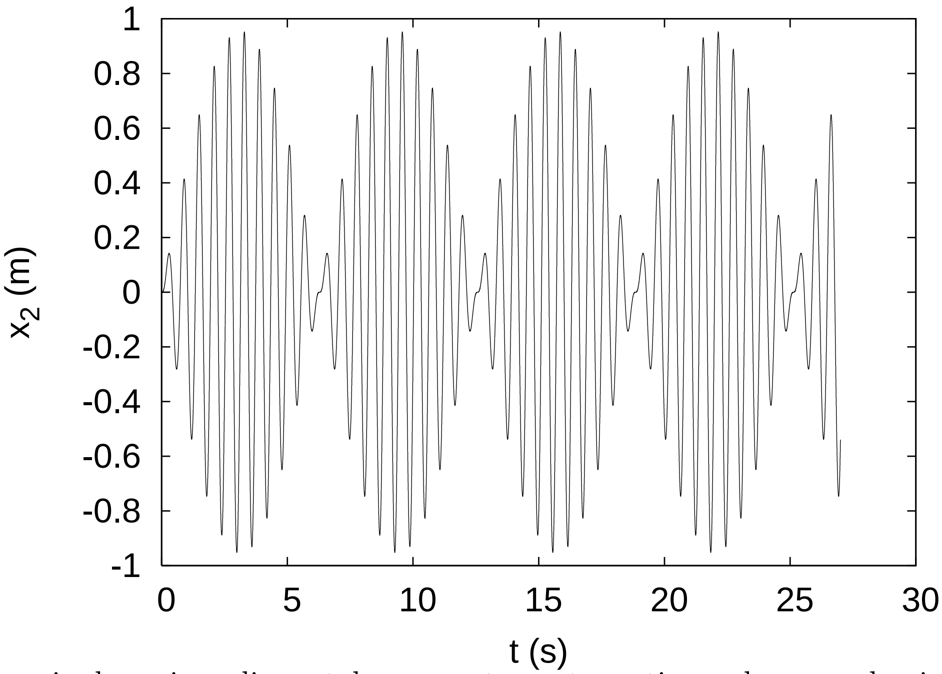
$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{v_0}{2\Omega_1}, \qquad \phi_1 = \frac{\pi}{2} \\ A_2 &= -\frac{v_0}{2\Omega_2}, \qquad \phi_2 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{v_0}{2\Omega_1} \sin\Omega_1 t + \frac{v_0}{2\Omega_2} \sin\Omega_2 t \\ x_2 &= -\frac{v_0}{2\Omega_1} \sin\Omega_1 t + \frac{v_0}{2\Omega_2} \sin\Omega_2 t \end{aligned} \tag{9}$$

Il moto è in generale molto complesso. Se Ω_1 ed Ω_2 sono prossimi, ossia $\Omega_1 - \Omega_2 \ll \Omega_1 + \Omega_2$ si possono osservare fenomeni di *battimenti*. In figura, si mostra il comportamento di x_1 ed x_2 per $\Omega_1 = 11$ s^{-1}, $\Omega_2 = 10$ s^{-1}, $v_0 = 10$ m/s.





Per capire la ragione di una tale comportamento, notiamo che per pulsazioni vicine possiamo approssimare

$$\frac{v_0}{2\Omega_1} \approx \frac{v_0}{2\Omega_2} = b \tag{10}$$

per cui

$$\begin{aligned} x_1 &= b(\sin\Omega_1 t + \sin\Omega_2 t) \\ x_2 &= -b(\sin\Omega_1 t - \sin\Omega_2 t) \end{aligned} \tag{11}$$

Se introduciamo

$$\Omega_p = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}, \qquad \Omega_m = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}, \tag{12}$$

abbiamo (formula di prostaferesi)

$$\begin{aligned} &\sin\Omega_1 t + \sin\Omega_2 t = \\ &\quad \sin(\Omega_p t + \Omega_m t) + \sin(\Omega_p t - \Omega_m t) = \\ &\quad \sin\Omega_p t\cos\Omega_m t + \cos\Omega_p t\sin\Omega_m t + \sin\Omega_p t\cos\Omega_m t - \cos\Omega_p t\sin\Omega_m t = \\ &\quad 2\sin\Omega_p t\cos\Omega_m t. \end{aligned} \tag{13}$$

Analogamente si ha

$$\sin\Omega_1 t - \sin\Omega_2 t = 2\cos\Omega_p t\sin\Omega_m t. \tag{14}$$

Quindi

$$x_1 = 2b\sin\Omega_p t\cos\Omega_m t, \qquad x_2 = -2b\cos\Omega_p t\sin\Omega_m t.$$

