

# **EXPERIMENTAL FLUID MECHANICS**

**Preliminary Lecture Notes**

(G.P. Romano)

## OUTLINE

### INTRODUCTION: CONSIDERAZIONI GENERALI SULLA FLUIDODINAMICA SPERIMENTALE

#### 1. SISTEMI DI MISURA PRIMARI

- 1.1 Generalità.
- 1.2 Sistemi di misura delle forze su un modello.
- 1.3 Sistemi di misura della pressione.
- 1.4 Sistemi di misura della portata.

#### 2. FLOW VISUALIZATION AND TRACERS

- 2.1 The behavior of discrete and continuous tracers.
- 2.2 Light scattering by solid particles.

#### 3. ADVANCED MEASUREMENT TECHNIQUES IN FLUID MECHANICS

- 3.1 Velocity field measurement systems.
- 3.2 Single and multi-hole Pitot tubes.
- 3.3 Ultrasound Anemometry (UA).
- 3.4 Image analysis techniques: Particle Image Velocimetry (PIV).
- 3.5 Advanced algorithms for processing of PIV images.
- 3.6 Methods for pre and post processing of images.
- 3.7 Identification of vortical structures.

#### 4. ANALISI DI SEGNALI FLUIDODINAMICI

- 4.1 Generalità.
- 4.2 Richiami di calcolo delle probabilità e statistica.
- 4.3 Scale temporali e spaziali nei flussi turbolenti.

#### **References:**

- AA.VV., Handbook of Experimental Fluid Mechanics, Springer-Verlag, 2007
- B.R. Munson, D.F. Young, T.H.Okiishi, Fundamentals of Fluid Mechanics, Wiley, 1995
- W. Merzkirch, Flow Visualization, Academic Press, 1987
- F. Mayinger, Optical Measurements, Springer-Verlag, 1995
- J. Kompenhans & P. Raffel, PIV: a Practical Guide, Springer-Verlag, 2001

# Introduction

## CONSIDERAZIONI GENERALI SULLA FLUIDODINAMICA SPERIMENTALE

### GENERALITA'

Ai fini della definizione di un progetto (di un velivolo, di un veicolo o di un motore) o della comprensione dei fenomeni fisici coinvolti, lo studio di un particolare campo fluidodinamico, può essere intrapreso tramite una delle tre dimensioni della fluidodinamica: sperimentale, teorica e numerica. Questi tre approcci, elencati nell'ordine nel quale storicamente si sono avvicinati, sono a tutt'oggi ugualmente importanti e complementari piuttosto che sostitutivi uno dell'altro e solo l'interazione tra i tre può fornire conclusioni pienamente soddisfacenti. Ciò premesso, bisogna comunque mettere in evidenza i vantaggi e svantaggi reciproci al fine di poter valutare quali sono le limitazioni dell'approccio utilizzato:

	<b>Sperimentale</b>	<b>Teorico</b>	<b>Numerico</b>
<b>Vantaggi</b>	- flussi reali - accuratezza - elevati numeri di Reynolds - condizioni di turbolenza	- soluzioni esatte - condizioni al contorno	- variazioni parametri - condizioni al contorno - separazione fenomeni - tempi e costi
<b>Svantaggi</b>	- errori sperimentali - similitudine - limitata variazione parametri - difficoltà in presenza di: più specie chimiche, gradienti di temperatura - condizioni al contorno - tempi di utilizzo e costi	- condizioni particolari - equazioni semplificate - geometrie semplici	- errori numerici - bassi numeri di Reynolds - condizioni di turbolenza - modello matematico

Tabella 1. Vantaggi e svantaggi di ciascuno dei tre approcci possibili alla fluidodinamica.

Come la fluidodinamica numerica, che ha avuto un notevole sviluppo negli ultimi venti anni grazie allo sviluppo dei calcolatori, anche la fluidodinamica sperimentale ha conosciuto ultimamente un notevole sviluppo. Negli ultimi anni si sono sviluppate tecniche sperimentali che permettono di acquisire una notevole mole di dati e di elaborarli in tempi ragionevoli; simultaneamente gli impianti sperimentali hanno conosciuto una riduzione in dimensioni e costi ed una maggiore specificità. Si e' quindi creata una situazione nella quale il problema consiste nell'interpretazione dei dati acquisiti, nell'individuazione di metodi di analisi che mettano in luce aspetti particolari e più praticamente anche nell'archiviazione dei dati per utilizzi futuri. Per fare un esempio: si e' passati da un numero di dati acquisiti di circa mille per ogni punto di misura (in numero complessivo al massimo pari a qualche decina) a milioni di dati (anche sotto forma di immagini) su reticoli di misura superiori a  $1000 \times 1000$ . Da questo punto di vista, risulta tuttora insufficiente la memoria dei calcolatori e sono necessari dispositivi di archiviazione aggiuntivi (dischi dedicati, dischi magneto-ottici, CDRom etc...). In modo parallelo alla crescita del numero di dati e' cresciuta l'affidabilità statistica dei risultati ottenuti (anche se ciò non evita l'insorgere di interpretazioni erronee dei dati). Bisogna anche considerare che l'elevato numero di dati può richiedere maggior tempo di acquisizione e utilizzo dell'impianto (e quindi aumento dei costi).

