Calcolo delle probabilità
Proff. Beghin-Orsingher
18-3-2022

Nome.................. **Cognome..................** **Matricola ....**

E1) In un cinema multisala ci sono 7 sale. Tre visitatori scelgono a caso quale film vedere ed entrano ciascuno in una sala. Calcolare

a) la probabilità che non scelgano tutti lo stesso film
b) la probabilità che scelgano tre sale diverse
c) la probabilità che almeno due scelgano la stessa sala
d) la distribuzione di probabilità del numero di sale che riceve almeno uno spettatore
e) la probabilità che tutti vadano nelle prime due sale, sapendo che almeno cinqe restano vuote

E2) Siano X_1 e X_2 due v.a. indipendenti ed identicamente distribuite con densità

$$f_{X_i}(z) = 2z1_{(0,1)}(z), \qquad i = 1, 2$$

a) Si calcoli la distribuzione di probabilità di $Y = X_1^2 - X_2^2$.
b) Si studi la convergenza in distribuzione della successione

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

per $n \to +\infty$, dove la v.a. Y_i sono indipendenti e tutte distribuite come Y.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzioni :

ES.1 : A = "non scelgono tutti lo stesso film"

a) $P(A) = 1 - P(A^c)$

$$= 1 - \frac{7 \cdot 1 \cdot 1}{7^3} = \frac{48}{49} = 0{,}98$$

b) $P(\text{"3 diverse"}) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{7^3} = \frac{30}{49} = 0{,}61$

c) $P(\text{"almeno 2 la stessa"}) = 1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49} = 0{,}39$

d) X = "n° sale con almeno 1 spettatore"
= "n° sale non vuote"

$X = \{1, 2, 3\}$ g.c.

$P(X=1) = P(A^c) = \frac{1}{49}$

$P(X=3) = P(\text{"3 diverse"}) = \frac{30}{49}$

$P(X=2) = 1 - \frac{1}{49} - \frac{30}{49} = \frac{18}{49}$

$\left(\text{oppure } P(X=2) = \frac{7 \cdot 6 \cdot \binom{3}{2}}{7^3} = \frac{18}{49}\right]$

e) B_i = "Tutti nella i-esima sala"

$P(B_1 \cup B_2 \mid \text{almeno 5 vuote})$

$= \frac{P(B_1 \cup B_2)}{P(\text{almeno 5 vuote})}$ poiché $B_1 \cup B_2 \subset$ "almeno 5 vuote"

$= \frac{\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{7^3}}{P(X=2) + P(X=1)} = \frac{\frac{4}{7^3}}{\frac{18}{7^2} + \frac{1}{7^2}} = \frac{4}{7 \cdot 19} = 0{,}03$

Es. 2

$$f_{X_i}(z) = \begin{cases} 2z & z \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

a) $Y = X_1^2 - X_2^2 \in (-1, 1)$ q.c.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ ? & -1 < y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

Calcolo prima la distribuzione di

$W = X^2 \in (0,1)$ p.c.

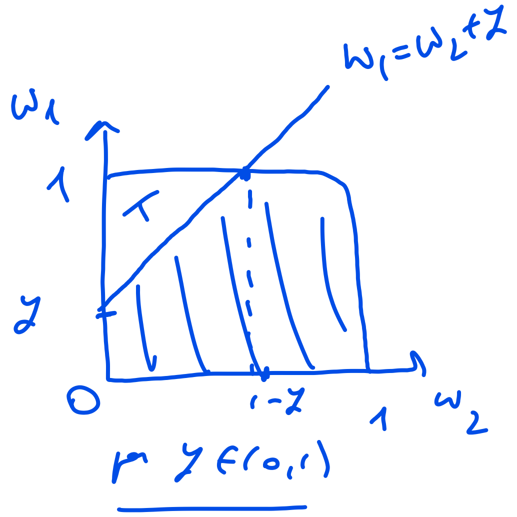
$$P(W<w) = P(X^2<w) = P(-\sqrt{w}<X<\sqrt{w})$$
$$= F_X(\sqrt{w}) = \int_0^{\sqrt{w}} 2z\,dz$$
$$= \frac{2}{2} z^2 \Big]_0^{\sqrt{w}} = w$$

$\Rightarrow W_i = X_i^2 \sim Unif(0,1)$

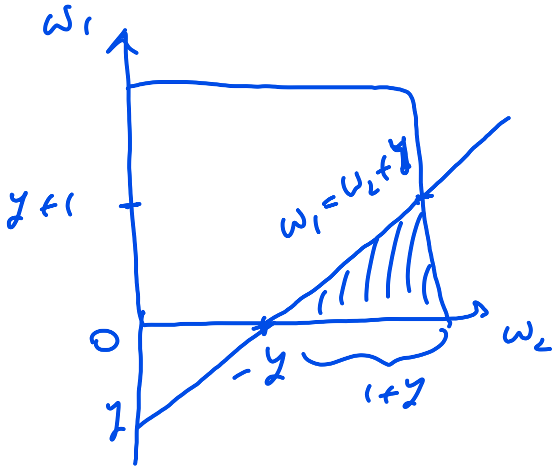
Quindi $X_1^2 \sim Unif(0,1)$ e $X_2^2 \sim Unif(0,1)$ indip.

$Y = X_1^2 - X_2^2$

$$F_Y(y) = P(W_1 - W_2 < y)$$
$$= P(W_1 < W_2 + y)$$



per $y \in (0,1)$ $= 1 - Area(T)$
$$= 1 - \frac{(1-y)^2}{2}$$



per $y \in (-1,0)$
$$= \frac{(1+y)^2}{2}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le -1 \\ \frac{(y+1)^2}{2} & -1 < y \le 0 \\ 1 - \frac{(1-y)^2}{2} & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

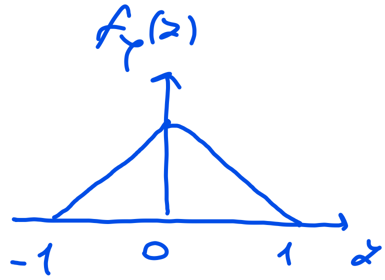
verifica:
$$F_Y(-1^+) = 0 = F_Y(-1)$$
$$F_Y(0^+) = \tfrac{1}{2} = F_Y(0)$$
$$F_Y(1^+) = 1 = F_Y(1)$$

b) per la legge dei grandi numeri, poiché Y_i sono i.i.d. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{P} \mathbb{E}Y$

Calcolo il $\mathbb{E}Y$. La densità di Y è

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

$$= \begin{cases} y+1 & -1<y<0 \\ 1-y & 0<y<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$\Rightarrow \mathbb{E}Y = 0$ e $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{P} 0$

Poiché la conv. in probab. implica la conv. in distr., $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{d} 0$