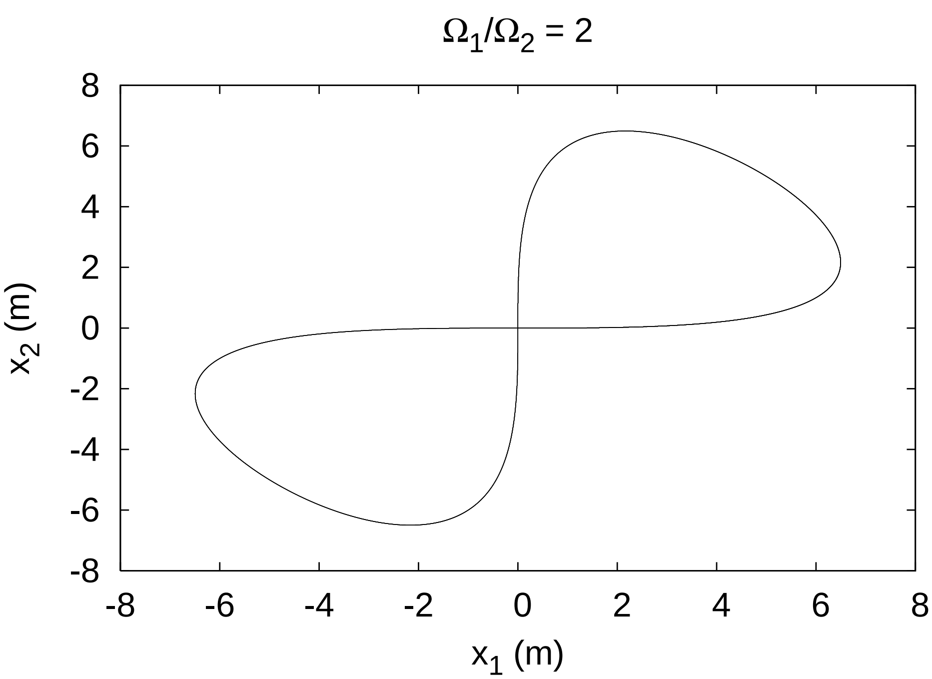
Tornando all'esempio numerico troviamo $\Omega_p = 10.5$ s^{-1}, $\Omega_m = 0.5$ s^{-1}. I corrispondenti periodi sono $T_p = 2\pi/\Omega_p = 0.60$ s e $T_m = 2\pi/\Omega_m = 12.6$ s. Quindi le due funzioni sono il prodotto di due funzioni oscillanti, una di corto periodo che dà luogo alle oscillazioni veloci, ed una di lungo periodo che modula l'ampiezza. In particolare l'ampiezza delle oscillazioni di x_1 è approssimativamente zero quando $\cos \Omega_m t = 0$, ossia per $t = T_m/4 = 3.14$ s, $t = 3T_m/4 = 9.42$ s, etc., in accordo con la figura. Analogamente x_2 è approssimativamente 0 per $t = T/2$, T, etc.