## **ERRORI NELLA FLUIDODINAMICA SPERIMENTALE**

Nella fluidodinamica sperimentale, come in qualsiasi altra misurazione, sono presenti una serie di *errori* ( $\varepsilon$ ) (o, meglio, incertezze) in ciascuna delle operazioni che vengono effettuate per indagare il comportamento di un fluido e/o simularlo tramite un modello in scala. Si definisce *accuratezza* di una misura il complemento a 1 (100% di accuratezza) della differenza relativa (in valore assoluto) tra il valore misurato ( $M_G$ ) e il valore "vero" della grandezza in esame ( $V_G$ ) (di solito i valori relativi sono costruiti come percentuale del valore di fondo scala del sistema di misura). Essendo quest'ultimo in generale incognito, per valutare l'accuratezza di un certo sistema di misura e' necessaria una procedura preliminare di calibrazione, cioè una procedura di misura della grandezza quando il suo valore sia già noto. Inoltre, poiché il valore misurato e' dato dalla differenza tra il valore vero e l'errore complessivo della misura,

$$M_G = V_G \pm \varepsilon \quad (1.1)$$

si può anche affermare che l'accuratezza sia data dal complemento a 1 della somma degli errori relativi (percentuali) commessi nella valutazione della grandezza misurata

$$Accuratezza = 1 - (|M_G - V_G| / V_{Gmax}) = 1 - (|\varepsilon| / V_{Gmax}) = 1 - |\varepsilon_r|.$$

Gli errori sono sostanzialmente di due tipi: *errori sistematici* ed *errori casuali*. I primi sono dovuti a deviazioni sistematiche del valore misurato da quello vero, determinate sempre dalla stessa causa (e di non facile identificazione a causa della loro sistematicità). Gli errori casuali, invece, si manifestano come deviazioni casuali dei valori misurati dovute a fluttuazioni imprevedibili nella catena di misura. Con il termine *precisione* si intende l'accuratezza dovuta ai soli errori casuali (quindi un sistema di misura preciso fornirà più o meno sempre la stessa misura). L'accuratezza sarà data dalla precisione meno il contributo relativo degli errori sistematici e sarà quindi sempre inferiore (o al più uguale) alla precisione. Nella figura 1 sono mostrati tre esempi di risultati di una misurazione (il centro rappresenta la misura "vera" e i cerchi concentrici l'allontanamento percentuale da questa): nel primo caso abbiamo a che fare con misure precise ma non ugualmente accurate a causa della presenza di un errore sistematico e di piccoli errori casuali (*a*), nel secondo le misure sono meno precise che in precedenza, pur avendo uguale accuratezza, a causa di più elevati errori casuali (in assenza di errore sistematico) (*b*) e nel terzo caso sono precise ed accurate essendo in presenza di soli piccoli errori casuali (*c*). Valori degli errori commessi tramite alcune tecniche di misura utilizzate in fluidodinamica sperimentale verranno forniti nel seguito; e' comunque difficile che si ottengano misure con errori inferiori all'1% (accuratezza e precisione dell'ordine del 99%).

Possiamo quindi riassumere il risultato di una misura nei termini della relazione (1.1) dove in  $\varepsilon$  sono contenuti sia gli errori sistematici che casuali. Questi ultimi, in realtà, devono essere considerati sotto due aspetti differenti. Infatti, vi e' un errore casuale dovuto al fatto che, pur in presenza di variazioni della grandezza da misurare, il sistema di misura fornisce sempre la stessa risposta e viene quindi commesso un certo errore detto errore massimo. Ma vi e' anche una variabilità intrinseca della stessa grandezza (causata da fluttuazioni intrinseche della grandezza e da un non perfetto controllo di tutte le condizioni al contorno) e una non riproducibilità di funzionamento dello strumento di misura. Questa variabilità da origine ad un insieme di valori misurati della grandezza in esame ( $M_{iG}$ ) che sarà caratterizzato da valori statistici quali la media ( $\overline{M}_G$ ) e la deviazione standard ( $\sigma_G$ ): la deviazione standard rappresenta l'errore statistico della misura (si consideri che per una distribuzione gaussiana, quale quelle normalmente incontrate nelle misure, il 99.7% dei dati sono compresi in un intervallo pari a  $\pm 3\sigma_G$ ).

