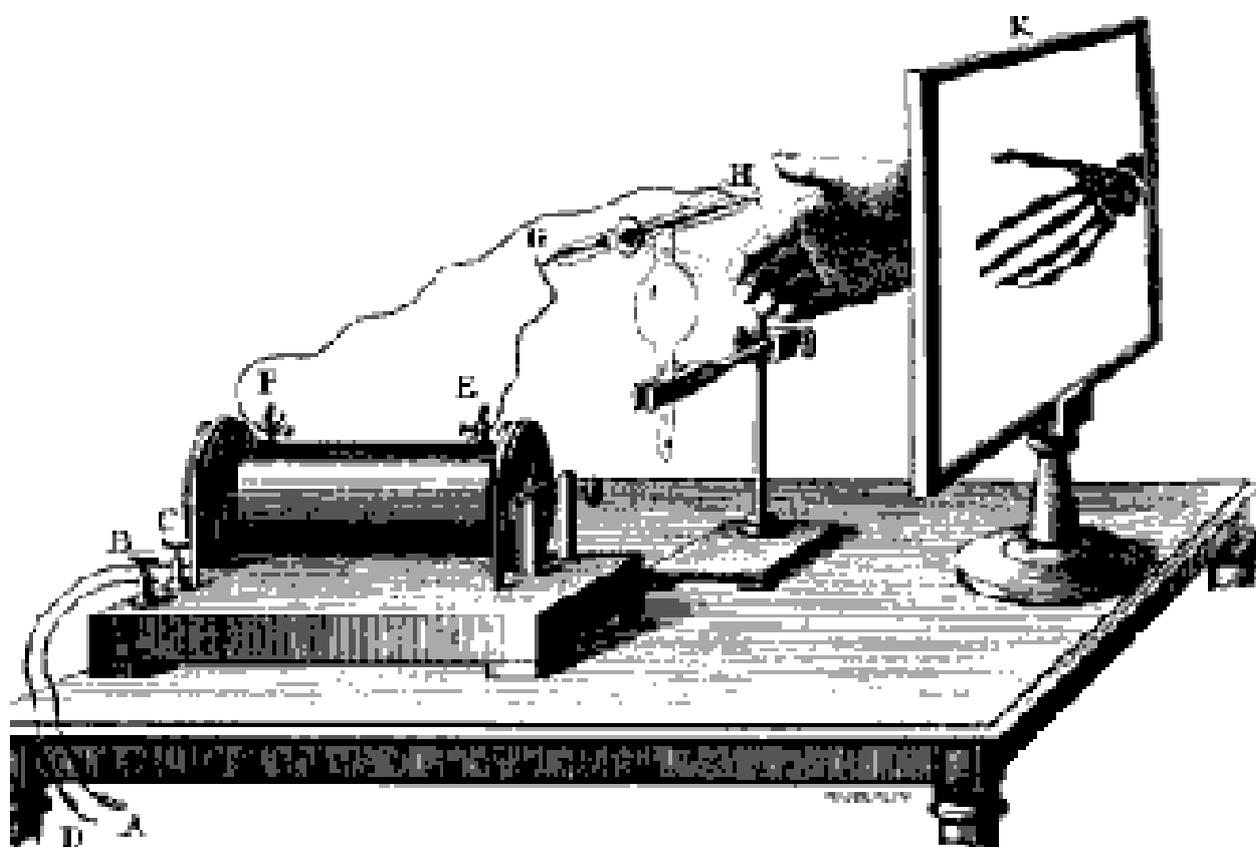


Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
Dipartimento di Fisica

IMMAGINI



**Dalle lezioni sulle immagini tenute dal Prof.
G.E. Gigante nel corso di Fisica Sanitaria**

A cura di: Francesco Altamura e Stefania Di Giacomo

A.A. 2000-2001

INDICE

| | |
|---|-----------|
| PREMESSA | 3 |
| INTRODUZIONE | 3 |
| CAP.1 ANALISI DEI PROCESSI DI FORMAZIONE DELLE IMMAGINI..... | 6 |
| 1.1 LA RADIOGRAFIA | 8 |
| 1.2 LA SCINTIGRAFIA | 10 |
| CAP.2 COME SI CARATTERIZZA UN SISTEMA D'IMMAGINI | 10 |
| 2.1 LA LINEARITA' | 10 |
| 2.2 LA <i>POINT SPREAD FUNCTION</i> (PSF) | 12 |
| 2.3 LA RISOLUZIONE..... | 13 |
| 2.4 L'ANALISI DI FOURIER | 14 |
| 2.5 IL CONCETTO DI MODULAZIONE E LA <i>MODULATION TRANSFER FUNCTION</i> (MTF) | 15 |
| 2.6 IL CONTRASTO..... | 17 |
| 2.7 LA DISTRIBUZIONE DEL NUMERO DI CONTEGGI N | 24 |
| 2.8 IL RAPPORTO DI CONTRASTO..... | 24 |
| 2.9 IL RAPPORTO SEGNALE RUMORE (<i>SIGNAL TO NOISE RATIO</i>)..... | 26 |
| 2.10 PROCEDURE DI MISURA | 26 |
| 2.11 L'EFFICIENZA QUANTICA DEL RIVELATORE | 27 |
| 2.12 IL RUMORE E LO SPETTRO DI WIENER..... | 28 |
| CAP.3 LE IMMAGINI DIGITALI | 31 |
| 3.1 IL CAMPIONAMENTO DI UN'IMMAGINE | 31 |
| 3.2 IL PROBLEMA DELL' <i>ALIASING</i> | 34 |
| 3.3 LA CONVERSIONE ANALOGICO DIGITALE..... | 34 |
| 3.4 L'IMMAGINE DIGITALE COME MATRICE DI NUMERI | 36 |
| 3.5 LA DINAMICA..... | 36 |
| 3.6 LE OPERAZIONI SULLE IMMAGINI DIGITALI | 37 |
| CAP.4 LA TEORIA DI ROSE | 43 |
| 4.1 IL MODELLO DI ROSE..... | 43 |
| 4.2 LE CURVE CONTRASTO-DETTAGLIO E LA LORO DETERMINAZIONE SPERIMENTALE..... | 44 |
| 4.3 L'ANALISI ROC (<i>RECEIVING OPERATOR CHARACTERISTIC</i>)..... | 46 |

Premessa

Vi sono molti argomenti di cui si potrebbe parlare in un corso introduttivo allo “imaging” una breve ed incompleta lista di essi è mostrata di seguito:

| | |
|--|---|
| • Processi di formazione delle immagini | • Tecniche per il miglioramento dell'immagine; |
| • Rappresentazione in forma analogica e digitale delle immagini; | • Tecniche per il restauro (ripristino) di immagini; |
| • Architettura di un sistema per l'elaborazione digitale delle immagini; | • Segmentazione: a) estrazione di contorni; b) estrazione di regioni; c) estrazione di oggetti; |
| • Tecniche di digitalizzazione delle immagini; | • Analisi di Trame e Tessiture |
| • Quantizzazione del segnale di luminosità; | • Riconoscimento di forme e di oggetti; |
| • Rappresentazione del processo di formazione come sistema lineare (OTF); | • Morfologia matematica; |
| • Rumore nelle immagini e spettri di Wiener; | • Codifica e Compressione delle immagini |
| • Valutazione della qualità delle immagini e dei sistemi di formazione di immagini; | • Valutazione della fedeltà di un'immagine. |
| • Principali classi di operazioni sulle immagini: a) di punto; b) di area; c) di quadro; | • Ricostruzione e rappresentazione di immagini tridimensionali; |
| • Richiami di Fotometria e Colorimetria; | • Tecniche di Fotogrammetria; |
| • Tecniche di rappresentazione in scale di grigi ed in falsi colori; | • Morfometria: valutazioni di aree, di profili, di volumi, etc.; |
| • Psicofisica della visione umana; | • Rappresentazione di processi dinamici (computer Vision) ; |
| • Manipolazioni sull'Istogramma | • Interpretazione delle immagini (image understanding); |
| • Filtraggio di immagini; | • Linguaggi per l'analisi di immagini; |
| • Tecniche di interpolazione; | • Data base pittorici; |

E FORSE NON E' TUTTO QUI ?

Vi è quindi una assoluta necessità di fare delle scelte che, come sempre, presentano dei gravi limiti. L'idea che ha ispirato queste dispense è quella di partire dai concetti base, in particolare dalla modellazione dei processi di formazione delle immagini, per arrivare al trasferimento dell'immagine al computer ed alla sua successiva elaborazione ed analisi. Si cercherà anche di ricostruire storicamente come sono avvenuti i fatti, perché credo che una analisi della successione temporale degli eventi sia sempre illuminante.

La redazione delle dispense è stata fatta da Francesco e Stefania, che ringrazio vivamente, ho rivisto il testo ed ho apportato alcune modifiche per cui la responsabilità degli eventuali errori, di cui anticipatamente mi scuso, è interamente mia.

Introduzione

La moderna ricerca sulle immagini parte dallo sviluppo delle tecniche fotografiche e cinematografiche ed arriva alle immagini elettroniche e alla visione con l'ausilio del calcolatore.

Attualmente quando si parla di immagini ci si riferisce in genere alle immagini digitali, ossia alla possibilità che si è avuta negli ultimi tre decenni di utilizzare computer nella acquisizione, elaborazione, rappresentazione ed archiviazione di immagini.

Negli ultimi venti anni si è venuto sviluppando un nuovo settore di ricerca che ha come oggetto la elaborazione digitale delle immagini. Inizialmente tale sviluppo è stato legato alla nuova di-

sponibilità di immagini da satellite, che si possono considerare le prime immagini digitali disponibili per scopi scientifici. Tutti forse ricorderanno le prime immagini della terra provenienti da satellite, ma più ancora le immagini dello sbarco dell'uomo sulla luna. Attualmente anche in molti settori della scienza come la meteorologia, la geografia e soprattutto l'astrofisica il lavoro con immagini digitali è di routine.

La storia delle immagini digitali in medicina è molto più breve, avendo inizio con l'introduzione delle tecniche di tomografia assistita da calcolatore, comunemente conosciute come CT (o TAC), nelle quali l'immagine si presenta sotto forma digitale. Le dimensioni di tali immagini sono però piccole, inizialmente erano 64x64 ed attualmente sono 256x256, inoltre il tipo di elaborazione richiesta è molto semplice (zoom, segmentazione ecc.).

Ma quale è il vantaggio di utilizzare un'immagine digitale? Esso può essere facilmente compendiato nella grande disponibilità di mezzi di calcolo elettronici che permettono di effettuare un gran numero di operazioni se l'immagine si presenta sotto forma di una matrice bidimensionale di numeri interi.

Per molti aspetti la moderna scienza delle immagini si è sviluppata culturalmente nell'ambito dell'ingegneria elettronica, avendo i suoi fondamenti nella teoria dei segnali aleatori. I nuovi sistemi di formazione di immagini per indagini non-invasive e lo studio delle metodologie quantitative - per rendere tali sistemi dei veri strumenti di misura - si sono sviluppati invece nell'ambito della fisica. Lo sviluppo infine delle tecniche di elaborazione delle immagini, del riconoscimento di forme e dell'archiviazione ed organizzazione dell'informazione costituita da immagini è avvenuto nell'ambito dell'informatica. Ciò ha creato spesso dei problemi di comunicazione dell'informazione scientifica ed a un disordinato sviluppo della ricerca, con la creazione di una vasta area, chiamata comunemente dello "imaging", che unisce metodi e tecniche proprie della fisica, dell'ingegneria e dell'informatica, ma anche di altri settori.

In alcuni settori di ricerca di base le immagini sono viste come risultati di misure da cui estrarre informazioni di tipo qualitativo e/o quantitativo; alcuni di essi, sicuramente l'astrofisica e la meteorologia, sono molto avanti su questa strada. Anche in molti settori di ricerca applicata, segnatamente la robotica e l'automazione, l'uso quantitativo delle immagini sta avendo un ruolo molto importante.

Fin dagli albori della scienza moderna, quindi dal rinascimento, sono stati usati in molti settori della scienza metodi grafici per riprodurre quanto veniva osservato o pensato. Basterà ricordare i codici di Leonardo o le splendide tavole astronomiche di Tycho Brahe, che sono giudicate unanimemente un metodo estremamente efficace per rappresentare osservazioni sulla posizione relativa e la traiettoria delle stelle; ma anche le tavole anatomiche, che precedono di molti anni l'avvento della fotografia e molto spesso non ne fanno sentire la mancanza. Questi lavori grafici sono il risultato sintetico di molte osservazioni e rappresentavano allora l'unico modo per registrare i risultati di osservazioni; la diffusione dei metodi grafici ha grandemente favorito lo sviluppo di alcuni campi di ricerca ed applicativi fino ai giorni nostri. Infatti, malgrado il progressivo sviluppo della fotografia, l'uso della grafica in molti settori delle scienze naturali è rimasto costante ed anzi si è sviluppato.

Con l'avvento della fotografia, all'inizio del XIX secolo, è stato possibile rivelare immagini più o meno fedeli della realtà e si è assistito ad un costante incremento dei metodi di osservazione che hanno come risultato delle immagini. Negli ultimi cento anni, a partire cioè dalla scoperta dei raggi x da parte di Röntgen, sono state sviluppate numerose tecniche che permettono di catturare immagini di parti interne di oggetti, che quindi non sono visibili.

Non è un caso che la diffusione di queste tecniche è avvenuto in maniera particolare in alcuni settori, quali la biologia e medicina ed in generale le scienze naturali, in cui da sempre si usa un approccio che si basa sul riconoscimento di segni e di forme, più che su misura quantitative e successivo sviluppo di modelli matematici.

Ad esempio questo differente approccio è alla base del diverso modo di procedere di fisici ed ingegneri da una parte, biologi e medici dall'altra. I primi infatti sono portati a sviluppare metodi di

analisi quantitativa di dati provenienti da misure e poco, o nulla metodi di analisi della forma e dei segni, i secondi invece hanno sviluppato raffinate tecniche per il riconoscimento dei segni e la correlazione tra forma e funzione. L'avvento delle immagini digitali, ossia a partire dagli anni settanta, ha permesso di sviluppare metodi matematici di elaborazione delle immagini, che in un primo periodo hanno avuto come finalità il miglioramento ed il restauro della immagine stessa vista come oggetto dello studio e successivamente di metodi di estrazione dell'informazione dalle immagini stesse. Recentemente sta maturando infatti l'idea che l'immagine acquisita sia un veicolo dell'informazione fatta di dati, segni e morfologie, per cui si sviluppano metodi che consentono l'individuazione di segni o caratteristiche strutturali dell'immagine.

Come è avvenuto in precedenza, anche con l'avvento dei calcolatori elettronici, il problema della grafica, cioè di produrre immagini digitali, è quello che ha avuto il più rapido sviluppo. Attualmente sono disponibili una gran quantità di tecniche di produzione di immagini grafiche, e di loro animazione, con l'ausilio di elaboratori elettronici. La capillare diffusione di tali metodi nei vari settori delle attività determina una crescita incredibile del settore, anche grazie all'impegno di esperti, come ad esempio gli architetti, provenienti da settori che non impiegavano in precedenza sistematicamente elaboratori elettronici.

Lo sviluppo della grafica ha permesso una larga diffusione dei sistemi di immagine sfatando anche la convinzione che non fosse possibile lavorare con immagini digitali se non si disponeva di un mainframe, ossia di un elaboratore di grosse dimensioni. La necessità infatti di sviluppare sistemi di basso costo per essere utilizzati nella grafica ha mostrato come sia possibile lavorare con immagini di dimensioni medio-piccole utilizzando schede dedicate. Ciò ha favorito la diffusione di sistemi grafici di tutte le dimensioni che rispondono a tutte le esigenze dalle più sofisticate come la produzione di carte geografiche, l'archiviazione di documenti ed il disegno meccanico assistito da calcolatore, fino alle più modeste come la produzione di semplici disegni utilizzando piccoli elaboratori e la produzione di documenti contenenti elementi grafici per una più sintetica comunicazione.

E' utile discutere della differenza che vi è tra grafica e "imaging" che pur sono settori confinanti, in quanto ambedue lavorano con immagini e spesso usano gli stessi sistemi di elaborazione. Essi sono però fortemente distinti sia nelle metodologie che nelle finalità. Infatti una immagine acquisita deriva da un processo fisico di formazione che non è controllabile completamente, come tutti i processi fisici. L'immagine quindi conterrà del rumore che non sarà presente in una immagine grafica prodotta da elaboratore, se non introdotto volontariamente utilizzando opportune tecniche. Se desideriamo infatti illudere la vista, creando un'immagine grafica che sembri una fotografia, occorre introdurre del rumore. Queste semplici considerazioni fanno capire come sia più difficile lavorare con delle immagini acquisite che con immagini prodotte sinteticamente. Va da sé che vi sono anche immagini ibride, in parte prodotte dall'autore ed in parte ricavate elaborando o ritagliando altre immagini. In particolare la compressione delle prime è un problema complesso ed in genere produce risultati meno brillanti che non nel caso di immagini grafiche; questo spiega la notevole differenza di dimensioni dei files di grafica rispetto a quelli contenenti le immagini acquisite. Ovviamente questa differenza è così evidente solo per le immagini digitali, se prendiamo invece le opere grafiche prodotte in passato esse sono caratterizzate dalla presenza di rumore dovuto al processo di produzione dell'opera grafica stessa, tratto della matita, campiture di colore ecc.

Come si è visto questo tema di ricerca è quindi molto giovane anche se, essendo stato enorme l'interesse della comunità scientifica, si sono compiuti notevoli passi in avanti in pochi anni.

Il problema è adesso quello di trasferire tali conoscenze ai giovani ricercatori e favorire uno sviluppo della ricerca più ordinato. Per fare ciò occorre individuare gli argomenti più significativi e organizzare le conoscenze in maniera più sistematica. In altre parole occorre definire le basi metodologiche per un corretto approccio quantitativo all'impiego delle immagini, viste come risultati di misure fatte in condizioni particolari.

Uno dei problemi del tradizionale approccio allo "imaging" è stato quello di voler descrivere le singole tecniche separatamente senza aver definito prima una metodologia di analisi. È vero anche che la conoscenza dei meccanismi fisici con cui le immagini si formano è indispensabile per comprendere la natura della grandezza fisica di cui si studia la distribuzione spaziale ed i limiti del sistema. Però una descrizione dei soli principi di formazione delle immagini, senza entrare nei dettagli e senza tenere presente i problemi tipici di un sistema di immagine (contrasto, risoluzione, rumore, risoluzione temporale) è inutile.

CAP.1 ANALISI DEI PROCESSI DI FORMAZIONE DELLE IMMAGINI

Nel processo di formazione di un'immagine si individuano generalmente tre componenti essenziali: una sorgente, un oggetto e un sistema di rivelazione.

Le immagini prodotte possono essere raggruppate in tre categorie principali in base al fenomeno fisico che le genera:

1) immagini in **riflessione**: il segnale (in genere è una radiazione) emesso da una sorgente viene riflesso dall'oggetto in studio e poi rivelato. Tali immagini possono essere ulteriormente suddivise in:

- *superficiali*: quando, in prima approssimazione, si può ritenere che solo la superficie dell'oggetto riflette, un esempio è dato dalla fotografia.
- *di volume*: quando vi sono delle riflessioni sulle strutture interne all'oggetto, che concorrono alla formazione dell'immagine. In alcuni casi è possibile ricostruire la coordinata relativa alla profondità discriminando temporalmente (time of flight) le riflessioni provenienti dai diversi piani (come avviene nell'ecografia con l'uso degli ultrasuoni e nei radar con quello di microonde).

Riportiamo di seguito uno schema esemplificativo della formazione di immagini in riflessione.

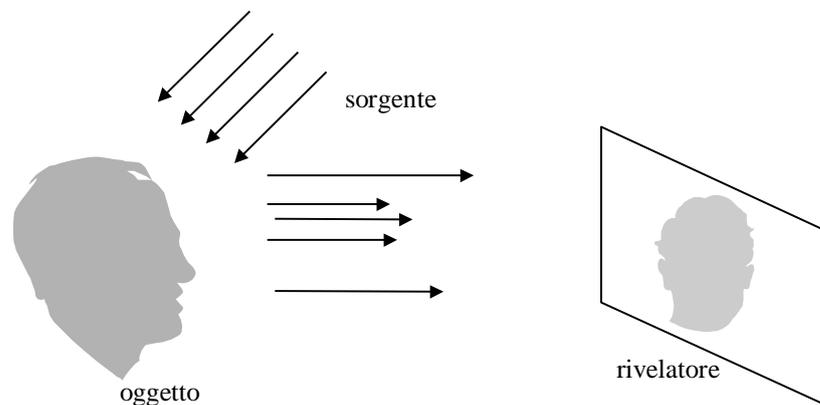


Figura 1 Schema di un sistema di immagini in riflessione

2) immagini in **trasmissione**: il segnale emesso da una sorgente viene modulato nell'attraversamento l'oggetto e poi rivelato. È questo il caso della radiografia, in cui viene registrata su di un piano la distribuzione dei fotoni (raggi X) che arrivano dalla sorgente passando per il corpo in esame.