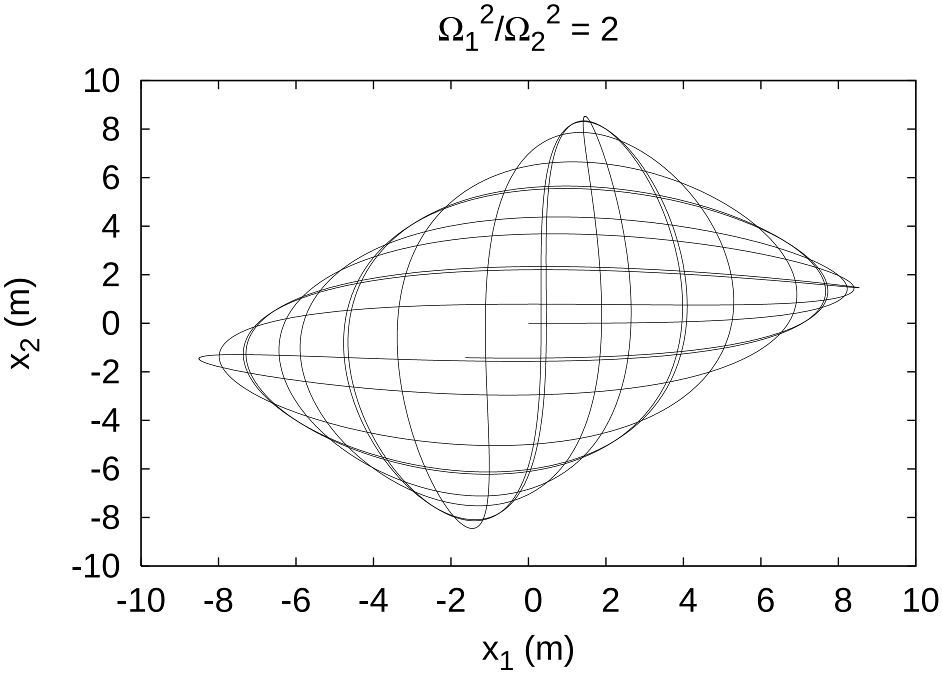
Periodicità: Consideriamo ancora il sistema (7) e vediamo se il moto è periodico. Se $A_2 = 0$ il moto è periodico di periodo $T_1 = 2\pi/\Omega_1$. Se $A_1 = 0$ il moto è periodico di periodo $T_2 = 2\pi/\Omega_2$. Supponiamo ora che esista T tale che $T = nT_1$ e $T = mT_2$ dove n ed m sono interi. Ovviamente $x_1(t+T) = x_1(t)$ e $x_2(t+T) = x_2(t)$: il moto è periodico e T è il periodo o un suo multiplo. E' evidente che deve valere pure il viceversa. Se il moto è periodico di periodo T, devono esistere n ed m interi tali che $T = nT_1$ e $T = mT_2$. Quindi il moto è periodico se e solo se

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n},$$

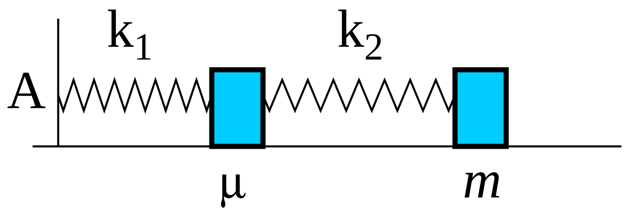
ossia se il rapporto delle frequenze normali è un numero *razionale*. In generale il moto non è periodico. Tuttavia il sistema gode di questa proprietà: se passa per un punto (x_1, x_2), allora passa un numero infinito di volte in ogni suo intorno. Un moto di questo tipo si chiama *quasiperiodico*.

Nelle figura riportiamo due esempi di traiettoria nel piano (x_1, x_2) per il moto (9). In entrambi i casi $v_0 = 10$ m/s e $\Omega_2 = 1$ s^{-1}. Le due figure si riferiscono a $\Omega_1 = 2$ s^{-1} e $\Omega_1 = \sqrt{2}$ s^{-1}. Nel primo caso il moto è periodico, nel secondo quasiperiodico.




$\Omega_1^2/\Omega_2^2 = 2$
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
x_2 (m)
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
x_1 (m)

Per i più abili: esercizio facoltativo.



Un modello semplice che permette di capire il comportamente di un punto materiale connesso ad un molla di massa non trascurabile è disegnato in figura. La massa della molla è rappresentata da una massa μ connessa a due molle di costanti elastiche uguali, con $k_1 = k_2 = 2k$ e lunghezza a riposo $l_0/2$. Le dimensioni delle due masse sono trascurabili (punti materiali).

Esercizio: 1) Si applichi una forza F costante orizzontale, diretta verso destra, alla massa m. Si faccia vedere che, in condizioni di equilibrio, la lunghezza complessiva delle due molle è pari a $l_0 + F/k$. Questo giustifica i valori assegnati a k_1 e k_2.
2) Per $F = 0$ si calcolino le pulsazioni dei due modi normali. Si faccia vedere che, per $r = \mu/m \ll 1$, le due pulsazioni sono pari a $\Omega_1^2 = \omega_0^2[1 + O(r)]$, $\Omega_2^2 \sim \omega_0^2/r$, dove $\omega_0^2 = k/m$.
3) Si supponga che il sistema si trovi nella posizione di equilibrio calcolata al punto 1) con $F/k = l_0/5$ per $t < 0$. A $t = 0$ la forza F cessa di agire ed il sistema si mette ad oscillare. Si calcoli la legge oraria. Utilizzando un computer, se ne faccia il grafico per $\omega_0 = 1.0$ rad/s, $l_0 = 10.0$ cm ed i seguenti valori di r: $r = 1$, $r = 0.1$ e $r = 0.01$. La si confronti con quanto si otterrebbe per $r = 0$ (molla senza massa).