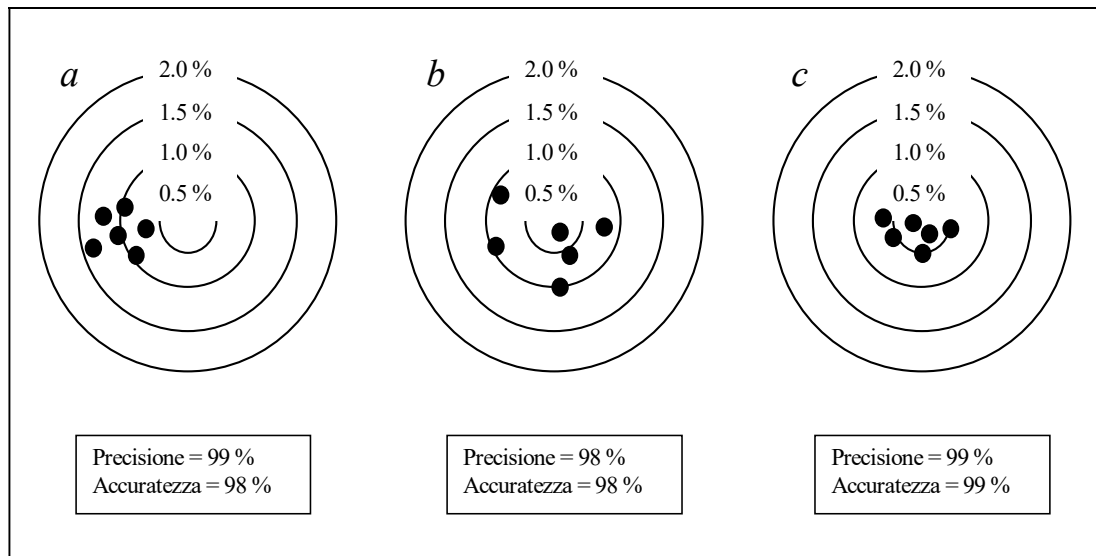


Figura 1. Esempio di presenza di errori sistematici e casuali e valori della precisione e dell'accuratezza della misura.

Possono presentarsi le seguenti situazioni (in assenza di errori sistematici):

- la misura fornisce sempre lo stesso risultato; in questo caso l'errore massimo è molto maggiore di quello statistico e il risultato della misura è espresso tramite la (1.1) dove  $\varepsilon$  rappresenta proprio tale errore massimo;
- la misura fornisce risultati differenti; in questo caso l'errore statistico è molto maggiore di quello massimo e il risultato della misura sarà espresso dalla relazione (in maniera tanto più accurata quanto maggiore è il numero di valori dell'insieme,  $N$ ):

$$\overline{M}_G = V_G \pm \sigma_G / 2\sqrt{N} \quad (1.2)$$

- la misura fornisce pochi risultati differenti; in questo caso l'errore massimo è prossimo a quello statistico e il risultato della misura è espresso da un istogramma su pochi valori; il valor medio e la varianza saranno errati e si può esprimere il risultato della misura tramite la (1.1) con l'errore massimo dato da  $3\sigma_G$ .

Il discorso precedente vale qualora il risultato della misura fornisca direttamente la grandezza voluta (grandezza fondamentale). Se, invece che di una grandezza fondamentale, vogliamo ottenere il valore di una *grandezza derivata* (cioè se la misura non fornisce in uscita la grandezza voluta, ma un'altra che va convertita in quest'ultima tramite altre grandezze

fondamentali (misurate e non)), avremo la cosiddetta *propagazione degli errori*. Per ottenere un'espressione dell'errore sulla grandezza derivata, a partire da quelli sulle grandezze fondamentali, in queste condizioni, si assuma una generica relazione funzionale tra le grandezze fondamentali ( $M_{Gi}$ ) e quella derivata ( $M_Z$ ) del tipo  $M_Z = f(M_{Gi})$ .

Trattando di errori massimi, avremo il seguente valore per l'errore:

$$\varepsilon_Z = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial M_{Gi}} \right| \varepsilon_{M_{Gi}} \quad (1.3)$$

e, nel caso di errore relativo (indicato con  $\varepsilon^r$ ), divideremo questo risultato per il valore  $M_G$ .