3) immagini in **emissione**: la sorgente viene a coincidere con l'oggetto che emette direttamente il segnale. Come esempio ricordiamo la scintigrafia, in cui viene iniettato un radiofarmaco nel pa-

ziente che diventa esso stesso sorgente di raggi γ disponibili per la rivelazione. Anche le tecniche di radiometria (termografiche) sono esempi di immagini in emissione.

Schematicamente si può rappresentare un generico processo individuando i tre piani della sorgente, dell'oggetto (che può essere rappresentato, in prima approssimazione, schematicamente da un piano), e dell'immagine e definendo i tre rispettivi sistemi di coordinate, come illustrato nella seguente figura, di conseguenza valgono anche le relazioni tra coordinate:

Coordinate nei tre piani connessi da un sistema di immagine

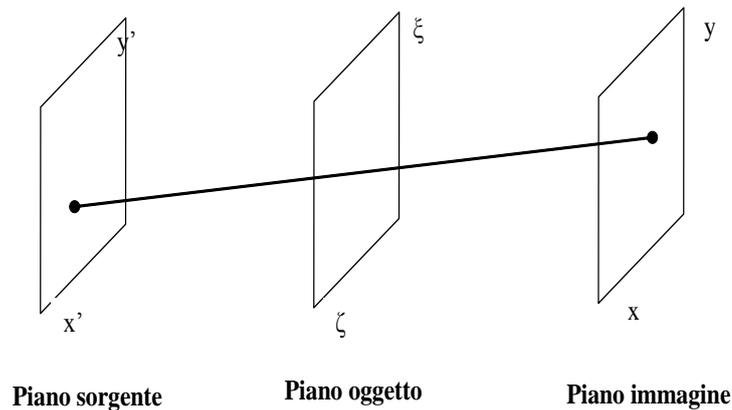


Figura 2 Sistemi di coordinate nei tre piani

$$\frac{x - x'}{y - y'} = \frac{x - \zeta}{y - \xi} = \frac{\zeta - x'}{\xi - y'}$$

Un aspetto che occorre sottolineare è l'importanza di una corrispondenza biunivoca tra punto del piano sorgente e punto del piano rivelatore. È evidente che ogni punto della sorgente emetterà in ogni direzione, investendo l'intera area del rivelatore e portando quindi in ogni punto di questo un contributo all'immagine. Pertanto si cerca di selezionare solamente una direzione per il fascio proveniente dalla sorgente; a questo provvedono i sistemi ottici (quali i sistemi di lenti) che permettono di selezionare in pratica solo un piccolo angolo solido.

Storicamente lo sviluppo dei sistemi di immagine è avvenuto utilizzando il principio della camera oscura (che in seguito denomineremo del *pin-hole* termine più comunemente impiegato nella letteratura tecnica), in cui si utilizzano i soli piano oggetto e immagine introducendo al centro un piano su cui viene praticato un piccolo foro.

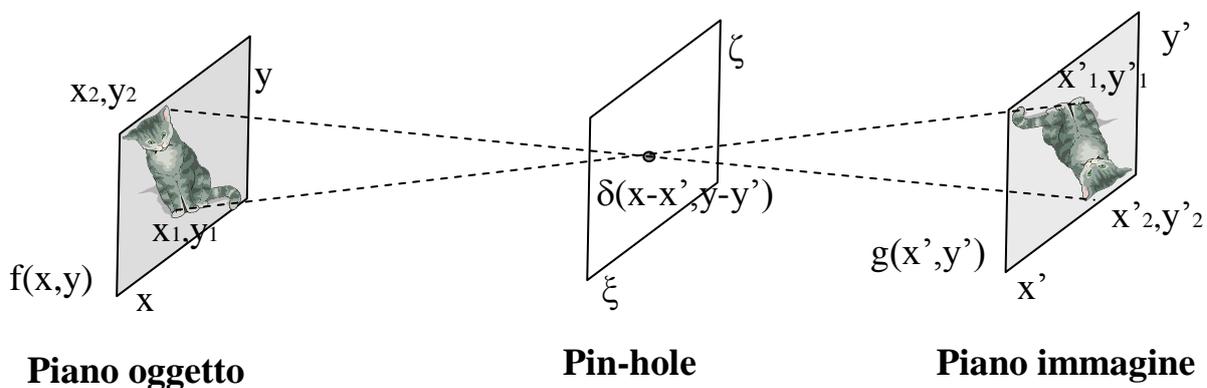


Figura 3 Schema del *pin-hole*

Nella formazione di un'immagine possono essere usate tre modalità di scansione: di punto, di linea e di area. Ovviamente passando dalla modalità di punto a quella di area, i tempi di acquisizione sono drasticamente ridotti. In genere il contrasto, come vedremo in seguito, risulta peggiore.

Modalità di acquisizione di un'immagine

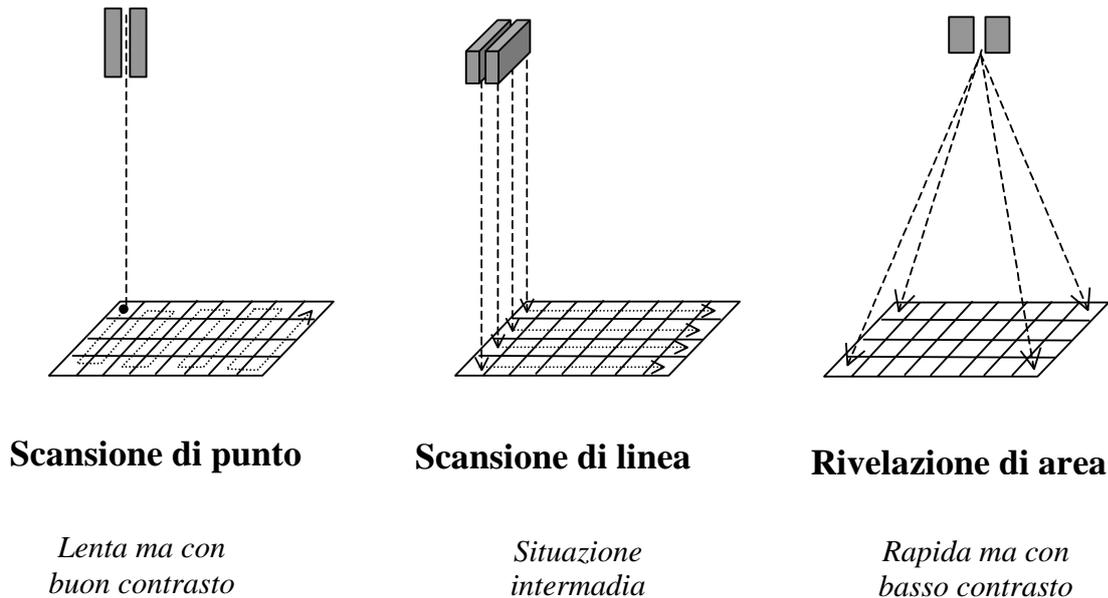


Figura 4 Modalità di acquisizione di immagini

1.1 LA RADIOGRAFIA

Come già detto la radiografia è un esempio di formazione di immagine in trasmissione. E' importante sottolineare che la radiazione di cui si dispone deve essere molto penetrante (con un indice di rifrazione nel mezzo circa 1) in modo da permettere di evidenziare l'interno dell'oggetto da studiare e non solo la superficie.

Supponiamo di avere a disposizione una sorgente di raggi X puntiforme; in questo caso la direzionalità del fascio viene assicurata dalla sorgente stessa e ad un punto del piano ξ, ζ dell'oggetto corrisponde un punto x', y' dell'immagine.

Cerchiamo ora di modellizzare il processo servendoci della figura seguente e assumendo valide le leggi dell'ottica geometrica.

Definiamo le funzioni:

- $f(x, y)$: che fornisce l'emissione della sorgente nel punto x, y (ad esempio l'intensità luminosa);
- $g(x', y')$: che rappresenta l'immagine nel punto x', y' .

L'oggetto modula i fasci provenienti dai punti x, y della sorgente producendo un'immagine nel punto x', y' come espresso dalla seguente formula che può essere ritenuta l'equazione di base della radiografia:

$$g(x', y') = \varepsilon \iint f(x, y) e^{-\int \mu(\xi, \zeta, \tau) dt} dx dy \quad (1)$$

dove la variabile $\mu(\xi, \zeta, \tau)$ rappresenta il coefficiente di assorbimento lineare del campione nel punto ξ, ζ, τ , e l'integrale è sul percorso (variabile t) del fascio proveniente dal punto x, y della

sorgente¹. Nel caso particolare di una sorgente puntiforme di coordinate x_0, y_0 la $f(x,y)$ si riduce a una funzione proporzionale a una $\delta(x_0, y_0)$ e un solo punto dell'oggetto contribuisce alla formazione dell'immagine in un punto x', y' dell'immagine.

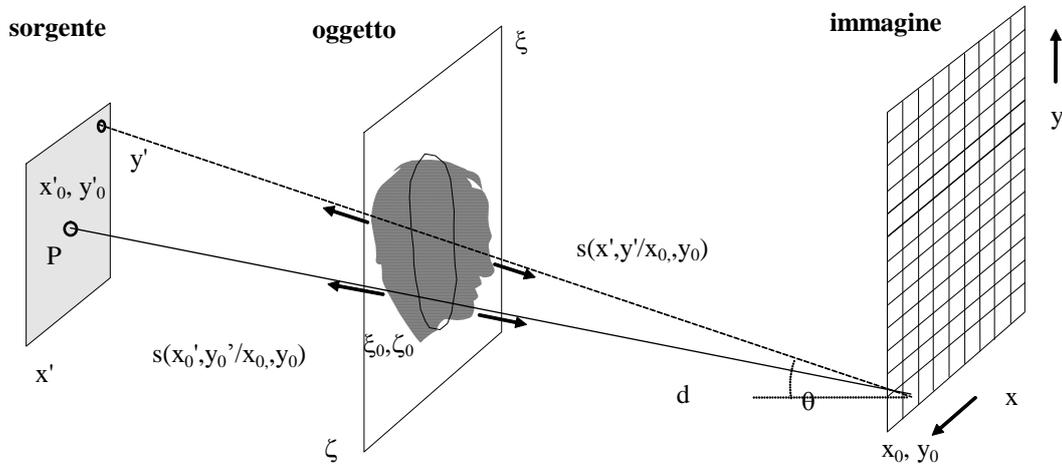


Figura 5 Schema di un sistema radiografico

Per una sorgente estesa, come è sempre nel caso reale, il sistema è limitato dall'impossibilità di coniugare due punti di oggetto e rivelatore: ad un certo punto dell'oggetto corrisponde infatti un'area e non un punto del rivelatore ed è questo che genera il cosiddetto *effetto penombra* nell'immagine.

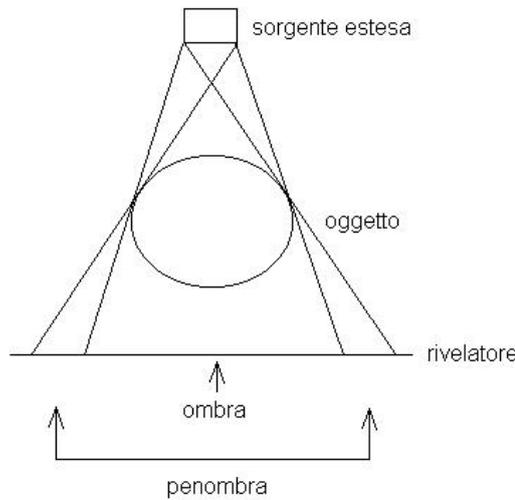


Figura 6 Effetto penombra

Considerando il sistema lineare, la (1) può essere approssimata nella forma seguente:

$$g(x', y') = \iint f(x, y) h(x, y; x', y') dx dy \quad (2)$$

dove la funzione $h(x,y;x',y')$ è la risposta impulsiva del nostro sistema di formazione. Quanto appena detto può essere esteso ad un qualsiasi tipo di immagine (in trasmissione, in riflessione, in emissione) e si può quindi affermare in generale che un processo di formazione è rappresentabile mediante un integrale di cui la funzione $h(x,y; x',y')$ rappresenta il nucleo.

¹ Viene trascurata la radiazione emessa dal corpo irraggiato.

1.2 LA SCINTIGRAFIA

Nella scintigrafia vediamo la proiezione della sorgente sul rivelatore (o un suo elemento) lungo una linea che viene definita dal collimatore, il quale seleziona un angolo solido in una particolare direzione. Ovviamente si deve tener conto dell'attenuazione all'interno del corpo. Con riferimento alla figura:

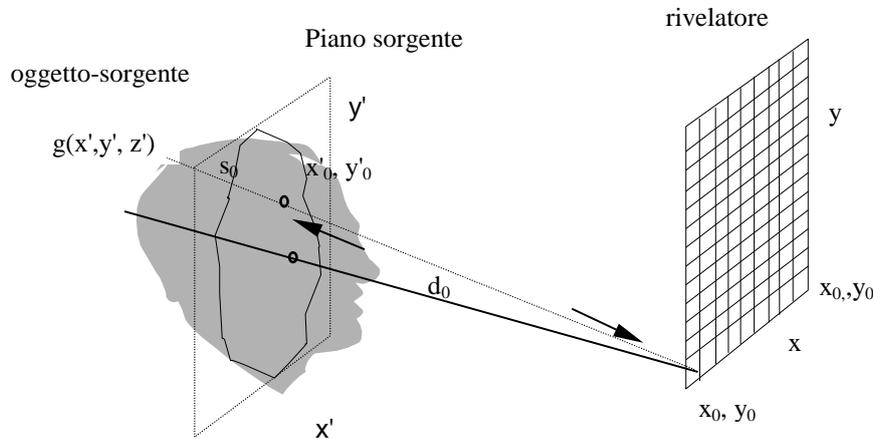


Figura 7 Schema di immagini in emissione.

possiamo scrivere:

$$g(x', y') = \iint \left(\int \frac{f(x, y, s)}{(d_0 + s)^2} e^{-\int \mu(s') ds'} ds \right) dx dy = \iint f(x, y) h(x, y; x', y') dx dy \quad (3)$$

dove $f(x, y, s)$ rappresenta l'intensità dell'onda sferica emessa nel punto (x, y, s) ; essa è poi pesata dall'assorbimento lungo il cammino che separa il punto (x, y, s) interno all'oggetto dal punto $(x, y, 0)$ sulla superficie dell'oggetto e successivamente divisa per il quadrato della distanza $d_0 + s$ che separa il punto sorgente dal rivelatore.

CAP.2 COME SI CARATTERIZZA UN SISTEMA D'IMMAGINI

2.1 LA LINEARITA'

E' interessante chiedersi se un processo di formazione può essere considerato lineare; per capirlo basta valutare se per il nostro sistema di formazione è valido il principio di sovrapposizione.

Supponiamo ad esempio di avere a disposizione due sorgenti individuate dalle funzioni $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ e di farne un'immagine prima separatamente, ottenendo $g_1(x', y')$ e $g_2(x', y')$, e successivamente insieme, ottenendo dalla funzione $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$ la funzione $g(x', y')$: se il sistema è lineare deve risultare

$$g(x', y') = g_1(x', y') + g_2(x', y') \quad (4)$$

Questa proprietà è raramente rispettata dai sistemi di immagine; basta pensare come sia impossibile fotografare due oggetti prima separatamente e poi insieme e ottenere che la terza fotografia sia l'esatta somma delle precedenti. In particolare ciò può essere vero se si ha l'accortezza di cambiare la pellicola ogni volta, in caso contrario il risultato è sicuramente negativo perché la ri-

sposta della pellicola non è lineare. L'andamento della densità ottica in funzione del logaritmo dell'esposizione è rappresentato dalla figura seguente e la curva presenta una zona intermedia, intorno al valore di densità ottica OD=2, dove il coefficiente angolare può solo approssimativamente essere considerato costante.

Ricordiamo la formula che permette di ottenere la densità ottica di una lastra in funzione dell'intensità I_0 della luce incidente sul film e di quella trasmessa I :

$$OD = \log \frac{I_0}{I}$$

Al concetto di linearità di risposta si associa spesso quello di invarianza alle traslazioni, che nel caso delle immagini ha notevoli conseguenze pratiche. Supponiamo che il sistema di formazione sia tale che noi poniamo una sorgente puntiforme in due punti (successivamente o simultaneamente): se otteniamo la stessa immagine traslata nello spazio, allora possiamo affermare che il nostro sistema è invariante alle traslazioni. In questo caso l'integrale che rappresenta il processo può essere scritto come la convoluzione

$$g(x', y') = \iint f(x, y)h(x - x', y - y')dxdy \quad (5)$$

dove si è considerato che in questo caso la funzione $h(x,y;x',y')$ dipende solamente dalle differenze $x-x'$ e $y-y'$.

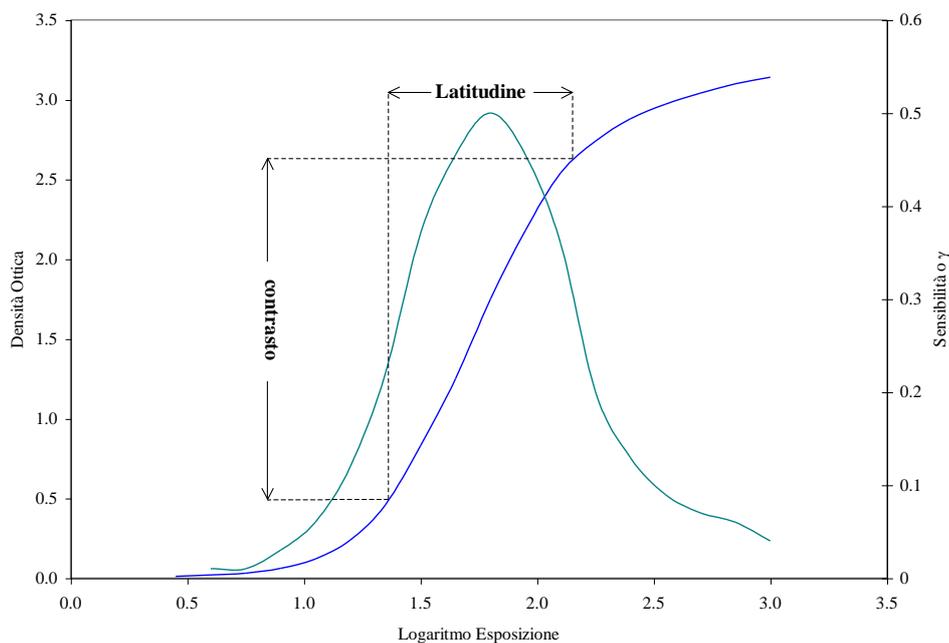


Figura 8 Andamento della densità ottica in una lastra fotografica

L'invarianza alle traslazioni ha in questo contesto un significato particolare, legato alle distorsioni spaziali delle immagini. Un problema importante è infatti l'incapacità dei sistemi di formazione di riprodurre fedelmente un oggetto a causa di "difetti" che nel caso dei sistemi ottici prendono il nome di *aberrazioni*. Tali difetti possono produrre distorsioni locali della risposta, ovvero in una sola direzione, o anche globali, cioè dell'intera immagine.

Riportiamo di seguito gli esempi più rilevanti secondo la classificazione di Seidel.

| | | |
|---------------------|---------|----------|
| Difetto della lente | oggetto | immagine |
|---------------------|---------|----------|

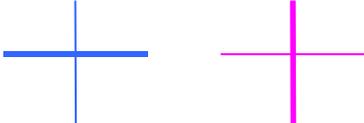
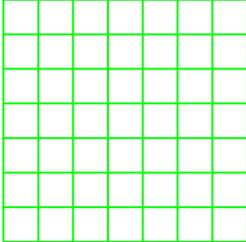
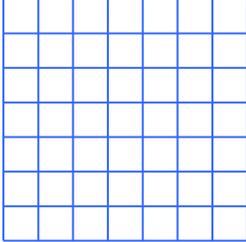
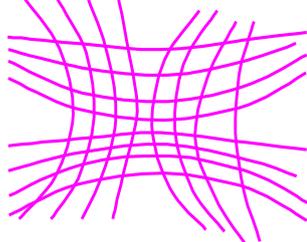
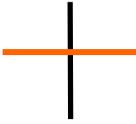
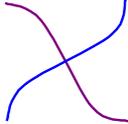
| | | |
|-------------------------------------|---|---|
| Aberrazione sferica |  |  |
| Astigmatismo |  |  |
| Distorsioni puntuali (comma-shaped) |  |  |
| Distorsione a botte (barrel) |  |  |
| Distorsione a cuscino |  |  |
| Rotazione non uniforme |  |  |
| Aberrazione cromatica |  |  |

Figura 9 Tipiche aberrazioni di una lente (classificazione di Seidel)

2.2 LA POINT SPREAD FUNCTION (PSF)

Supponiamo di acquisire l'immagine di un singolo punto: in questo caso la (5) può essere riscritta nella maniera seguente:

$$g(x', y') = \iint \delta(x, y) h(x - x', y - y') dx dy \quad (6)$$

dove $\delta(x, y)$ è l'impulso di Dirac nel piano x, y .

L'immagine così ottenuta prende il nome di *Point Spread Function (PSF)* o *risposta impulsiva* del sistema.

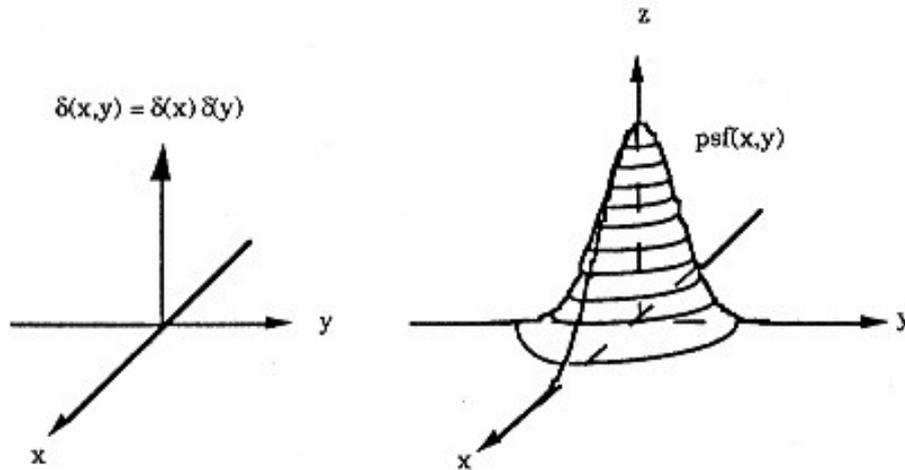


Figura 10 PSF

Osserviamo che, invertendo il significato delle due funzioni all'interno dell'integrale, possiamo considerare $h(x,y)$ come sorgente e $\delta(x-x',y-y')$ come l'azione del sistema di formazione: in questo caso un punto dell'immagine proviene da un unico punto sorgente, come se quest'ultima fosse vista attraverso un piccolissimo foro (pinhole).

2.3 LA RISOLUZIONE

Supponiamo di avere a disposizione un sistema di formazione ideale: mi aspetto quindi che ad un punto x,y corrisponda biunivocamente un punto x',y' . Per ottenere questo risultato è evidente che nella (4) si dovrà considerare $h(x-x',y-y') = \delta(x-x',y-y')$.

A questo punto, prendendo un impulso $f(x,y) = \delta(x,y)$ si otterrà come immagine sempre un impulso $g(x',y') = \delta(x',y')$. In una dimensione si avrà quindi:

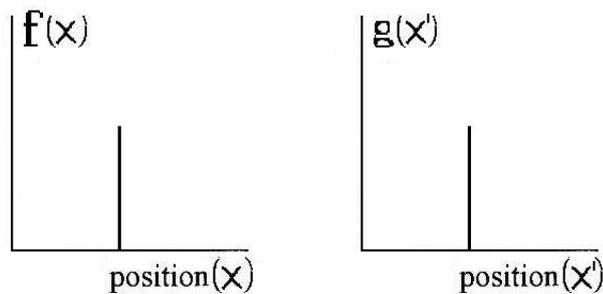


Figura 11 Risposta di un sistema ideale

Qualora invece il mio processo di formazione non si possa ritenere ideale, la funzione h non sarà rappresentabile come una $\delta(x-x',y-y')$ e il sistema risponderà ad una sollecitazione impulsiva riproducendo in uscita la forma del nucleo $h(x-x',y-y')$. Considerando l'immagine $g(x',y')$ ottenuta in questo caso, è possibile definire la risoluzione del sistema per una data direzione come la larghezza a mezza altezza (FWHM) della curva ottenuta dall'andamento della funzione g rispetto alla variabile scelta.

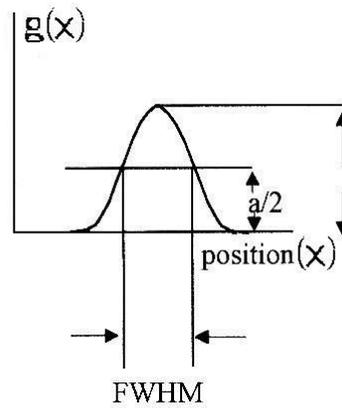


Figura 12 Risoluzione

2.4 L'ANALISI DI FOURIER

Supponiamo di avere a che fare con un sistema lineare e di poter quindi scrivere l'equazione

$$g(x', y') = \iint f(x, y)h(x - x', y - y')dxdy \quad (7)$$

Possiamo allora affermare che la trasformata di fourier dell'immagine è legata alla trasformata di Fourier delle funzioni f ed h. Più precisamente, riconoscendo nell'espressione (7) un prodotto di convoluzione, è immediato applicare il teorema della convoluzione ottenendo la seguente espressione:

$$G(\omega_x, \omega_y) = F(\omega_x, \omega_y) \cdot H(\omega_x, \omega_y) \quad (8)$$

dove con le lettere maiuscole abbiamo indicato le trasformate delle funzioni; ad esempio si ha:

$$G(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint g(x', y') e^{-i(\omega_x x' + \omega_y y')} dx' dy' \quad (9)$$

Osserviamo che nello spazio delle frequenze non ha senso distinguere le coordinate in riferimento ai diversi piani del sistema di immagini, mentre il piano ω_x, ω_y è unico. Cerchiamo di capire meglio il significato di queste frequenze spaziali. Consideriamo un passo (pitch) Δx , ad esempio la distanza fissa tra due atomi nel reticolo cristallino di un solido: tale distanza rappresenta la periodicità spaziale, mentre l'espressione $1/\Delta x$ può essere riguardata come la frequenza spaziale del solido. E' possibile quindi definire in generale tre frequenze spaziali, una per ogni direzione dello spazio:

$$v_x = 1/\Delta x;$$

$$v_y = 1/\Delta y;$$

$$v_z = 1/\Delta z;$$

e le rispettive pulsazioni:

$$\omega_x = 2\pi/\Delta x;$$

$$\omega_y = 2\pi/\Delta y;$$

$$\omega_z = 2\pi/\Delta z;$$

La misura della frequenza spaziale è espressa in coppie di linee in unità di lunghezza (ad esempio Lp/mm), o in numero di punti per unità di lunghezza (DPI).

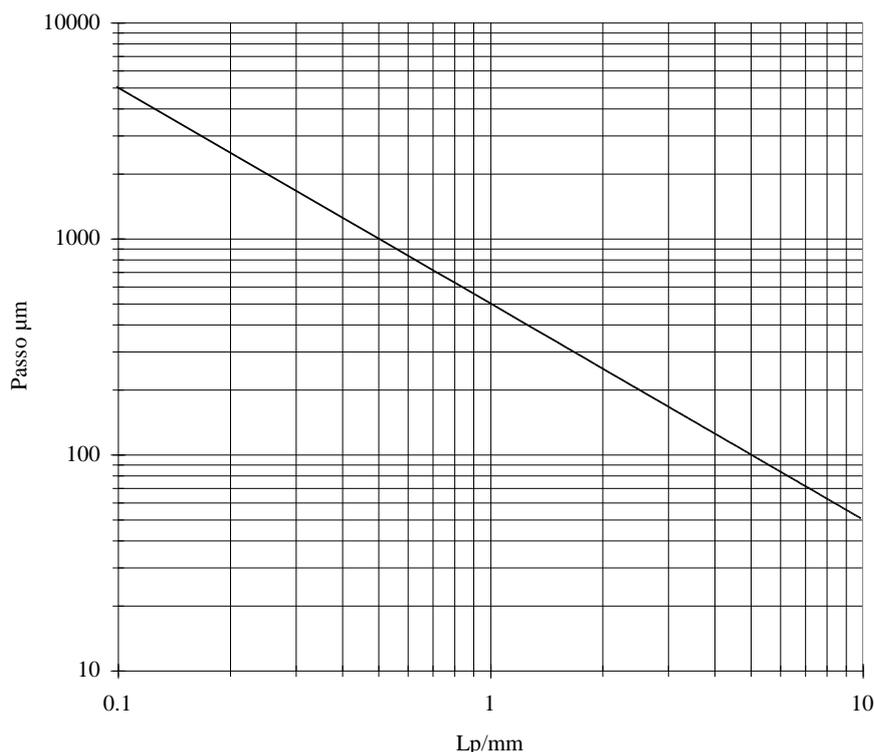


Figura 13 Grafico della relazione tra frequenza e passo.

E' evidente che eventuali simmetrie nello spazio ordinario rendono superfluo l'utilizzo di tutte e tre le frequenze.

Ritornando al sistema di formazione delle immagini, ci si presentano due possibilità che semplificano il processo:

- considerare un oggetto uniforme;
- considerare un oggetto puntiforme, ovvero rappresentabile da una δ di dirac.

Vediamo perché è preferibile il secondo caso. Avendo a disposizione un oggetto $f(x,y)$ rappresentabile da una $\delta(x,y)$, la trasformata di Fourier dell'immagine sarà direttamente la trasformata della funzione h , ovvero della PSF, come ottenibile immediatamente dalla (8) (ricordando che la trasformata della δ è costante). Pertanto sarà possibile caratterizzare il sistema semplicemente studiando lo spettro della risposta impulsiva.

2.5 IL CONCETTO DI MODULAZIONE E LA MODULATION TRANSFER FUNCTION (MTF)

Finora abbiamo analizzato solamente la risposta in frequenza, ma non la risposta in ampiezza.

E' importante a questo punto introdurre il concetto di modulazione, che apparirà molto semplice a chi già conosce approssimativamente il funzionamento di un televisore.

Supponiamo di avere in ingresso al nostro apparecchio un segnale sinusoidale, ad esempio lungo l'asse x , con un "passo" (cioè un periodo spaziale) pari a Δx e di ampiezza A_i ; il sistema produrrà in uscita un segnale di uguale frequenza ma in generale di ampiezza diversa A_o . La modulazione a quella frequenza $\omega_x = 2\pi / \Delta x$ sarà data dall'espressione

$$M(\omega_x) = \frac{A_o}{A_i}$$

dove abbiamo trascurato un eventuale offset.

Si potrà quindi caratterizzare il sistema studiando come varia la modulazione a diverse frequenze.

Ritorniamo ora al processo di formazione delle immagini e chiediamoci, presa la funzione di trasferimento h , come possa essere l'andamento della sua trasformata nello spazio delle frequenze H o, più precisamente, del suo modulo $|H|$. Dall'equazione (8) si nota subito che tale modulo svolge esattamente il ruolo di funzione di modulazione, essendo infatti pari al rapporto tra il modulo di G (trasformata del segnale in uscita) e quello di F (trasformata del segnale in ingresso), cioè in pratica tra le due ampiezze, al variare della frequenza.

Un sistema di immagini si comporta in genere come un "passa basso", ovvero seleziona le basse frequenze. Ciò che distingue un'immagine reale da una grafica è infatti proprio l'incapacità di riprodurre esattamente i bordi degli oggetti e i bordi sono proprio i punti in cui le alte frequenze spaziali sono dominanti. Pertanto l'andamento di $|H|$ in funzione di ω potrà variare ma sarà sicuramente decrescente all'aumentare della frequenza. E' chiaro che si ha una definizione infinita quando $|H|$ ha un andamento piatto, cioè il sistema è in grado di riprodurre in modo perfetto anche la più piccola variazione nell'oggetto. Ed è altrettanto immediato capire che il limite nella definizione implica un uguale limite nella risoluzione, impedendo in pratica di distinguere due oggetti vicini al di sotto di una certa distanza minima.

Vogliamo sottolineare che la funzione h è senza dubbio reale positiva, essendo la risposta impulsiva del sistema e rappresentando quindi l'immagine nel caso particolare di uno stimolo impulsivo; pertanto rappresenta una grandezza misurabile (si potrebbe pensare di realizzare un esperimento con un led piccolo a piacere) e di conseguenza è possibile, per un dato sistema di formazione, ricavare l'andamento di $H(\omega_x, \omega_y)$, che sarà in generale una funzione complessa e che prende il nome di *Optical Transfer Function (OTF)*. Indicando con H_r e H_i rispettivamente le parti reali e immaginarie di H , è possibile definire il suo modulo e la sua fase come

$$|H| = \sqrt{H_r^2 + H_i^2} \quad \Phi = \frac{H_i}{H_r}$$

Finora però abbiamo parlato solo di modulo; ci chiediamo: quando è importante la fase? Sottolineiamo innanzitutto che la fase di cui stiamo parlando è una fase spaziale e non temporale. Problemi di fase sono tipici delle immagini elettroniche (ad esempio un'immagine televisiva) e più in generale si possono presentare ogni qual volta esista una sorta di temporizzazione del processo, cioè qualora l'immagine nasca da contributi successivi di segnali che percorrono cammini differenti; appare chiaro, ad esempio, come in un televisore i diversi contributi dei singoli segnali debbano presentare una ben precisa differenza di fase per non produrre spostamenti su alcune righe dell'immagine.

Pensiamo ora alla radiografia. Iniziamo ricordando che un processo radiologico è stocastico e la rivelazione di un certo numero di fotoni è affetta da un errore statistico ineliminabile, dovuto al fatto che si utilizzano dei contatori. Sempre statisticamente l'immagine sarà costruita dalle differenze nel numero di fotoni che raggiungono il rivelatore, dopo aver attraversato spessori più o meno diversi. E' chiaro però che in un tale sistema non può esistere un problema di fase, visto che non vi è una temporizzazione. Usando un'espressione tipica dell'elettronica, possiamo dire che non abbiamo un *trigger* o, in altre parole, non esiste un'origine spaziale che possa far distinguere la fase dei contributi successivi alla formazione dell'immagine: lo sfasamento di ciascun contributo trae origine cioè esclusivamente dal sistema che impone a ciascun fotone un diverso percorso, ma non ha niente a che vedere con la statistica dei fotoni. Perché un sistema sia sensibile alla fase è necessario un ordine spaziale preciso, che non c'è mai in un'immagine di origine stocastica. Alla luce di quanto detto è chiaro che, per quanto riguarda la radiografia, è sufficiente limitarsi allo studio della *Modulation Transfer Function (MFT)*, tralasciando quello della fase della funzione H .

Al contrario, un esempio importante in cui la fase ha un ruolo fondamentale è l'ecografia, nella quale l'immagine si crea proprio dalla sovrapposizione di segnali che giungono al rivelatore con fasi differenti, cioè in tempi diversi: si tratta infatti di ultrasuoni che vengono prodotti da tessuti più o meno profondi nel volume in esame (*field of view*) all'interno del paziente. Per quanto osservato sopra, l'andamento della MTF sarà decrescente con la frequenza.

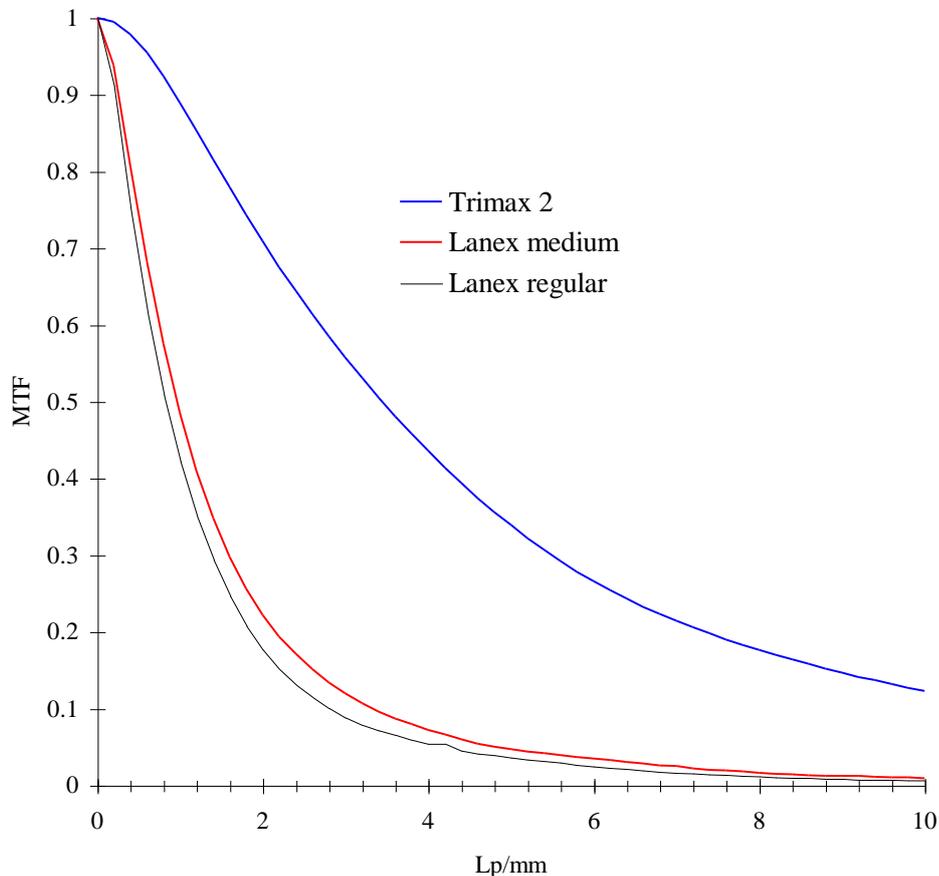


Figura 13 MTF di tre pellicole comunemente utilizzate in radiografia medica

In pratica la MTF descrive il contrasto, prodotto da un sistema d'immagine in funzione della frequenza spaziale dell'oggetto (segnale d'ingresso). Il contrasto con il quale un oggetto è rappresentato, infatti, decresce quando l'oggetto diventa più piccolo, anche se il suo spessore rimane invariato.

2.6 IL CONTRASTO

Per dare una definizione di contrasto esaminiamo subito la seguente figura:

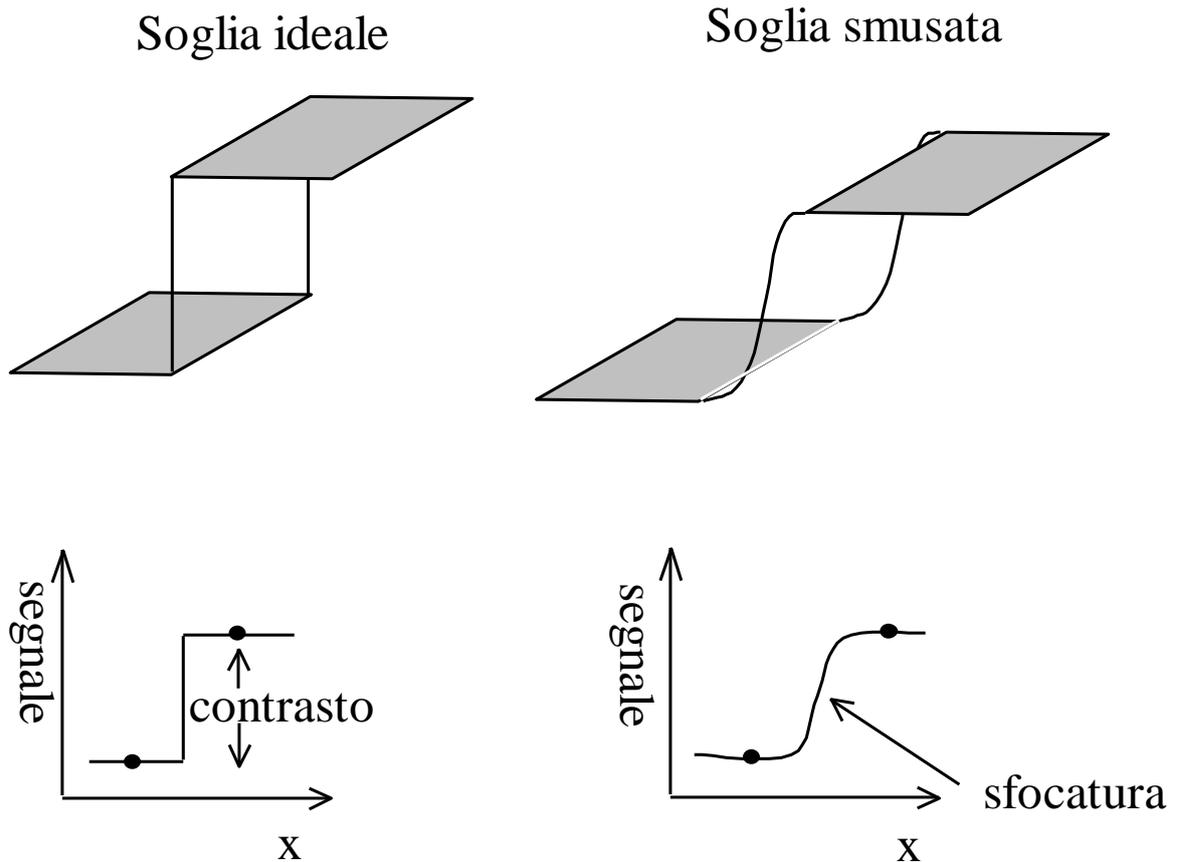


Figura 14 Contrasto e sfocatura in un'immagine di una soglia, a sx il caso ideale a destra quello reale.

Supponendo di misurare conteggi, il contrasto è definito come la differenza di valori in due punti distinti dell'immagine, ad esempio tra la parte interna di un oggetto ed un punto dello scenario e può essere quindi esprimibile come:

$$C = N' - N ;$$

A questo punto è necessario però fare un'importante distinzione fra due diversi tipi di contrasto:

- 1) il *contrasto fisico*
- 2) il *contrasto radiologico*

In generale possiamo dire infatti che un sistema di immagini è composto schematicamente da un processo di acquisizione e da un processo di formazione. Il primo genera un contrasto di tipo fisico (ad esempio gli asa di una pellicola fotografica sono legati direttamente al processo fisico di creazione dell'immagine), mentre il secondo è originato in pratica dalle differenze di assorbimento cui è sottoposta la radiazione in presenza di diversi materiali da attraversare. Definendo μ e μ' due coefficienti di attenuazione lineare diversi di due materiali attraversati di spessore x e x' e N_0 il numero di fotoni incidenti, possiamo scrivere, utilizzando le leggi dell'attenuazione:

$$N' = N_0 e^{-\mu'x'}$$

$$N = N_0 e^{-\mu x}$$

$$C = N' - N$$

Se per riprodurre un oggetto utilizziamo successivamente due fasci di raggi X di diversa energia, è ovvio che rimarrà inalterato il contrasto fisico mentre si avrà una differenza dovuta al contrasto

radiologico. Il contrasto radiologico sarà quindi uno dei parametri fondamentali che andrà tenuto in considerazione nella scelta delle modalità di acquisizione.

Per intervenire sul contrasto fisico è necessario modificare alla base il sistema di formazione. Ritornando all'esempio di una pellicola fotografica, analizziamo il grafico della densità ottica in funzione del logaritmo dell'esposizione. E' possibile intuire in tal modo il significato di due grandezze fondamentali: la dinamica, ovvero la massima differenza possibile tra il minimo e massimo dell'OD, e la sensibilità, definibile come il minimo valore di esposizione per il quale si ottiene una risposta sulla pellicola.

Come mostrato nella Figura 8, la curva di annerimento parte da un valore poco superiore allo zero (corrispondente al velo di fondo), inizialmente ha un andamento piatto (cioè piccole esposizioni non producono un significativo aumento di densità), quindi, superata una certa esposizione di soglia, inizia a salire dapprima gradualmente e successivamente con andamento rettilineo. In questa regione la densità ottica è proporzionale al logaritmo dell'esposizione ed è indicata come regione della corretta esposizione, poiché è lavorando in questo tratto della curva che si hanno le informazioni più dettagliate. Oltre questa zona la pendenza della curva diminuisce, fino a raggiungere un valore di saturazione (plateau) in corrispondenza della densità ottica massima D_{max} . La pendenza della curva caratteristica è rappresentata dalla curva gamma, il cui massimo è in corrispondenza della regione di corretta esposizione: utilizzare dei parametri (kVp, mAs, filtrazione, etc.) che consentono di lavorare in questa zona è importante ai fini dell'ottimizzazione dell'esame radiologico, perchè si ottiene la massima informazione diagnostica con la minima esposizione del paziente.

Una emulsione radiografica, sottoposta all'esposizione di radiazione elettromagnetica, subisce una ionizzazione dei granuli di alogenuro d'argento che, in seguito al processo di sviluppo, determinano l'annerimento della pellicola; la **trasparenza T** della pellicola è data dal rapporto tra l'intensità della luce trasmessa I_t e l'intensità incidente I_0 di un fascio luminoso con T che può assumere valori compresi tra 0 e 1. L'annerimento di una pellicola si esprime in funzione della densità ottica, definita come il logaritmo in base 10 dell'opacità O:

$$OD = \log_{10} \left(\frac{I_0}{I} \right)$$

La curva caratteristica riassume le diverse proprietà fotografiche della pellicola ed il suo andamento è fortemente influenzato anche dal tipo di trattamento cui è stata sottoposta.

E' possibile risalire, sotto l'assunzione di alcune ipotesi semplificative, alla seguente relazione tra densità ottica ed esposizione X della pellicola:

$$OD = OD_{max} (1 - \exp(-kX))$$

dove k è una costante e D_{max} , la densità ottica massima ottenibile, è legata ai parametri costruttivi del film secondo la **legge di Nutting**:

$$OD_{max} = 0.434 \gamma \sigma$$

con γ pari al numero di grani per unità di area e σ corrispondente alla sezione di un grano dopo il processo di sviluppo. La dimensione tipica di un grano sviluppato è di $2.5 \mu m$, cosicché ad una densità ottica massima di 3.0 corrispondono 1.1×10^8 grani/cm².

La curva H&D può essere caratterizzata in base ad un numero ridotto di parametri che sono così definiti:

- a) **Base + velo**: densità ottica di una pellicola non impressionata dopo lo sviluppo, dovuta esclusivamente all'opacità del supporto ed al velo chimico, cioè a quei granuli dell'emulsione che si sviluppano indipendentemente dall'essere stati esposti;

- b) Contrasto: capacità di far risaltare le differenze di densità derivanti da diverse esposizioni. Il contrasto G della pellicola radiografica rappresenta la pendenza della curva caratteristica nella regione lineare ed è calcolato come la tangente dell'angolo formato con l'asse delle ascisse dal prolungamento del tratto rettilineo (costante Γ). Più frequentemente viene calcolato il contrasto medio, $\langle G \rangle$, cioè la pendenza media della curva che passa per i punti $D1 = \text{base} + \text{velo} + 0.25$ e $D2 = \text{base} + \text{velo} + 2.00$. L'utilità del concetto di contrasto medio sta nel fatto che, operando nella regione lineare della curva caratteristica e per una data condizione di rumore, maggiore è il contrasto maggiore risulta il contenuto del segnale e quindi il segnale stesso è più facilmente rivelabile.
- c) Latitudine di esposizione: intervallo di esposizione corrispondente al tratto rettilineo della curva, cioè alla regione di corretta esposizione. Essa è quindi in rapporto inverso con il contrasto.

La curva caratteristica si determina sperimentalmente esponendo la pellicola alla luce visibile di un sensitometro graduato con caratteristiche spettrali analoghe a quelle dello schermo di rinforzo utilizzato (blu-ultravioletto o verde). In Figura 15 è mostrato un film esposto con un sensitometro a 21 gradini caratterizzato da una variazione del logaritmo di esposizione tra uno step e l'altro di 0.15; le densità ottiche dei singoli gradini vengono misurate con un densitometro e i valori ottenuti si riportano su un grafico in funzione del numero di gradino corrispondente. La densità ottica relativa al primo gradino è il valore del parametro base + velo. Poiché la curva caratteristica è costruita per punti, per determinare il contrasto medio e la latitudine di contrasto, si deve eseguire un'interpolazione per ricavare $D1$ e $D2$.

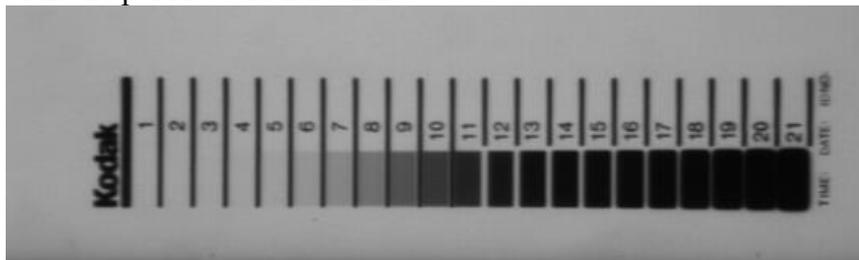


Figura 15. Pellicola radiografica esposta alla luce di un sensitometro graduato a 21 gradini.

Per aumentare la dinamica e disporre pertanto di un intervallo più ampio di valori. incrementando pertanto anche il contrasto, sarebbe necessario disporre di una pellicola migliore, con dei grani più grandi (anche se questo ovviamente va a diminuire la risoluzione del mio sistema!); aumentare gli ASA invece servirebbe solamente ad aumentare la sensibilità della pellicola, ovvero a traslare più a sinistra la curva nel grafico sopra, senza apportare nessun miglioramento per quanto riguarda il contrasto.

E' possibile invece cercare di migliorare il contrasto radiologico attraverso piccoli "trucchi": lo iodio che si fa ingerire ai pazienti prima di un esame si fissa ad esempio in misura più grande nella tiroide e l'immagine di quest'ultima risulta in tal modo molto più contrastata rispetto ai tessuti circostanti; abbassare la tensione di alimentazione di un tubo a raggi X può far raggiungere lo stesso scopo per evidenziare le ossa rispetto ai muscoli in una lastra radiologica: se analizziamo l'andamento del coefficiente di assorbimento (*Moss Absorption Coefficient*) per i diversi tessuti al variare dell'energia della radiazione penetrante, ci si accorge infatti che si ha una maggiore diversificazione a basse energie.

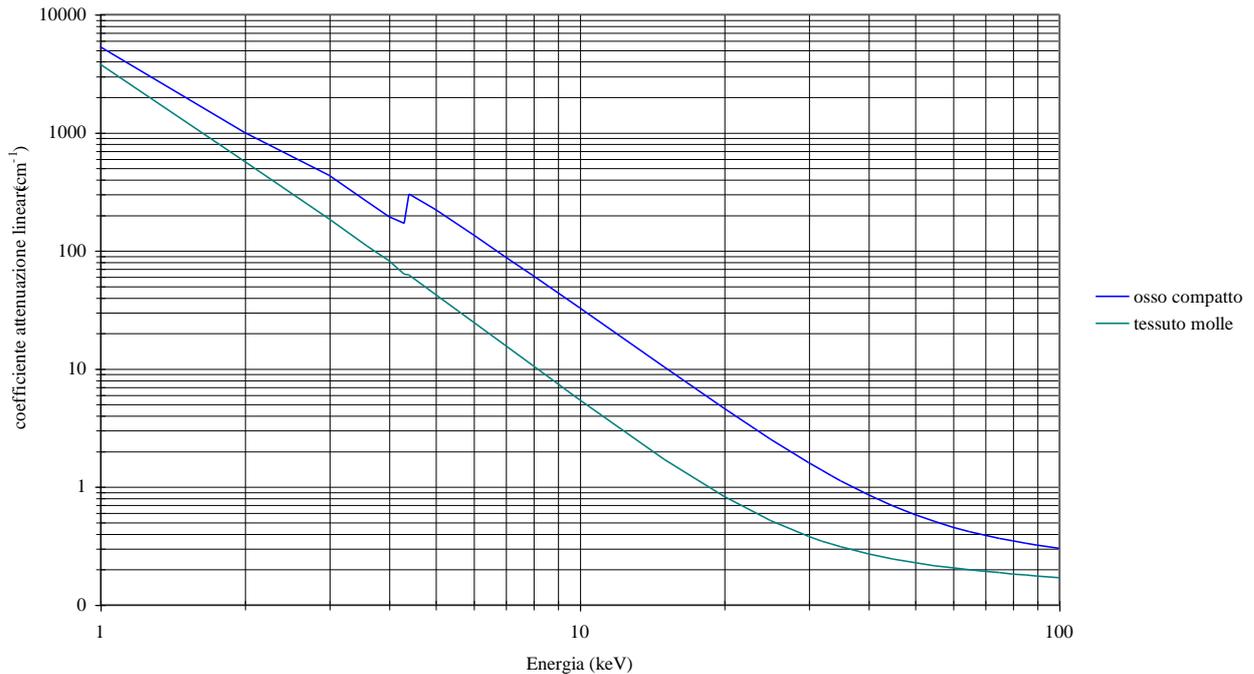


Figura 15 Coefficiente di assorbimento dei diversi tessuti in funzione dell'energia del fascio

Capire perché i diversi coefficienti tendono ad assumere lo stesso valore man mano che l'energia cresce non è difficile. L'interazione dei raggi X con la materia avviene infatti con gli elettroni e se l'energia del fascio diviene elevata rispetto a quella di legame di questi ultimi, il tipo di materiale attraversato perde importanza; l'effetto fotoelettrico è sostituito progressivamente dall'effetto Compton e a tal punto, per l'interazione, diviene importante solamente la densità del materiale e non la sua natura.

Ovviamente abbassare l'energia del fascio incidente, rendendolo meno penetrante, comporta anche una perdita di trasparenza, diminuendo di fatto il numero di fotoni rivelati e quindi il contrasto stesso. Si tratta quindi sempre di trovare il giusto compromesso per ottenere un'immagine migliore possibile. E' possibile dimostrare che si ha una trasparenza ottimale se viene rispettato il seguente criterio:

$$x = \frac{2}{\mu} \quad (10)$$

dove x è lo spessore attraversato e μ il coefficiente di attenuazione lineare della radiazione nel mezzo, che può essere modificato semplicemente variando l'energia del fascio.

Prima di dimostrare la formula appena citata, cerchiamo di capire meglio come possa avvenire una misura effettiva di contrasto in un'immagine. Per renderci conto della complessità del problema dobbiamo tener conto del fatto che contemporaneamente al concetto di contrasto occorre considerare quelli di rumore e risoluzione, che risultano inscindibili da questo.

Guardando la figura seguente appare subito chiaro come la presenza del rumore ostacoli la misura del contrasto, rendendo in pratica impossibile definire esattamente la posizione di due punti nel grafico.

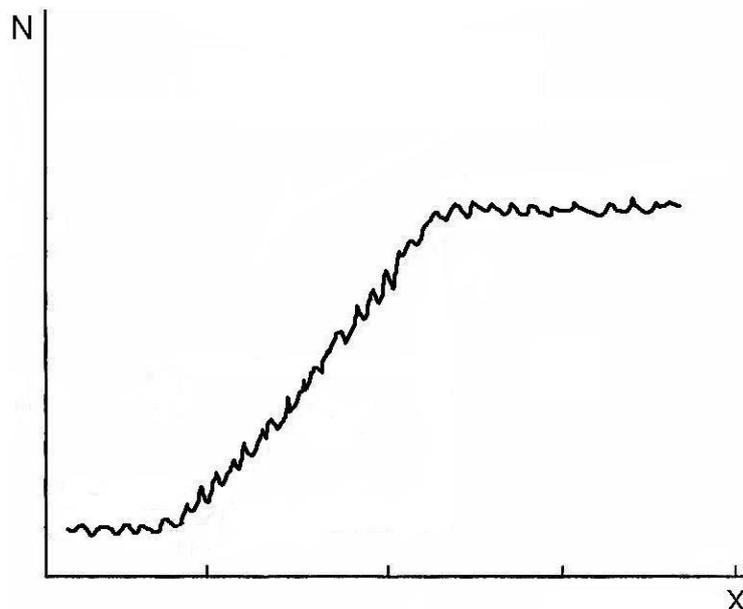


Figura 16 Il rumore ostacola la misura del contrasto

Per arrivare alla formula (10) occorre fare prima qualche piccola considerazione sulla risoluzione.

Supponiamo che una radiazione attraversi un oggetto con coefficiente di assorbimento μ e spessore x :

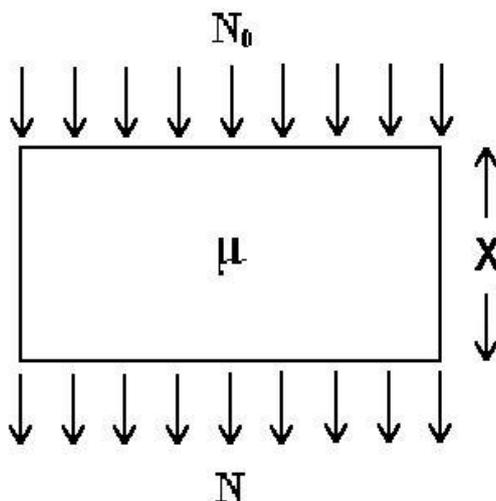


Figura 17

La sensibilità del sistema assorbiometrico ad una variazione di spessore è data da:

$$s = \frac{dN}{dx} = - N_0 \mu e^{-\mu x} = - N \mu \quad (11)$$

(Va notato che la sensibilità dipende dalla risposta stessa, cioè da N ; ciò costituisce senz'altro un fattore negativo per il sistema di formazione di immagini in quanto è un intrinseco elemento di non linearità).

La presenza del rumore inoltre determinerà un'incertezza nella determinazione della risposta che indicheremo con $\sigma(N)$ e che stimeremo essere uguale a \sqrt{N} (ricordando la statistica di Poisson

applicabile nel caso di misure di variabili discrete). Poiché in realtà la determinazione dell'assorbimento si basa sulla misura di una variazione di conteggi $\Delta N = N - N'$, l'incertezza stimata sulla grandezza ΔN sarà pari a $\sigma(N - N') = \sqrt{N + N'} \cong \sqrt{2N}$

A questo punto la risoluzione del sistema, intesa come la minima variazione di spessore apprezzabile, che chiameremo “*resolving power*” sarà ottenibile dall'espressione:

$$\Delta x_{\min} = \frac{b\sigma(N - N')}{s} = -\frac{b\sqrt{2N}}{N\mu} = \frac{b\sqrt{2}e^{\frac{\mu x}{2}}}{\sqrt{N_0}\mu} \quad (12)$$

dove b è un coefficiente che delimita l'intervallo di confidenza.

La richiesta di una condizione di minimo corrisponde in pratica ad ottimizzare il contrasto:

dall'espressione
$$\frac{d\Delta x_{\min}}{d\mu} = 0$$

si ottiene quindi la formula cercata

$$\mu = \frac{2}{x};$$

E' possibile giungere alla stessa espressione immaginando di far variare il coefficiente di assorbimento μ , con passaggi analoghi ai precedenti:

$$s' = \frac{dN}{d\mu} = -N_0 x e^{-\mu x} = -N x$$

$$\Delta\mu_{\min} = \frac{b\sigma(N - N')}{s'} = -\frac{b\sqrt{2N}}{Nx} = \frac{b\sqrt{2}e^{\frac{\mu x}{2}}}{\sqrt{N_0}x}$$

$$\frac{d\Delta\mu_{\min}}{dx} = 0 \quad \text{da cui segue} \quad x = \frac{2}{\mu}$$

Cerchiamo di capire quindi il significato pratico della condizione (10).

Notiamo innanzitutto che la quantità $1/\mu$ corrisponde al cammino libero medio della radiazione nel mezzo, come ricavabile dall'espressione

$$\frac{1}{x} = \frac{\int x e^{-\mu x} dx}{\int e^{-\mu x} dx} = \frac{1}{\mu}$$

Dopo aver attraversato un tale spessore la frazione di fotoni “sopravvissuti” è pari a :

$$\frac{N}{N_0} = e^{-1} \cong 0,368;$$

ciò significa che “muoiono” circa il 63% dei fotoni incidenti.

Lo spessore ottimale corrisponde invece a due cammini liberi medi e si ha:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-2} \cong 0,135$$

Un sistema radiologico è “ottimale” quindi, secondo quanto appena discusso, se permette solo a circa il 13% dei fotoni incidenti di sopravvivere.

Ora però è il caso di chiedersi: tale condizione è facilmente raggiungibile? E inoltre è davvero ottimale per i nostri scopi?

Alla prima domanda rispondiamo subito di no: la condizione (10) non è sempre facilmente raggiungibile anche se il coefficiente μ di uno stesso tessuto varia molto con l'energia. Anche il secondo quesito pone dei problemi, visto che far assorbire circa il 90% della radiazione significa dare un enorme contributo alla dose nel campione, soprattutto per i fotoni di bassa energia. Ancora una volta quindi è necessario cercare un compromesso tra le diverse esigenze.

Ricordiamo la formula che esprime la dose D in funzione della fluenza di particelle Φ :

$$D \cong \Phi \cdot \frac{S_{coll}}{\rho}$$

dove ρ indica la densità del materiale e S_{coll} il potere frenante di collisione, cioè l'energia persa per unità di percorso. L'espressione è valida se è trascurabile la frazione di energia persa per irraggiamento.

2.7 LA DISTRIBUZIONE DEL NUMERO DI CONTEGGI N

La misura N del numero di conteggi è affetta da un errore statistico che ha origine da diversi contributi.

Un tubo a raggi X è una sorgente di fotoni che è naturalmente distribuita in modo poissoniano e genera un rumore quantico (*Quantum Noise*) nel segnale rivelato.

Un secondo contributo poissoniano è dovuto all'incertezza sul numero di urti compiuti dai fotoni durante il loro cammino.

Un terzo contributo non poissoniano è dovuto poi alla statistica dei fotoni in arrivo sul rivelatore. In ultimo non va dimenticato il rumore elettronico introdotto inevitabilmente dalle apparecchiature utilizzate.

Nella nostra trattazione ipotizzeremo sempre che prevalga il primo contributo e pertanto attribuiremo alla variabile N una distribuzione di Poisson.

2.8 IL RAPPORTO DI CONTRASTO

Il rapporto di contrasto è una grandezza adimensionale che nasce dall'esigenza di confrontare immagini di origine profondamente diversa (ad esempio un'immagine realizzata con gli ultrasuoni a confronto con una radiografica).

Immaginiamo che una radiazione attraversi un mezzo che è quasi ovunque omogeneo con coefficiente μ , tranne che in un volumetto di spessore Δl con coefficiente μ' (difetto).

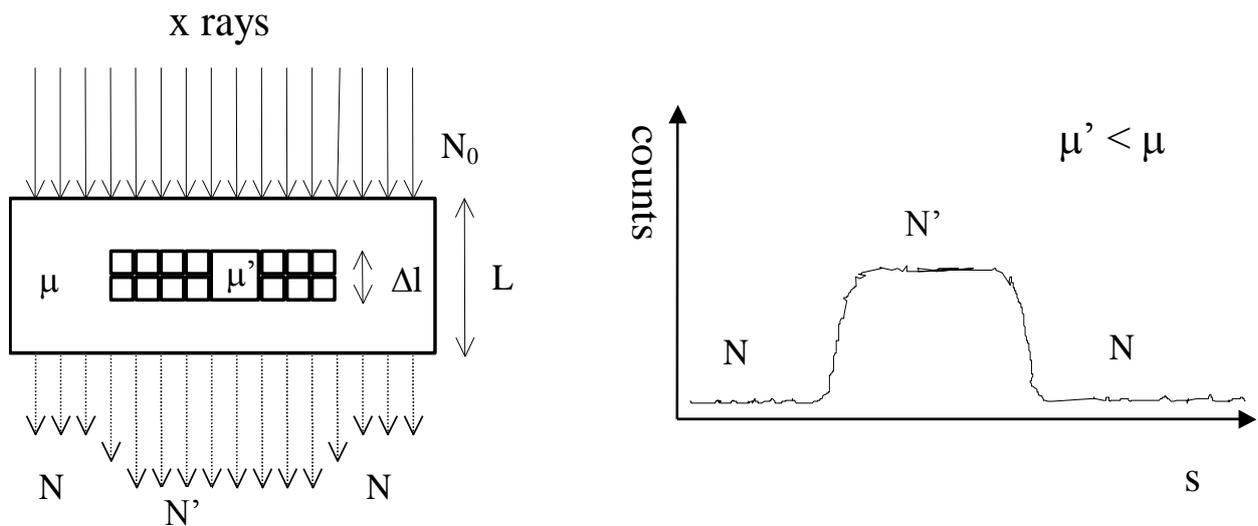


Figura 18 – Profilo di assorbimento in un oggetto uniforme con un difetto meno assorbente di spessore Δl

Definiamo allora **rapporto di contrasto** la quantità:

$$CR = \frac{\Delta N}{N_{medio}} = \frac{N - N'}{(N + N')/2} \quad (13)$$

Ovviamente tale rapporto sarà calcolato localmente ove si presenti una disomogeneità nel mezzo. Sempre riferendoci alla figura sopra possiamo scrivere:

$$N = N_0 e^{-\mu L} \quad N = N_0 e^{-\mu(L-\Delta l)} e^{-\mu' \Delta l} = N e^{-\Delta l \cdot \Delta \mu}$$

con $\Delta \mu = \mu - \mu'$; si ha quindi:

$$\Delta N = N(1 - e^{-\Delta \mu \cdot \Delta l}) \cong N \Delta l \Delta \mu$$

Osserviamo che il sistema assorbimetrico non è lineare; gli assorbimenti risultano indipendenti dalla posizione e dipendenti solo dalla quantità Δl .

Il sistema risponderà a una variazione $\Delta \mu$ con una sensibilità

$$S = \frac{d\Delta N}{d\Delta \mu} = N \Delta l$$

La minima variazione $\Delta \mu$ rivelabile sarà data perciò da

$$\Delta \mu_{min} = \frac{b \sigma(\Delta N)}{S} = \frac{b \sqrt{N + N'}}{N \Delta l} \cong \frac{b \sqrt{2}}{\Delta l \sqrt{N}} \quad (14)$$

E' importante sottolineare che il minimo $\Delta \mu$ rivelabile risulta inversamente proporzionale alla quantità Δl . Possiamo riscrivere l'espressione ottenuta nel seguente modo:

$$\Delta \mu_{min} \cdot \Delta l \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$$

E' una sorta di "principio di indeterminazione delle immagini", che lega, di fatto, le possibilità del nostro sistema alla statistica dei conteggi. A parità di numero di fotoni rivelati, un tessuto con un certo coefficiente μ sarà in pratica rivelabile solo al di sopra di un certo spessore Δl , mentre viceversa anche piccoli oggetti risulteranno visibili in presenza di un elevato $\Delta\mu$.

2.9 IL RAPPORTO SEGNALE RUMORE (*Signal to noise ratio*)

Definiamo rapporto segnale rumore la quantità:

$$SNR = \frac{N - N'}{\sqrt{N + N'}} \cong \frac{\Delta N}{\sqrt{2N}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2}} (1 - e^{-\Delta\mu \cdot \Delta l}) \cong \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2}} \Delta\mu \cdot \Delta l \quad (15)$$

dove l'ultimo passaggio è un'approssimazione valida nel caso che $\Delta\mu \Delta l$ sia una quantità infinitesima.

Confrontando l'espressione appena ottenuta con la (14), si ottiene immediatamente:

$$b \equiv SNR$$

Inoltre, dalle espressioni (12) e (14) si ricava:

$$CR = \frac{SNR}{\sqrt{N}} \quad (16)$$

2.10 PROCEDURE DI MISURA

Finora abbiamo evidenziato come in un sistema assorbitometrico ci sia una sorta di ambiguità tra misura di spessori Δl e di $\Delta\mu$. Ovviamente nelle nostre misurazioni siamo interessati a misure di μ , ma il valore di Δl ci limita.

Per superare questo problema si fa uso di particolari procedure. L'obiettivo di tali procedure è avere a disposizione due misure indipendenti della stessa grandezza in un determinato punto.

Un primo metodo consiste nella cosiddetta "dual energy absorptiometry", cioè nell'eseguire la misura dell'assorbimento nello stesso punto di un campione con due radiazioni di energia molto diversa. E' chiaro che in questo caso si parla di assorbimento differenziale.

L'utilizzo di due fasci di energia diversa ha lo scopo di eseguire due esperimenti del tutto scorrelati, facendo prevalere in uno l'assorbimento per effetto fotoelettrico (a basse energie) e nell'altro quello per effetto Compton (ad esempio, per lo iodio, sopra una certa soglia diventa molto più probabile l'effetto Compton sulle shell più interne).

Osserviamo che anche le misure eseguite su due punti vicini dello stesso oggetto non si possono ritenere scorrelate, a meno che non vari il tessuto o l'energia del fascio di radiazione che li attraversa.

Il risultato finale sarà dato dalla sottrazione delle due immagini ottenute con il metodo della doppia energia. Entriamo più nel dettaglio.

Se una sorgente monocromatica emette un numero di fotoni Φ_0 , allora il numero di fotoni Φ che incidono su un rivelatore dopo aver attraversato uno spessore L (g/cm^2) di un oggetto con coefficiente di attenuazione di massa τ (cm^2/g) è:

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\tau L}$$

Se abbiamo una misura I di Φ e una misura I_0 di Φ_0 , allora la grandezza $\ln(I_0/I)$ fornisce una misura dell'attenuazione. Allora se eseguiamo due acquisizioni a due diverse energie su un paziente costituito da tessuto molle (*soft tissue*) e osso (*bone*), otteniamo due equazioni lineari indipendenti:

$$\ln \frac{I_{01}}{I_1} = (\tau_b^1 w_b + \tau_{st}^1 w_{st})L$$

$$\ln \frac{I_{01}}{I_1} = (\tau_b^2 w_b + \tau_{st}^2 w_{st})L$$

dove abbiamo indicato con w_b e w_{st} le frazioni di osso e di tessuto molle presenti nel campione. Eseguendo il rapporto delle due espressioni si ottiene:

$$k = \frac{\ln(I_{01}/I_1)}{\ln(I_{02}/I_2)} = \frac{\tau_b^1 w_b + \tau_{st}^1 w_{st}}{\tau_b^2 w_b + \tau_{st}^2 w_{st}}$$

Con la condizione $w_a + w_{st} = 1$ è possibile quindi ricavare il valore di w_b indipendentemente dallo spessore L del campione.

Pensiamo ora di iniettare in un campione di tessuto molle dello iodio, che sarà visibile solo nella misura ottenuta ad energia più alta. Le due equazioni risultano pertanto semplificate:

$$\ln \frac{I_{01}}{I_1} = \tau_{st}^1 L$$

$$\ln \frac{I_{01}}{I_1} = (\tau_{st}^2 w_{st} + \tau_I^2 w_I)L$$

Un secondo metodo consiste invece nell'ottenere due misure indipendenti semplicemente ripetendo lo stesso esperimento a due istanti di tempo sufficientemente lontani, dopo aver fatto ingere al paziente un mezzo di contrasto, giungendo sempre per sottrazione al risultato finale (angiografia).

Questa seconda procedura risulta però meno vantaggiosa rispetto alla prima, poiché introduce senza dubbio un maggior "rumore", visto che in qualche modo l'oggetto che considero in un secondo momento non è proprio lo stesso.

Sottolineiamo inoltre che con misure di NMR il metodo risulta ancora più efficace, dato che il segnale di rilassamento dei tessuti risulta molto differenziato al variare della natura chimica degli oggetti interessati.

2.11 L'EFFICIENZA QUANTICA DEL RIVELATORE

Quando abbiamo parlato di contrasto abbiamo sottolineato l'importanza di riuscire a evidenziare differenze nel numero di fotoni "contati" dal rivelatore rispetto al cosiddetto *fondo* di conteggio. E' chiaro che tali differenze appariranno più cospicue all'aumentare della capacità del rivelatore di contare tutti i fotoni che arrivano. Appare quindi utile definire il seguente coefficiente, che chiameremo "efficienza quantica del rivelatore" e indicheremo con ε :

$$\varepsilon = \frac{N_{riv}}{N_{inc}}$$

e che rappresenta il rapporto tra il numero di fotoni rivelati e il numero di fotoni realmente incidenti sul rivelatore.

Se invece di un sistema di conteggio ho ad esempio una risposta data dall'annerimento di una lastra, potrò definire l'efficienza quantica come:

$$\varepsilon = \frac{SNR_{out}}{SNR_{in}}$$

ricordando il legame tra rapporto segnale-rumore e numero N di fotoni rivelati.

La grandezza ε fa capire ad esempio il vantaggio di usare degli schermi luminescenti (schermi di rinforzo) per le lastre fotografiche. Tali lastre hanno infatti una elevatissima risoluzione ma sono in grado di contare solo 1 fotone ogni 100! L'introduzione degli schermi permette quindi di aumentare l'efficienza del rivelatore.

2.12 IL RUMORE E LO SPETTRO DI WIENER

Nelle lastre radiografiche possiamo identificare diverse fonti di rumore che degradano il segnale. Innanzitutto c'è il rumore fisico legato alla sorgente di fotoni che risulta ineliminabile e per niente trascurabile e che, essendo originato da un fenomeno stocastico, è un rumore quantico.

Origine del tutto diversa ha invece il rumore radiografico, cioè quello direttamente legato al sistema di rivelazione. Una prima causa di questo rumore può essere ricercata nella fluttuazione del numero di grani d'argento della lastra per unità di superficie o, in una moderna telecamera CCD dalla variazione nella dimensione dei pixel. Non si tratta ovviamente di un rumore quantico e può invece essere ben rappresentato ad esempio da una distribuzione della grandezza dei pixel attorno al valor medio. Ogni pixel avrà inoltre una diversa efficienza quantica e questo è senz'altro un ulteriore contributo al rumore nell'immagine. L'unico modo per tentare di correggere quello che abbiamo definito rumore radiografico è realizzare un esperimento di questo tipo:

con una sorgente si illumina uniformemente una lastra e con un microdensitometro misuro successivamente il valore del segnale per ogni elemento sensibile.

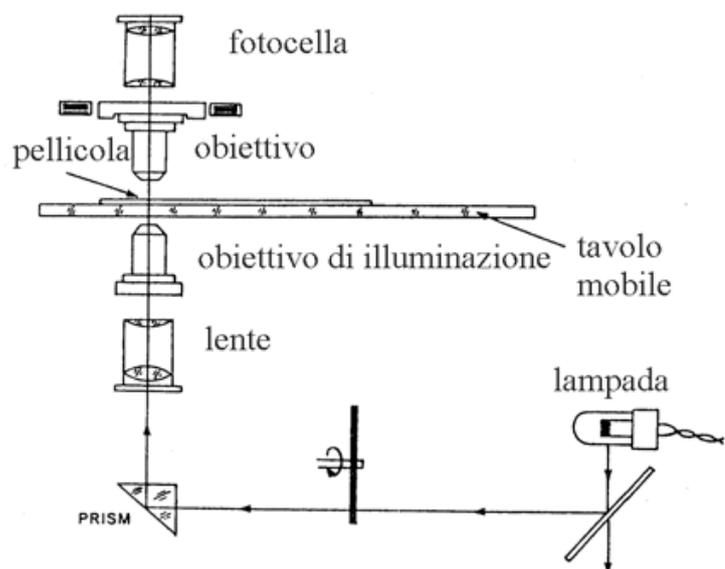


Figura 19 Microdensitometro

A questo punto è utile introdurre un altro concetto noto come *limite di Selwing*. Si tratta di una sorta di "principio di indeterminazione" per la lettura microdensimetrica. Supponiamo di illuminare una lastra con un fascio collimato e misurare il valore di OD con un microdensitometro: il principio afferma che il rumore prodotto dal sistema di rivelazione è inversamente proporzionale al passo di campionamento (= risoluzione), che nel nostro caso coincide, di fatto, con la larghez-

za del fascio. Questo limite è fondamentale per capire che non posso ridurre la risoluzione senza che aumenti il rumore, fino a che il segnale stesso non risulta più osservabile.

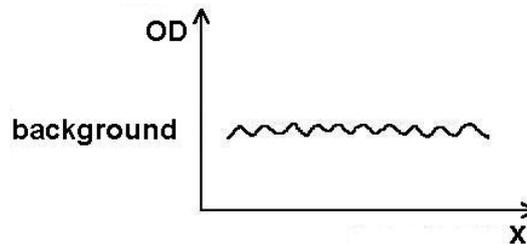
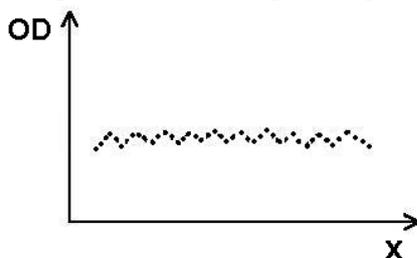


Figura 20 Rumore presente nella lastra

A. campionamento con passo "piccolo"



B. campionamento con passo "grande"

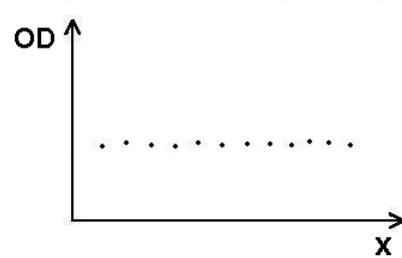


Figura 21

Si nota subito infatti che nella figura 22A, dove si ha un passo di campionamento più piccolo (si è ripetuta cioè la misura con un fascio più piccolo), il valore medio è soggetto a maggiori fluttuazioni e la misura risulta pertanto molto più imprecisa. Del resto è noto a tutti come un fotografo non possa ingrandire a piacimento un'immagine senza rischiare inevitabilmente di "sgranarla". Più piccoli sono i grani e più piccolo sarà il rumore, ma è anche vero che con dei grani più grandi si avrebbe un aumento di efficienza quantica e conseguentemente un migliore contrasto: come sempre si tratta di trovare il giusto compromesso tra i diversi fattori in gioco.

Un altro aspetto che ci sembra importante sottolineare è il cosiddetto "*Quantum mottle*", un problema ben noto nell'elettronica dei rivelatori come "*Cross talk*". Quando una radiazione di alta energia incide su un punto di una lastra produce sicuramente la riduzione di un grano di argento, ma anche una carica secondaria che può colpire un altro grano vicino impressionando anche questo: un singolo fotone impressiona quindi più grani. Se la statistica dei grani impressionati non è elevatissima l'immagine presenta una serie di chiazze bianche. Questo fenomeno aumenta il rumore (perché si ha un apparente elevato valore di OD al quale non corrisponde però un'elevata statistica).

Anche in un normale rivelatore CCD si presenta lo stesso problema per il fatto che due pixel vicini scambiano informazioni. Il meccanismo prende il nome di *smearing*, in riferimento al trasferimento di carica da un pixel all'altro, o addirittura di *blooming* se il fenomeno è talmente forte da provocare in pratica l'acceccamento dei pixel. Quest'ultimo caso si verifica in presenza di un

fotone di energia molto elevata, ma allo stesso modo può verificarsi con un numero elevato di fotoni di più bassa energia, come accade se si espone la telecamera alla luce del sole.

Il fenomeno del cross talk mette in evidenza il fatto che due punti della lastra non sono indipendenti. Se quindi eseguiamo una misura del valore medio di OD con la sua varianza $\sigma^2(OD)$, devo tener presente che in realtà tale grandezza tiene conto anche della dipendenza tra i pixel.

E' opportuno quindi chiedersi come si ottiene una stima della covarianza nel caso dei sistemi di immagini. Possiamo immaginare di esporre una lastra a un campo di radiazione uniforme e di costruire poi la funzione di correlazione:

$$C(\Delta x) = \int OD(x) \cdot OD(x + \Delta x) dx$$

dove $OD(x)$ e $OD(x+\Delta x)$ sono i valori di densità ottica in due pixel a distanza Δx . E' evidente che l'andamento della funzione $C(\Delta x)$ decresce all'aumentare della distanza fra i pixel; se ricordiamo l'esperimento discusso per determinare la *point spread function* infatti, uno stimolo puntiforme produce al massimo una risposta in un piccolo intorno del punto illuminato coinvolgendo quindi un numero limitato di pixel vicini. Si usa in genere definire due segnali distinti se i loro valori medi distano almeno 2σ , ovvero almeno il doppio della FWHM calcolata per il singolo segnale. Appare chiaro quindi come il concetto di indipendenza tra due pixel sia strettamente legato a quello di risoluzione, risultando quest'ultima tanto migliore quanto è più indipendente la risposta di due elementi adiacenti.

Studiare la funzione di correlazione come definita sopra risulta laborioso e poco vantaggioso. Una strada più breve può farci giungere allo stesso risultato se prima introduciamo il concetto di *ergodicità*: se un sistema è ergodico, come noi presupporremo sempre da questo momento, è possibile sostituire la media spaziale sui pixel vicini con la media temporale su un singolo pixel e studiare invece della funzione di correlazione la funzione di autocorrelazione, dove il valore di OD sarà misurato a due istanti diversi.

$$A(\Delta t) = \int OD(x, t) \cdot OD(x, t + \Delta t) dt$$

Ipotizzando inoltre che tale funzione appartenga alla classe delle funzioni impulsive, eseguendo la trasformata di Fourier $\mathfrak{F}(A)$ ed invocando il teorema di Wiener-Khinchine si ottiene lo spettro di potenza del segnale che prende il nome di *Spettro di Wiener*. Analizzare le basse frequenze di tale spettro equivale a considerare pixel vicini nell'immagine ed è chiaro quindi che l'andamento in questa regione è decrescente (analogamente a quello della MTF che però non tiene conto del rumore dovuto alla correlazione tra i pixel) e risulta "strutturato" spazialmente per il fenomeno del *cross talk* (cioè se il segnale in un pixel fluttua allora fluttua anche il segnale nei pixel vicini). La "novità" dello spettro di Wiener è ad alte frequenze, dove, a differenza della MTF, assume un andamento costante visto che su lunghe distanze il sistema è assimilabile ad un insieme di pixel indipendenti: in questa regione sarà trascurabile il fenomeno della correlazione e rimarrà solo il rumore quantico legato alla sorgente e a tutti i meccanismi intrinseci al processo di formazione, che può essere considerato ragionevolmente un rumore bianco e quindi presente a tutte le frequenze. Poiché l'MTF ad alte frequenze scende, mentre il rumore mantiene un valore pressoché costante, in questa regione si avrà un rapporto segnale-rumore che peggiorerà via via che saranno raggiunti valori bassi di modulazione.

E' chiaro inoltre che per un sistema "perfetto" a pixel indipendenti (*pin-hole*) lo spettro di Wiener è uno spettro bianco, per la totale assenza del rumore strutturato.

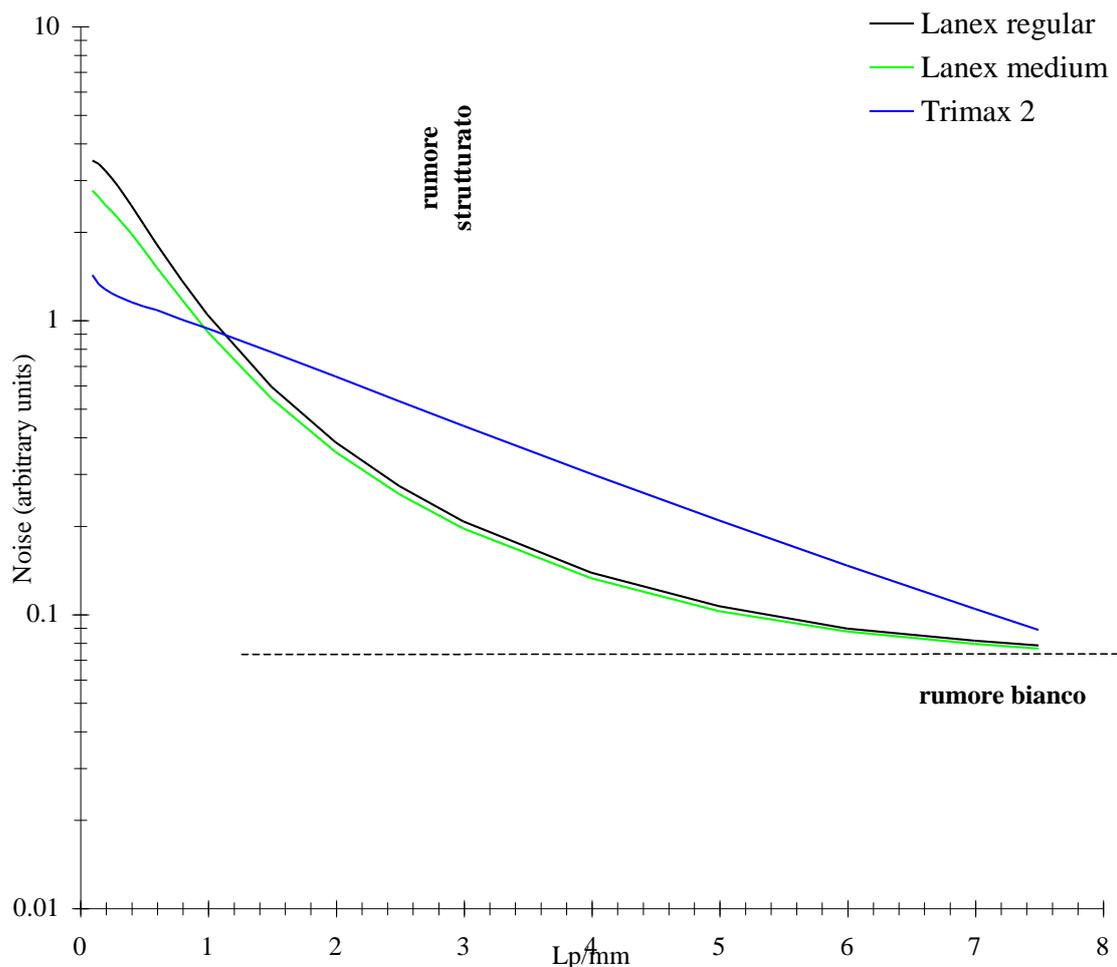


Figura 22 Spettro di Wiener

Poiché l'integrale dello spettro di Wiener fornisce una misura di $\sigma^2(OD)$, se mi limito a studiare le basse frequenze otterrò una misura della covarianza mentre le alte frequenze mi permetteranno di stimare la varianza.

CAP.3 LE IMMAGINI DIGITALI

Quanto detto finora non presupponeva il fatto di avere a che fare con immagini descritte da funzioni continue e, se riflettiamo, capiamo che in realtà le funzioni sono sempre necessariamente discrete proprio per il modo stesso in cui avviene il processo di formazione. Cerchiamo di capire allora cosa succede quando si passa dal continuo al discreto.

Ripartiamo dall'utilizzo della trasformata di Fourier. Esistono degli algoritmi con cui tale operazione viene implementata in un calcolatore, noti come FFT (*Fast Fourier Transform*). Sono ovviamente dei metodi di calcolo approssimato che pertanto introducono degli errori: cerchiamo di analizzarne i più evidenti.

Innanzitutto la trasformata viene eseguita su un certo intervallo di tempo e non da $-\infty$ a $+\infty$, determinando il cosiddetto errore di troncamento.

Inoltre si produce un troncamento in frequenza visto che campionando con un passo Δx si può avere al massimo una frequenza $1/\Delta x$.

3.1 IL CAMPIONAMENTO DI UN'IMMAGINE

Il procedimento con cui si campiona un'immagine può essere ben descritto introducendo la cosiddetta funzione a "letto di fachiro":

$$COMB(\Delta x, \Delta y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\Delta x, y - m\Delta y)$$

Allora si ottiene la funzione discretizzata semplicemente moltiplicando l'immagine $g(x,y)$ continua per la $COMB(\Delta x, \Delta y)$:

$$g_c(x, y) = g(x, y) \cdot COMB(\Delta x, \Delta y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(n\Delta x, m\Delta y) \quad (17)$$

Osserviamo che la trasformata della funzione $COMB(\Delta x, \Delta y)$ ha la stessa forma di questa nello spazio delle frequenze:

$$\mathfrak{Z}(COMB(\Delta x, \Delta y)) = COMB(\omega_x, \omega_y) = \omega_{xs} \omega_{ys} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega_x - l\omega_{xs}, \omega_y - m\omega_{ys})$$

dove abbiamo posto $\omega_{xs} = \frac{2\pi}{\Delta x}$ e $\omega_{ys} = \frac{2\pi}{\Delta y}$.

Applicando il teorema sul prodotto di convoluzione, indicato dal simbolo \otimes , possiamo scrivere infine:

$$G_c(\omega_x, \omega_y) = G(\omega_x, \omega_y) \otimes COMB(\omega_x, \omega_y) = \omega_{xs} \omega_{ys} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(\omega_x, \omega_y) \delta(\omega_x - l\omega_{xs}, \omega_y - m\omega_{ys}) = \\ = \omega_{xs} \omega_{ys} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(l\omega_{xs}, m\omega_{ys})$$

dove le lettere maiuscole indicano le trasformate delle rispettive funzioni.

La convoluzione fa sì che nello spazio delle frequenze la stessa immagine si ripresenti più volte; è necessario quindi applicare un filtro in modo da selezionare solo la parte centrale.

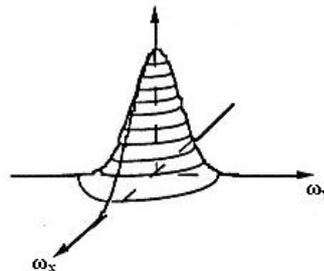


Figura 23 Spettro dell'immagine originale

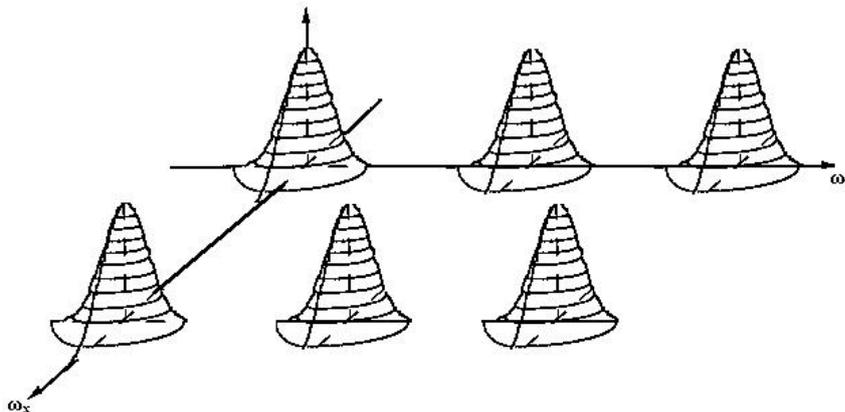


Figura 24 Spettro dell'immagine dopo la digitalizzazione

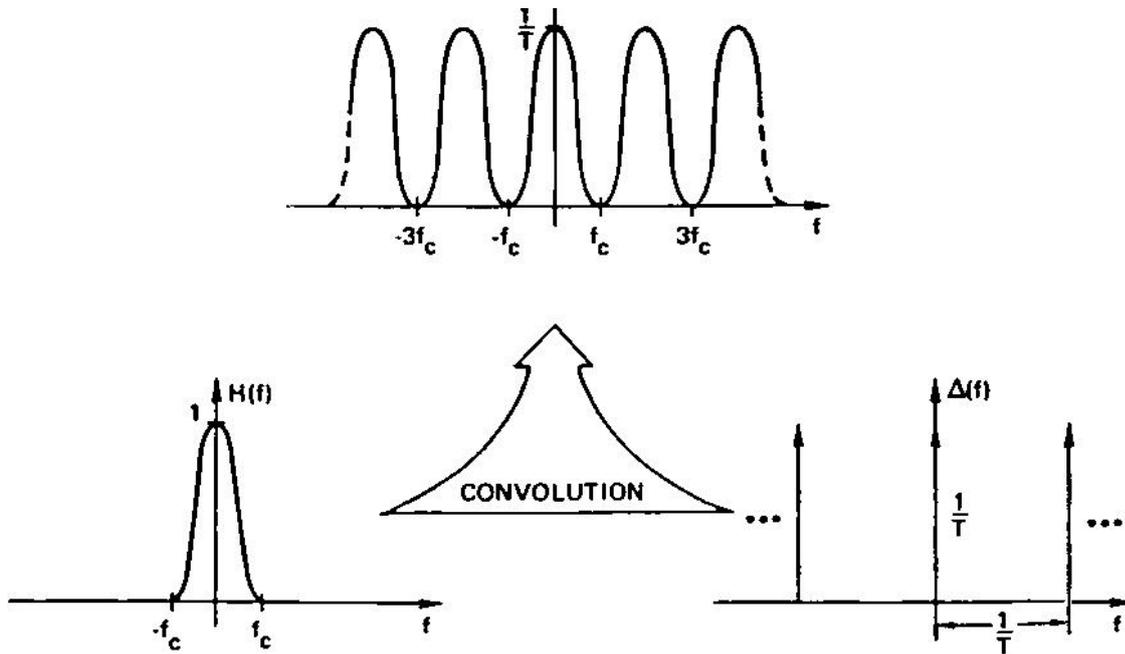


Figura 25 Effetto della convoluzione

Ad esempio possiamo scegliere tale filtro, che indicheremo con $R(\omega_x, \omega_y)$, come una “scatola” nello spazio delle frequenze che corrisponde nello spazio ordinario alla funzione $r(x, y) \propto \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin y}{y}$ (che, come ci aspettiamo, fa decrescere i contributi al segnale per x e y grandi).

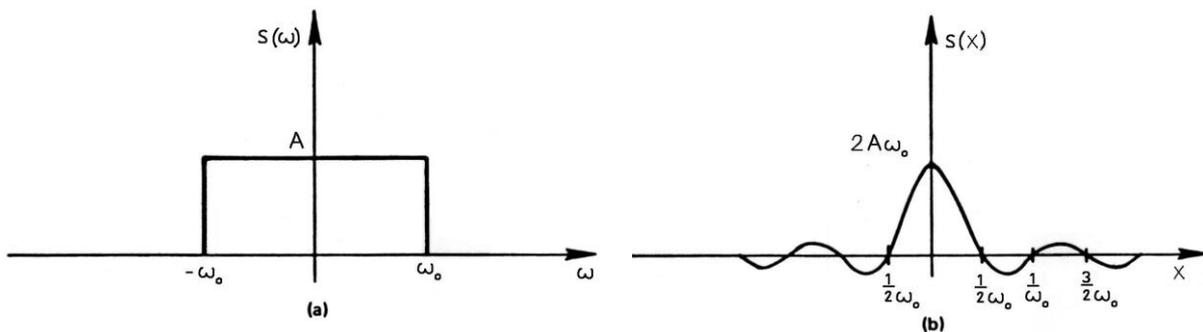


Figura 26 Trasformata della “scatola”

A questo punto però dobbiamo rivedere quanto detto finora, tenendo presente che un campionario reale non è rappresentabile semplicemente da una funzione COMB, cioè da una serie di funzioni di tipo δ , ma avrà una sua precisa PSF; campionando quindi si otterrà una risposta pari alla convoluzione dell'immagine con la PSF del campionario (e non il semplice prodotto della (17)) e, nello spazio delle frequenze, il prodotto $G(\omega_x, \omega_y) \cdot MTF_c$ (dove MTF_c indica la *Modulation Transfer Function* del collimatore). Di conseguenza dovremo far sì che l' MTF_c sia molto più

larga dell'andamento in frequenza dell'immagine da campionare, in modo che in pratica tale funzione sia semplicemente moltiplicata per una costante.

3.2 IL PROBLEMA DELL' ALIASING

Campionando un qualunque segnale si pone il problema di assegnare una fase precisa a tutti i "frammenti" dell'immagine da ricostruire. Per capire come nasca il problema dell'*aliasing* analizziamo i grafici qui sotto, relativi al campionamento di un segnale sinusoidale.

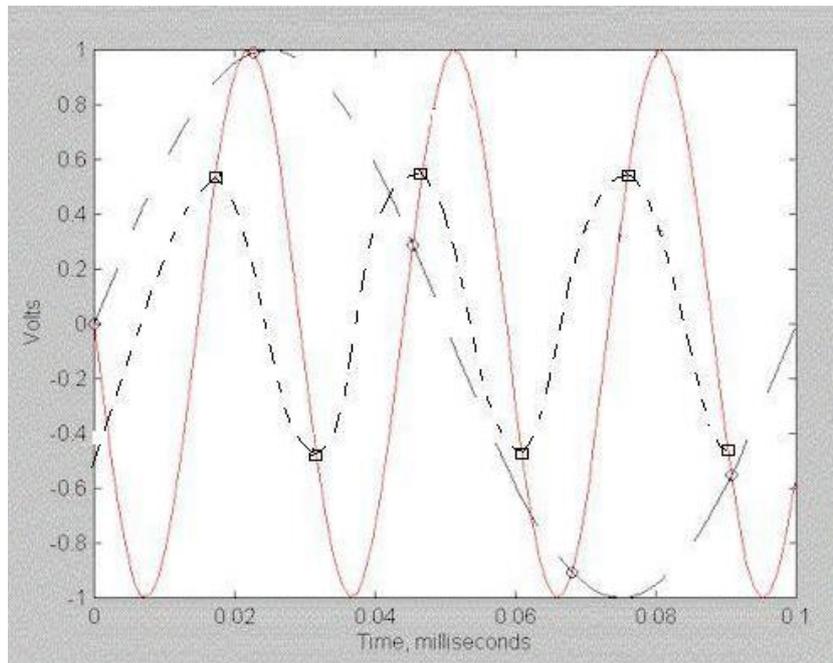


Figura 27 Aliasing

Si può osservare come con un passo di campionamento maggiore o uguale di $T/2$ sia impossibile ricostruire esattamente la forma del segnale, introducendo un errore in frequenza e ampiezza. E' necessario pertanto che il passo di campionamento sia minore di tale valore, cioè si abbia una frequenza di campionamento superiore a $2/T$ (condizione di Nyquist).

3.3 LA CONVERSIONE ANALOGICO DIGITALE

Quando si crea un'immagine digitale si eseguono in realtà due passi:
il campionamento;
la conversione analogico-digitale.

Come tutti gli ADC, anche il nostro sistema introdurrà degli errori dovuti al meccanismo di digitalizzazione.

Consideriamo ad esempio un convertitore a multistep, formato in pratica da tanti comparatori: il suo funzionamento è illustrato dalla figura seguente.

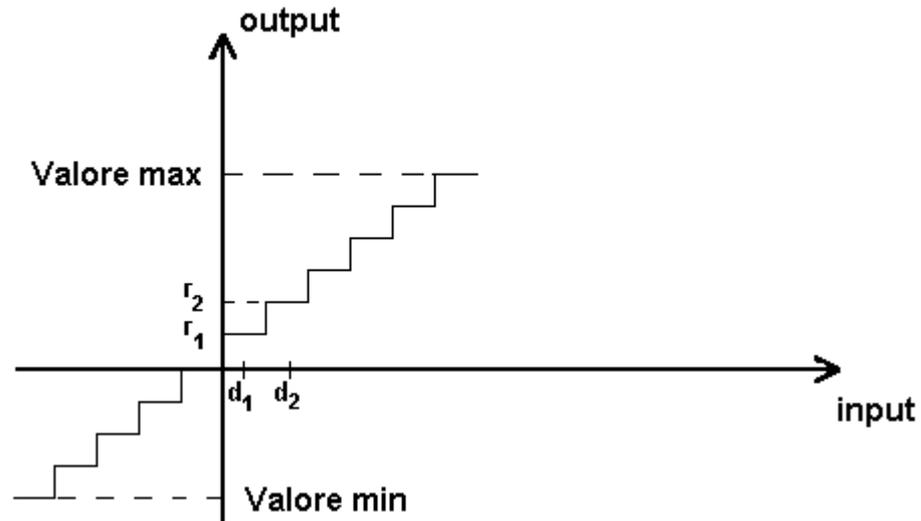


Figura 28 ADC a multistep

In figura d_i indica il *livello di decisione*, mentre r_i è il valore numerico assegnato se l'ampiezza del segnale risulta compresa tra d_i e d_{i+1} (in genere il valor medio tra i due punti). Un ADC di questo tipo pone però il problema del tempo che occorre per convertire il segnale, che varia inevitabilmente in funzione dell'altezza di quest'ultimo. Un altro tipo di convertitore procede invece per approssimazioni successive, confrontando di volta in volta il segnale con soglie prefissate: in tal modo il tempo necessario per la misura risulta lo stesso per i segnali di differente ampiezza. E' chiaro inoltre che se un sensore risponde linearmente alle sollecitazioni, un convertitore ADC funziona molto bene, mentre per una risposta non lineare (ricordiamo ad esempio l'andamento della densità ottica di una lastra) servirebbe un dispositivo capace di campionare con un passo più piccolo lì dove la pendenza della curva è minore.

Gli errori tipici di un convertitore analogico-digitale sono di due tipi:

- la non linearità differenziale, dovuta al fatto che i “gradini” non sono tutti uguali;
- la non linearità integrale, dovuta alla presenza di un eventuale “offset” che fa slittare tutti i valori di riferimento di una stessa quantità, determinando un errore sistematico sulle misure.

L'incertezza di misura sempre presente in un ADC è stimabile con il valore $\frac{\sigma}{\sqrt{12}}$ (per un con-

vertitore a 12 bit), dove σ è l'errore sull'altezza del singolo gradino. Tale grandezza è però trascurabile qualora risulti molto minore del potere risolutivo del sistema, poiché in questo caso la digitalizzazione non introduce un disturbo significativo che limita ulteriormente la mia capacità di ricostruire fedelmente l'immagine.

Tale incertezza andrà ovviamente sommata quadraticamente con il *quantum noise*, proporzionale alla radice del numero di fotoni rivelati, e con l'*elettronica noise*, un rumore termico generato dalle correnti oscure presenti nel circuito e stimabile con il rapporto tra il valore massimo di tensione misurato e la dinamica del convertitore (si ha infatti $D=V_{\max}/\sigma_{el}$)

Un problema importante del processo di digitalizzazione è dovuto al fatto che un'immagine è sempre di origine stocastica e, pertanto, non è limitata in banda. Questo aspetto è tanto più accentuato quanto maggiore è il rumore presente nell'immagine ed è quindi ovvio che riguarda in particolar modo le immagini a basso contrasto, dove la precisione nella misura dell'altezza dei singoli “gradini” diventa molto importante.

In un certo senso, poiché il rumore riguarda le alte frequenze, potremmo dire che la digitalizzazione in qualche modo “fa bene” alla ricostruzione dell'immagine poiché taglia proprio le alte frequenze, fissando necessariamente una banda limitata. Non dobbiamo -dimenticare però che

tale vantaggio deriva in realtà da una “distorsione” dell’immagine, poiché durante la digitalizzazione, si perdono informazioni.

Ci si potrebbe chiedere a questo punto se un’immagine fedele contenga più informazioni di una approssimata.. Forse la risposta migliore a questa domanda è che l’immagine autentica è con il rumore, ma che le informazioni più rilevanti prescindono da questo. Pensiamo ad esempio al trasferimento di immagini via software e alle tecniche di compressione utilizzate.

Alcuni algoritmi vengono chiamati “error free”, poiché conservano le informazioni sul rumore presente nell’immagine da ricostruire mentre altri, detti “non error free”, estraggono solamente le informazioni principali dell’immagine e permettono in tal modo di trasferire solo l’essenziale; ovviamente però non è possibile tornare indietro e le informazioni trascurate vanno irrimediabilmente perdute.

3.4 L’IMMAGINE DIGITALE COME MATRICE DI NUMERI

La realizzazione di un’immagine digitale consente di esprimere quest’ultima sotto forma di matrice di numeri $n \times m$, dove il valore di ogni elemento corrisponde al valore assegnato al singolo pixel: quindi un elemento di matrice per ogni pixel.

In realtà, oltre alla matrice contenente i valori di luminanza di ogni pixel, si possono aggiungere altre tre matrici per la cromaticità nel caso si tratti di un’immagine colorata: ad ogni pixel infatti assegnerò un determinato colore, individuato secondo il codice RGB (Red Green Blue) dalla combinazione dei tre colori fondamentali rosso, verde e blu, individuati ad esempio in 2^{24} sfumature da tre numeri di 8 bit.

3.5 LA DINAMICA

La codifica in bit rende più semplice anche la definizione di dinamica.

Per una lastra fotografica tale concetto era esprimibile come l’intervallo di linearità di risposta della lastra. Bisogna sottolineare che amplificare un segnale non serve ad aumentare la dinamica, perché insieme al segnale amplifico necessariamente anche il rumore, mantenendo inalterato il rapporto segnale-rumore.

La misura della dinamica in bit rende più semplice l’idea, permettendo di identificare immediatamente il numero di livelli a disposizione (ho una grande dinamica se ho ad esempio a disposizione 12 bit) e rendendo immediatamente confrontabili anche dinamiche diverse (riferite cioè a Volt o Ampere, ecc.).

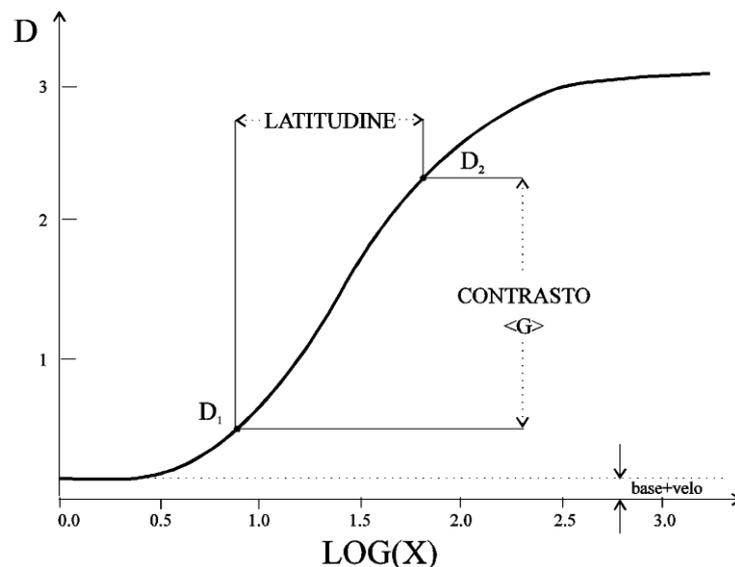


Figura 29 Dinamica

Il numero di livelli a disposizione sarà facilmente ottenibile dividendo l'ampiezza di variazione massima dei valori assunti dalla grandezza considerata per il potere risolutivo del sistema che, ricordiamo, può non essere costante su tutto il range. Di conseguenza una risoluzione più alta fornirà una maggiore dinamica.

Le tecniche di acquisizione delle immagini sono tali per cui si può ritenere circa costante il prodotto tra dimensioni del quadro e risoluzione: si può avere un'alta risoluzione quindi solo a patto che il quadro sia piccolo (tutte le immagini hanno in genere un numero di pixel che varia tra 256'000 a 1'000'000).

Non dobbiamo dimenticare però che la risoluzione da sola non basta a determinare la qualità di un'immagine se, contemporaneamente, non valutiamo anche il contrasto e il rumore.

3.6 LE OPERAZIONI SULLE IMMAGINI DIGITALI

Quando si parla di immagini prodotte da sistemi di acquisizione costituiti da uno o più sensori o rivelatori, utilizzando anche, come nel caso della tomografia elaborazioni intermedie, le metodologie di elaborazione sono quelle della "digital image processing" cioè dell'elaborazione mediante calcolatore delle immagini. Infatti negli ultimi anni stanno via via scomparendo sistemi di acquisizione e di elaborazione analogici che in precedenza erano impiegati in settori come la fotografia e la radiografia. Questo processo di progressivo trasferimento ai calcolatori delle immagini è iniziato negli anni sessanta e si sta concludendo solo ora.

I principali metodi di elaborazione di immagine comprendono:

- Rappresentazione e modello. E' la caratterizzazione delle grandezze che ogni elemento dell'immagine ("pixel" o "pel") rappresenta, ad esempio la luminosità di un oggetto o l'assorbimento di raggi-X, o della temperatura di un punto (immagine infrarosso) o altro. Il modello fornisce una descrizione logica o quantitativa della funzione bidimensionale rappresentante l'immagine.
- Miglioramento (enhancement) di particolari caratteristiche dell'immagine. Queste operazioni tendono a evidenziare caratteristiche geometriche, fisiche o strutturali dell'immagine con lo scopo di mettere maggiormente in luce particolari o caratteristiche di quest'ultima. Ci sono tecniche per mettere in evidenza certe caratteristiche delle immagini, come l'esaltazione del contrasto e dei bordi, la rappresentazione in falsi colori, il filtraggio del rumore. Esse sono usate nell'analisi, nell'estrazione delle caratteristiche e nella visualizzazione di informazione. Queste tecniche non aumentano le informazioni contenute nell'immagine, ma mettono in evidenza certe caratteristiche già presenti. Gli algoritmi sono quasi sempre iterativi e dipendono dall'applicazione.
- Restauro dell'immagine, cioè recupero, per quanto è possibile, della immagine originale, che si è venuta deteriorando nel processo fisico che ha consentito la sua cattura o successivamente nella fase di riproduzione o di immagazzinamento; Se conosciamo le degradazioni presenti in un'immagine, possiamo usare delle tecniche numeriche di rimozione o minimizzazione dei difetti. Questi ultimi possono essere distorsione, dovuta alla limitazione della geometria o rumore, aggiunto dai sensori.
- Analisi di immagine. Sono misure quantitative effettuate sull'immagine con lo scopo di produrre una sua descrizione, ad esempio in termini di separazione e dimensioni degli oggetti. Ci sono anche dei metodi avanzati di analisi di immagine impiegati nei sistemi di controllo e di decisione nell'industria robotica.
- Ricostruzione di immagine. E' una sottoclasse del restauro che permette di ricostruire un oggetto bi o tridimensionale usando le proiezioni ad una dimensione. Questa tecnica è molto importante in medicina (immagine TAC), astronomia, nei sensori remoti, in geologia e nelle prove non distruttive (END).
- Compressione di immagine. La quantità di dati su un'immagine contenente un'informazione visiva è così grande che richiede una grande capacità di archiviazione. Questi mez-

zi sono disponibili, ma il tempo d'accesso decresce con la capacità. Per archiviare e trasmettere una quantità così grande di dati occorre usare un "hardware" molto costoso. La compressione senza perdite di un'immagine è la tecnica che permette di ridurre il numero di bit rappresentanti un'immagine senza avere una perdita di informazione. Sono disponibili anche tecniche per perdite di informazione in cui si ha una perdita di informazione dipendente dal grado di compressione.

Con la dicitura "elaborazione di immagini digitali" s'intende una qualsiasi operazione effettuata su una rappresentazione di una scena, usando un calcolatore. Un'immagine digitale è una matrice finita di numeri reali o complessi che rappresenta il prodotto di una acquisizione di un singolo quadro ("frame") da parte di un sistema o la conversione in forma numerica di una fotografia, una diapositiva o di una qualsiasi altra immagine. Questa matrice viene immagazzinata nella memoria del calcolatore, permettendo così la sua elaborazione e la sua rappresentazione su di un video, in toni di grigio o a colori.

Sono operazioni su immagini: somma, definizione di campi (segmentazione), ingrandimenti (zoom) di regioni di interesse (ROI) spostamenti ecc., cioè tutte quelle operazioni che possono essere definibili tra una o più immagini intese come un insieme ordinato di numeri. L'estrazione d'informazioni è la ricerca nell'immagine osservata di caratteristiche fisiche e/o topologiche.

Molte delle operazioni che qui verranno introdotte sono già in uso nella pratica da parte di persone che lavorano con immagini anche non digitali : un fotografo ad esempio compie sia operazioni di restauro che di evidenziazione, così come il radiologo conosce molti trucchi per l'estrazione di informazioni da immagini spesso complesse e rumorose.

Uno dei vantaggi delle immagini digitali è la possibilità di elaborarle eseguendo su queste delle semplici operazioni.

Possiamo definire in particolare tre tipi di operazioni:

- operazioni di punto
- operazioni di area (o "locali")
- operazioni di quadro (frame)

che sono classificabili in base alla loro complessità di calcolo, cioè al numero di operazioni di base (moltiplicazioni, divisioni...) di cui necessitano. In alcuni casi tali operazioni possono essere eseguite su tutti i pixel in modo parallelo, con l'uso di calcolatori paralleli. Entriamo più nel dettaglio.

Nell'elaborazione di un'immagine la più semplice operazione sono quelle di trasformazione dei livelli di grigio. Tali operazioni sono dette di punto; esse consistono in una modificazione di tali livelli assegnando ad essi nuovi valori. Tali operazione servono ad esempio per ottimizzare l'illuminazione dell'immagine, per correggerla se non è omogenea e per aumentare il contrasto. Esse sono esprimibili con la formula:

$$G'(m,n) = T(G(m,n))$$

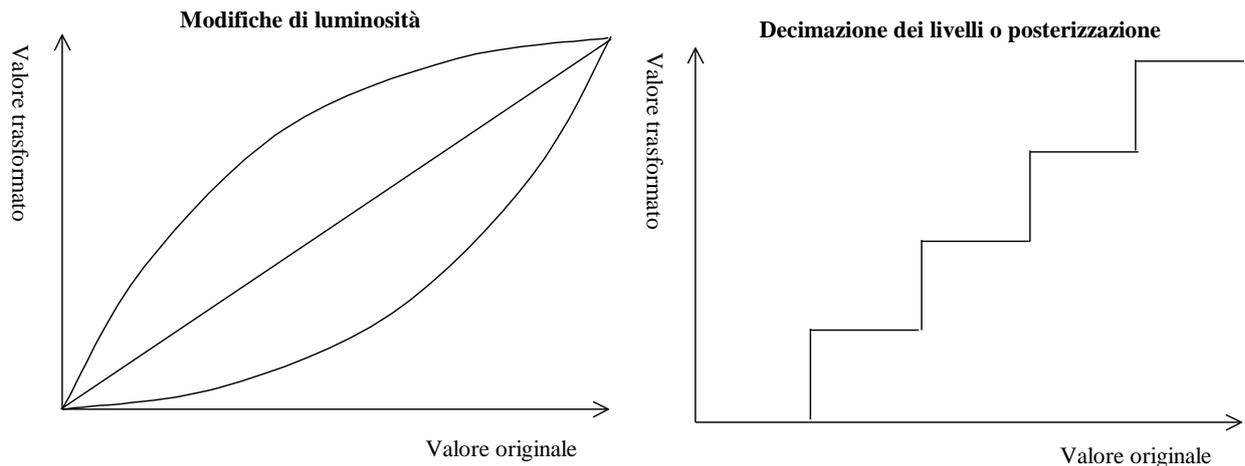


figura ? - Esempi di trasformazioni di punto

Quando siamo di fronte a un'immagine di grandi dimensioni (ad esempio 512x512 pixel) una trasformazione puntuale eseguita su tutti i pixel richiede tempi di calcolo molto lunghi, visto che una stessa operazione va ripetuta moltissime volte.

Inoltre alcune di queste operazioni non sono invertibili e costituiscono quindi un'irrecuperabile perdita di informazioni. Ad esempio, se tutti i valori di grigio al di sotto di una certa soglia L vengono sostituiti dal valore 0 (=nero) e tutti quelli al di sopra di una certa soglia H dal valore 255 (=bianco), non potrà più ricostruire i valori iniziali.

Un esempio di operazione invertibile è invece la negazione, che può essere cancellata ovviamente da un'ulteriore negazione; si realizza, ad esempio, tramite la formula:

$$P_N(q) = Q - 1 - q$$

dove q è il valore assegnato inizialmente al singolo pixel e $Q-1$ è il valore massimo assunto da q ; l'operazione inversa sarà:

$$P_N(P_N(q)) = Q - 1 - (Q - 1 - q) = q$$

Per risolvere il problema dei lunghi tempi di calcolo, si utilizzano le cosiddette "look-up-table", cioè delle tabelle in cui compare, già calcolato per ogni livello di grigio della codifica digitale, il livello corrispondente dopo la trasformazione. In questo modo non è necessario ogni volta calcolare per ogni pixel il nuovo livello di grigio, che si ottiene invece dal confronto diretto con la look-up-table.

Lo studio degli effetti delle trasformazioni sulle immagini è facilitato dall'utilizzo degli istogrammi. L'istogramma di un'immagine f è una funzione $P_f(r)$ che specifica con quale frequenza viene assunto il livello di grigio r ; la frequenza f è data dal rapporto del numero n di volte in cui compare quel determinato livello e il numero totale di pixel, cioè:

$$f = \frac{n}{N}$$

Alcuni tipi di operazioni omogenee riguardano la valutazione e l'ottimizzazione dell'illuminazione e del contrasto per migliorare la qualità visiva di un'immagine. La più semplice trasformazione di questo tipo è quella li:

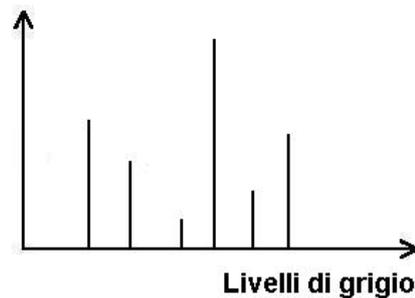
$$s = ar^n + b$$

dove r sono i livelli di grigio dei pixel originali e s quelli trasformati; n è un numero anche frazionario ed il coefficiente angolare a aumenta o diminuisce il contrasto, a seconda che a sia maggiore o minore di 1, mentre il coefficiente b abbassa o alza la luminosità.

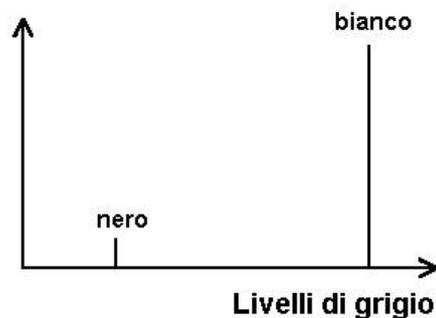
Esistono poi le operazioni puntuali non omogenee, nelle quali conta anche la posizione dei pixel nell'immagine. In questo caso non possiamo utilizzare le look-up-table e siamo costretti a calcolare la trasformazione per ogni pixel. Un semplice esempio di questo tipo di operazioni è la sottrazione dello sfondo B , rappresentata dalla funzione:

$$G'(m,n) = P_{nm}(G(m,n)) = G(m,n) - B(m,n)$$

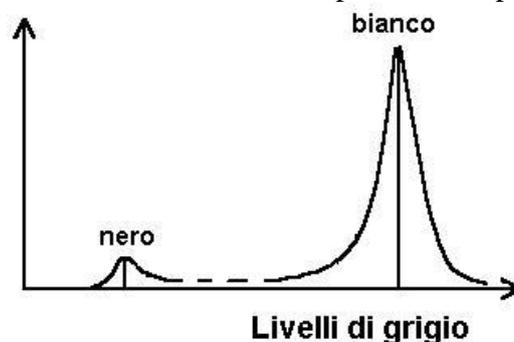
Se pensiamo al disegno di un architetto, l'istogramma risulterà molto semplice, come nella figura sottostante:



così come l'immagine di un quadrato nero su sfondo bianco sarà chiaramente rappresentata dal seguente istogramma:



L'istogramma di un'immagine reale sarà invece molto più complesso. Ad esempio lo stesso quadrato nero su sfondo bianco, per la presenza del rumore e per la bassa risoluzione, sarà rappresentato da una distribuzione di valori attorno ai due picchi corrispondenti ai due valori principali.



Le distribuzioni di valori attorno ai picchi trovano origine nell'incertezza di misura all'interno del quadrato e dello sfondo, mentre l'imprecisione sui bordi del quadrato nero fa comparire una serie di valori intermedi tra le due distribuzioni (zona tratteggiata).

Particolare attenzione va posta poi nell'assegnazione dei livelli di grigio, per evitare che il valore massimo (bianco) corrisponda al livello massimo (ad esempio al valore 255 nella codifica a 8 bit) cioè alla saturazione.

Inoltre c'è una gamma di livelli a cui l'occhio umano risulta più sensibile, oltre al fatto che un individuo è in grado di distinguere al massimo 64 livelli di grigio. Il nostro occhio è comunque capace di capire che un'immagine è in realtà molto più contrastata. Questo avviene ad esempio se il rumore è quasi del tutto assente e si hanno pertanto dei livelli con un'incertezza molto piccola; oppure se tra diversi punti dell'immagine varia la luminosità (come in un bellissimo dipinto del Caravaggio!), in modo che l'occhio creda di risalire nella scala dei grigi; o ancora, più semplicemente, se al posto dell'immagine si guardano direttamente i valori dei diversi pixel.

Ritornando ai diversi tipi di operazioni, è necessario introdurre il concetto di *segmentazione* di un'immagine. Un'immagine complessa ha un istogramma complesso e può risultare utile definire una *ROI (Region Of Interest)*, cioè considerare solo una parte del quadro, ad esempio un singolo oggetto. Si arriva così all'importante postulato che afferma che le proprietà di un'immagine sono locali, non globali; questa dovrà essere considerata come una giustapposizione di oggetti fra loro indipendenti (approssimazione tanto più vicina alla realtà quanto più i pixel risultano scorrelati tra loro).

Noi conosciamo due possibili tipi di segmentazioni:

una segmentazione manuale, in cui si fissa cioè una determinata soglia;

una segmentazione che nasce dall'estrazione di un oggetto dall'immagine, dividendola dallo scenario; in un'immagine ben contrastata questo è facilmente ottenibile operando una binarizzazione, ad esempio mettendo una soglia e rassegnando il valore 1 a tutti i pixel sotto la soglia. Ovviamente variando di poco la soglia cambierà un po' la dimensione dell'oggetto selezionato, ed ecco perché questo procedimento risulta più facile se si ha una variazione di livelli molto significativa rispetto allo sfondo.

Possiamo quindi ipotizzare delle operazioni che agiscano sull'immagine localmente: sono i cosiddetti *kernel*, rappresentati da piccole matrici di pesi scelti opportunamente.

Consideriamo ad esempio di volere agire su una sottomatrice 3x3 della griglia, evidenziata dalla figura sottostante:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

presa la seguente maschera

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

la sovrapponiamo alla griglia dell'immagine e sostituiamo poi al valore centrale della sottomatrice, a_{22} , il risultato della somma pesata:

$$a_{22}' = \sum a_{ij} b_{ij}$$

Questo procedimento è quello che si dice “kernelare” un’immagine. Si può dimostrare che è un’operazione di convoluzione locale, ed in realtà il suo ruolo è quello di deconvolvere un’immagine o, in altre parole, di migliorare la perdita di risoluzione.

Tali operatori servono ad esempio per operare una sorta di restauro dell’immagine, come gli operatori di *sharpening*, che rendono i bordi dei singoli oggetti più ripidi.

Un altro utilizzo può essere quello di estrarre informazioni dall’immagine. Possiamo pensare ad esempio di evidenziare i punti in cui l’immagine varia con gli operatori di derivazione. Tali operatori compiono il riconoscimento degli oggetti: attraverso un opportuno filtraggio, viene costruita, a partire dall’immagine originaria in cui compaiono dei bordi degradati, un’altra immagine di soli bordi (si esegue cioè una sorta di *scheletrizzazione* dell’immagine); quest’ultima può essere poi sovrapposta all’immagine di partenza, ottenendone una copia con i bordi evidenziati. Dal punto di vista matematico, un bordo “ideale” è una discontinuità della funzione spaziale g che descrive il valore di grigio sul piano immagine, ma nel caso reale andrà formulato un modello dei bordi contenuti nell’immagine che deve essere analizzata. Comunque il riconoscimento dei bordi è basato su un filtraggio di tipo PASSA-ALTO, perché vanno enfatizzati i cambiamenti tra i valori di grigio e soppresse le aree a valori di grigio costante. L’operazione base è la differenziazione; bisogna tener presente però che nelle immagini discrete si ha a che fare con differenze discrete. Si possono utilizzare inoltre operatori di derivata prima e seconda, tenendo conto del fatto che la derivata seconda si annulla in presenza del bordo, dove la derivata prima ha invece un massimo.

E’ importante sottolineare che tutte queste maschere esaltano soltanto i bordi ortogonali all’asse lungo cui si deriva.

Un operatore che opera una derivazione lungo l’asse x sarà ad esempio di questo tipo

$$D_x = [1 \ -1]$$

e metterà in evidenza i bordi lungo l’asse y ; la maschera trasposta allo stesso modo evidenzierà i bordi lungo l’asse x . Esistono poi degli operatori quadrati che eseguono il gradiente in diagonale, noti come *operatori di Roberts*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esistono infine degli operatori più complessi per il calcolo delle derivate seconde, che eseguono in cascata due derivate prime.

Ovviamente il grande nemico di questi filtri è il rumore, che può rappresentare un limite notevole per il loro utilizzo.

Abbiamo parlato di operatori di derivazione e li abbiamo classificati come filtri passa-alto. Un filtro che sicuramente è passa-basso è invece l’operatore che esegue la media dei valori di una determinata zona, rappresentata dalla matrice avente tutti pesi uguali:

$$\begin{pmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Tali operatori compiono una delle operazioni fondamentali nell'elaborazione delle immagini, alla base del riconoscimento degli oggetti. L'oggetto (nei casi più semplici) è identificabile da una regione a valore di grigio costante chiaramente distinguibile da quello dello sfondo o degli altri oggetti; un tale valore di grigio sarà ripristinato attraverso il calcolo del valor medio, perché in generale, nella regione di interesse, il valore di grigio mostrerà delle variazioni dovute a diverse cause. Innanzitutto queste possono essere dovute a qualche disomogeneità nell'oggetto stesso, ma possono anche essere originate dal processo di formazione dell'immagine: ad esempio è sufficiente un'illuminazione non uniforme e, ovviamente, la presenza di rumore.

In ultimo abbiamo lasciato le operazioni globali, che riguardano appunto l'immagine nel suo complesso. Non approfondiremo qui tale problematica, limitandoci ad evidenziare alcune di queste operazioni, come ad esempio quelle tese a migliorare la risoluzione o a ridurre il rumore. Un esempio di problema globale è la ricostruzione della struttura ossea di una persona, in cui c'è ovviamente una interdipendenza tra i diversi punti dello scheletro.

CAP.4 LA TEORIA DI ROSE

Finora abbiamo trattato separatamente i concetti di contrasto, rumore, risoluzione che risultano però indissolubilmente legati tra loro. Tali problematiche sono basilari per un sistema di immagine e sono incorporati nei concetti di SNR, MTF e spettro di Wiener. Qui di seguito analizzeremo il modello di Rose, le curve contrasto-dettaglio e l'analisi ROC che riguardano lo studio simultaneo della risoluzione spaziale, del contrasto, del rumore e anche della capacità dell'osservatore di valutare un sistema di immagine.

Il modello di Rose è una elaborazione matematica che mette in relazione l'SNR necessario per osservare un oggetto di una certa misura con un dato livello di contrasto. I tre concetti di risoluzione (misura dell'oggetto), rumore e contrasto sono considerati simultaneamente e il modello è in grado di predire se un oggetto di una data misura e contrasto può essere rilevato in un'immagine con un determinato rumore e con una fissata fluensa di fotoni.

È possibile eseguire un semplice esperimento in cui un certo numero di osservatori annota la misura del più piccolo oggetto che può rivelare ad un certo livello di contrasto e con un dato livello di rumore. Il risultato di una tale analisi è una curva contrasto-dettaglio nella quale la misura del più piccolo oggetto osservabile è riportata con il suo contrasto per una dato livello di rumore. Queste curve rappresentano il modello di Rose. Ovviamente per uno stesso sistema di immagini avremo differenti curve al variare del rapporto segnale-rumore: aumentando la fluensa, ad esempio, aumenterà anche l'SNR e sarà quindi possibile, con uno stesso livello di contrasto, vedere oggetti più piccoli.

Dobbiamo osservare che un tale modello è applicabile solo ad immagini "a basso contrasto" che risultano pertanto *noise-limited*, cioè per le quali la percettibilità dell'oggetto è limitata dalla presenza del rumore. Per immagini "ad alto contrasto" il sistema sarà invece "resolution-limited", ovvero sarà limitato dall'impossibilità di vedere oggetti infinitamente piccoli.

4.1 IL MODELLO DI ROSE

Analizziamo ora da un punto di vista più matematico quanto appena discusso. Come abbiamo visto, la teoria di Rose è fondamentalmente un modello probabilistico di rilevazione di soglie a basso contrasto. Un osservatore necessita cioè di un certo rapporto segnale-rumore per distinguere un oggetto dal suo background e questo in situazioni di basso contrasto nel quale il numero di fotoni N nell'oggetto sia approssimativamente uguale al numero di fotoni nel background (avente la stessa area A).

Possiamo scrivere allora le seguenti relazioni:

$$N = \Phi \cdot A$$

$$C = \frac{\Delta N}{N}$$

$$S = \Delta N = C \cdot N$$

$$R = \sqrt{N}$$

e quindi infine:

$$SNR = C \cdot \sqrt{N} = C \cdot \sqrt{\Phi A} = K$$

dove abbiamo indicato con:

Φ = la fluena;

C = il contrasto;

S = il segnale;

R = il rumore;

K = il valore costante del rapporto segnale-rumore.

Rose trovò sperimentalmente che un osservatore necessita di un SNR (K) tra 5 e 7 per separare un target a basso contrasto dal suo background, o, più precisamente, per avere una probabilità del 50% di distinguere l'oggetto.

4.2 LE CURVE CONTRASTO-DETTAGLIO E LA LORO DETERMINAZIONE SPERIMENTALE

Le curve contrasto-dettaglio nascono dall'esigenza di confrontare differenti sistemi di immagini.

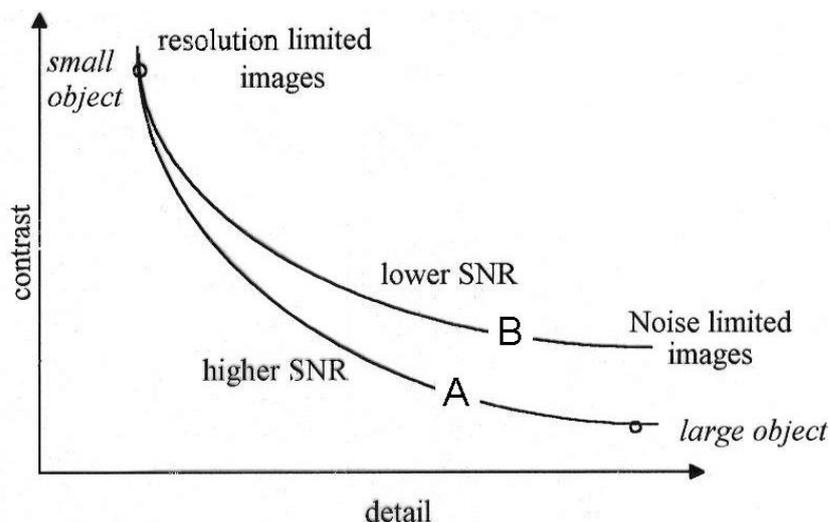


Figura 30 Curve contrasto-dettaglio

Dal grafico si evidenzia ad esempio che il sistema A è migliore del sistema B, perché, a parità di contrasto, consente di distinguere dettagli più piccoli

Per ottenere tali curve si usa generalmente un pezzo di plastica "wedge-shaped" (cioè a forma di cuneo), con dei fori di diverse dimensioni riempiti con plastica e con spessore variabile che determina i differenti livelli di contrasto.

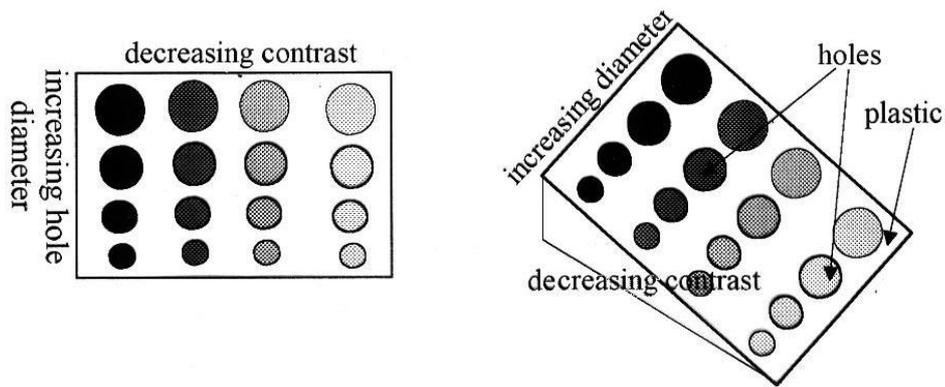


Figura 31 Wedge-shaped tool

Se Φ è la fluena attraverso un foro di diametro d , mentre Φ' è la fluena attraverso un'adiacente sezione di plastica di spessore t , allora il contrasto tra il buco e la plastica è:

$$C = \frac{\Phi - \Phi'}{\Phi} = \frac{\Phi - \Phi \cdot e^{-\mu \cdot t}}{\Phi} \cong \mu \cdot t$$

dove l'ultima approssimazione è valida nel caso di situazioni di basso contrasto, se vale cioè la relazione $\mu t \ll 1$.

Poiché si ha in questo caso: $A = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$, possiamo scrivere infine:

$$K = SNR = \mu \cdot t \cdot d \sqrt{\Phi \frac{\pi}{4}}$$

Quindi se d e t variano in modo inversamente proporzionale allora il rapporto SNR rimane costante per una data fluena Φ .

Allora una linea che connette fori con diametri crescenti (per un fattore f) e con contrasti decrescenti (sempre per lo stesso fattore f), rappresenta una linea con SNR costante. Se fissiamo ad esempio il valore di SNR per cui si ha una probabilità del 50% di distinguere un target, oggetti di dimensioni e contrasto più grandi che si collocano quindi da una parte della linea corrispondente, possono essere rilevati con una probabilità più alta del 50%; oggetti dall'altra parte (con dimensioni e contrasto più bassi) con probabilità minori del 50%.

La figura seguente mostra invece come, a seconda delle caratteristiche degli oggetti, essi siano più o meno visibili.

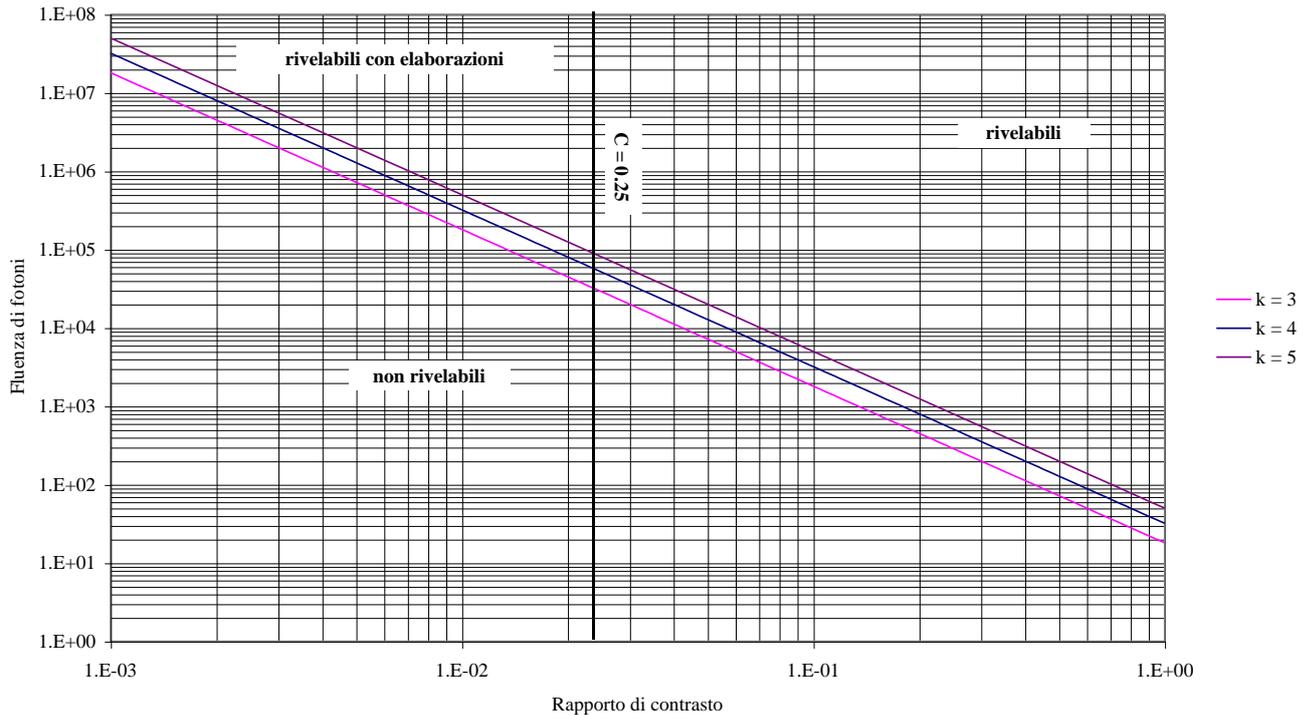


Figura 32 Visibilità degli oggetti al variare delle loro caratteristiche

4.3 L'ANALISI ROC (Receiving Operator Characteristic)

Le curve ROC sono usate per confrontare diversi sistemi d'immagine. Nell'analisi ROC la *True Positive Fraction* (TPF) di un test diagnostico è graficata insieme alla *False Positive Fraction* (FPF).

Prendendo oggetti a metà tra visibile e invisibile si fa osservare l'immagine prodotta dal sistema di rivelazione a un gruppo definito di persone, annotando il numero di risposte positive e negative.

La TPF è il rapporto tra il numero di volte che una diagnosi è detta positiva quando è davvero positiva e il numero di casi realmente positivi:

$$TPF = \frac{\text{numero di decisioni positive corrette}}{\text{numero di casi realmente positivi}}$$

Analogamente la FPF è il rapporto tra il numero di volte in cui l'osservatore riconosce che una diagnosi positiva fatta è in realtà negativa e il numero di casi davvero negativi, cioè:

$$FPF = \frac{\text{numero di decisioni positive ricorrette}}{\text{numero di casi realmente negativi}}$$

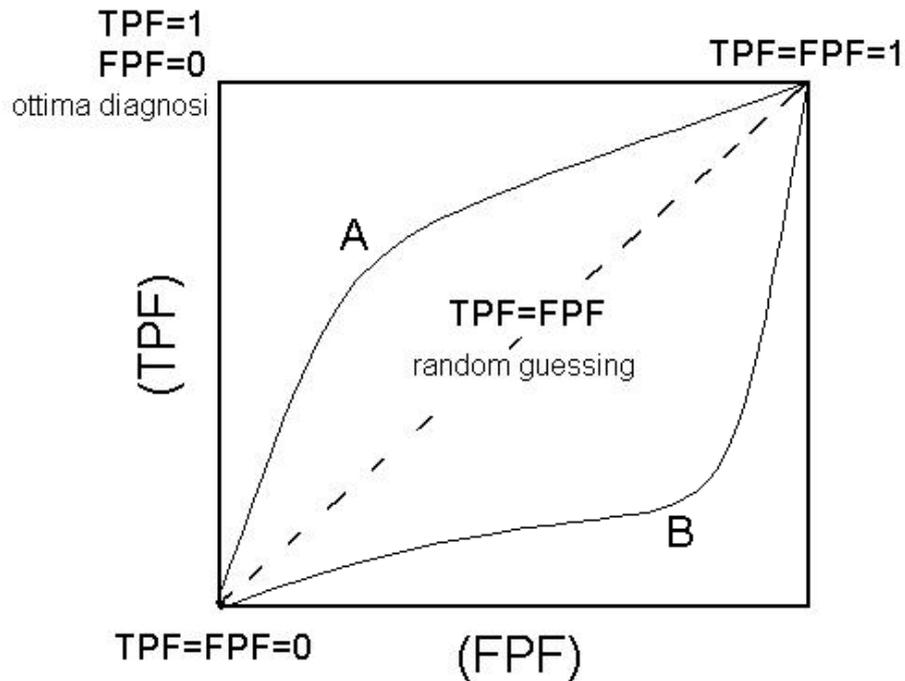


Figura 33 Curve ROC

E' chiaro che prendendo oggetti con contrasto crescente è sempre più facile individuare la giusta risposta.

Come evidenziato dalla figura sopra, il caso $TPF=FPF=0$ significa che l'osservatore afferma sempre che l'oggetto è assente, mentre il caso $TPF=FPF=1$ significa che l'osservatore dice che l'oggetto è sempre presente; un'ottima diagnosi si ha nel caso in cui $TPF=1$ e $FPF=0$.

La valutazione della bontà del sistema e' data dalle aree individuate dalle diverse curve: nella figura appare chiaro che la curva A è migliore rispetto alla curva B.

In pratica, quindi, l'analisi ROC porta ad una valutazione del sistema utilizzato nel suo complesso, non solo cioè per la qualità dell'immagine prodotta, ma con il fine di determinare l'affidabilità della diagnosi che può essere eseguita dall'osservatore in riferimento al particolare "task" cui siamo interessati (ad esempio una mammografia, un'ecografia, ecc.).

INDICE

| | |
|---|-----------|
| CAP.1 ANALISI DEI PROCESSI DI FORMAZIONE DELLE IMMAGINI..... | 1 |
| 1.1 LA RADIOGRAFIA | 8 |
| 1.2 LA SCINTIGRAFIA | 10 |
| CAP.2 COME SI CARATTERIZZA UN SISTEMA DI IMMAGINI..... | 10 |
| 2.1 LA LINEARITA' | 10 |
| 2.2 LA <i>POINT SPREAD FUNCTION</i> (PSF) | 12 |
| 2.3 LA RISOLUZIONE..... | 13 |
| 2.4 L'ANALISI DI FOURIER | 14 |
| 2.5 IL CONCETTO DI MODULAZIONE. LA <i>MODULATION TRANSFER FUNCTION</i> (MTF)..... | 15 |
| 2.6 IL CONTRASTO..... | 17 |
| 2.7 LA DISTRIBUZIONE DEL NUMERO DI CONTEGGI N | 24 |
| 2.8 IL RAPPORTO DI CONTRASTO..... | 24 |
| 2.9 IL RAPPORTO SEGNALE RUMORE (<i>SIGNAL TO NOISE RATIO</i>)..... | 26 |
| 2.10 PROCEDURE DI MISURA | 26 |
| 2.11 L'EFFICIENZA QUANTICA DEL RIVELATORE | 27 |
| 2.12 IL RUMORE E LO SPETTRO DI WIENER..... | 28 |
| CAP.3 LE IMMAGINI DIGITALI | 31 |
| 3.1 IL CAMPIONAMENTO DI UN'IMMAGINE | 31 |
| 3.2 IL PROBLEMA DELL' <i>ALIASING</i> | 34 |
| 3.3 LA CONVERSIONE ANALOGICO DIGITALE..... | 34 |
| 3.4 L'IMMAGINE DIGITALE COME MATRICE DI NUMERI | 36 |
| 3.5 LA DINAMICA..... | 36 |
| 3.6 LE OPERAZIONI SULLE IMMAGINI DIGITALI..... | 36 |
| ERRORE. IL SEGNALIBRO NON È DEFINITO. | |
| CAP.4 LA TEORIA DI ROSE | 43 |
| 4.1 IL MODELLO DI ROSE..... | 43 |
| 4.2 LE CURVE CONTRASTO-DETTAGLIO E LA LORO DETERMINAZIONE SPERIMENTALE..... | 44 |
| 4.3 L'ANALISI ROC (<i>RECEIVING OPERATOR CHARACTERISTIC</i>)..... | 46 |