Invece, per gli errori statistici, avremo (ipotizzando indipendenza statistica tra le grandezze  $M_{Gi}$ ):

$$\sigma_Z = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial M_{Gi}} \right)^2 \sigma_{M_{Gi}}^2} \quad (1.4)$$

e, nel caso di errore relativo, divideremo questo risultato per il valore  $\overline{M}_G$ . Le espressioni (1.3) e (1.4) diventano particolarmente semplici nel caso in cui si considera l'errore relativo per una grandezza derivata esprimibile come monomio di quelle fondamentali ( $M_Z = \Pi_i (M_{Gi})^{p_i}$ ):

$$\varepsilon_Z^r = \frac{\varepsilon_Z}{M_G} = \sum_i p_i \varepsilon_{M_{Gi}}^r \quad \text{per gli errori massimi} \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_Z^r = \frac{\sigma_Z}{M_G} = \sqrt{\sum_i p_i^2 (\varepsilon_{M_{Gi}}^r)^2} \quad \text{per gli errori statistici} \quad (1.6)$$

In presenza di più sorgenti di errori casuali, l'errore massimo e l'errore statistico complessivo di una grandezza fondamentale saranno dati da:

$$\varepsilon_{tot} = \sum_i \varepsilon_i \quad \text{per gli errori massimi} \quad (1.7)$$

$$\sigma_{tot} = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2} \quad \text{per gli errori statistici} \quad (1.8)$$

e, per una grandezza derivata, valgono le relazioni (1.3)-(1.6) nelle quali ciascun errore deve essere espresso complessivamente tramite le (1.7) e (1.8).

Verranno ora esaminati brevemente alcuni tipici errori (sistematici e casuali) commessi nella fluidodinamica sperimentale.

Errori causati dall'impianto utilizzato: appartengono a questa categoria tutti gli errori che si commettono lavorando in un ambiente limitato come una galleria del vento (o qualunque altro impianto sperimentale), come per esempio gli errori dovuti alla presenza di supporti, alla variazione indesiderata delle grandezze fluidodinamiche dell'apparato (pressione, temperatura, velocità), alla presenza delle pareti dell'impianto (crescita dello strato limite) e all'interferenza di queste con il modello (problemi di bloccaggio). Questi errori sono di solito sistematici (ma per esempio la presenza di un supporto può anche dare fluttuazioni che si trasformano in deviazioni casuali) e vanno valutati (e possibilmente corretti) prima di effettuare le misure e verranno approfonditi nella parte relativa agli impianti.

Errori causati dalla strumentazione utilizzata: ogni strumento di misura ha una sua precisione che dipende dal principio fisico su cui è basata la misura stessa, dal modo in cui tale principio viene applicato praticamente e dall'effetto sulla misura delle variazioni di condizioni ambientali. Anche in questo caso, prima di effettuare una misura, bisogna valutare la precisione della strumentazione utilizzata. Come esempio possono essere considerati gli errori di calibrazione (cioè gli errori sulle grandezze geometriche, elettriche e ottiche che influenzano la determinazione delle curve o dei parametri di calibrazione della strumentazione), gli errori introdotti dai convertitori e dai filtri del segnale, gli errori prodotti dalle schede di acquisizione e in generale gli errori dovuti alla presenza del rumore in ciascun passo del processo di misura. A questa categoria appartengono anche gli errori che si commettono con l'uso di traccianti da inserire nel flusso per misurarne alcune proprietà: la scelta di tali traccianti dovrà essere tale da minimizzare gli effetti sul campo fluidodinamico e ciò si traduce nell'impiego di sostanze non reagenti, di densità prossima a quella del fluido in esame e in quantità quanto più basse possibile (e comunque non tossiche !!). Si tratta di solito di errori casuali massimi e statistici che verranno approfonditi nella parte relativa alle tecniche di misura.

Fluttuazioni dovute alla turbolenza ed errori statistici: anche nella ipotesi teorica di assenza degli errori sistematici e casuali di cui in precedenza, si osserverebbero delle fluttuazioni delle grandezze



misurate nella fluidodinamica sperimentale causate dalla turbolenza del flusso. Queste fluttuazioni sono realmente presenti nel fluido e la loro caratterizzazione costituisce uno dei risultati che si vogliono ottenere da una campagna di misure. La teoria dell'analisi dei segnali aiuta a valutare quali errori si commettono nella trattazione di insiemi di dati (l'errore e' funzione del numero di dati acquisiti come nella (1.2)). Esempi di tali errori sono quelli associati alla valutazione dei momenti statistici, delle scale caratteristiche del flusso, delle funzioni di correlazione e degli spettri. Questi errori sono trattati come errori casuali statistici e vengono trattati nella teoria dell'analisi dei segnali.

## SPATIAL AND TIME RESOLUTION

Quando effettuiamo una misura di una grandezza fisica, utilizziamo della strumentazione la cui parte sensibile costituisce l'elemento che interagisce con la grandezza fisica da misurare e che genera o rappresenta essa stessa il cosiddetto volume di misura cioè la regione di spazio nella quale viene effettuata la misura. La misurazione stessa è effettuata valutando la risposta della strumentazione, nel suo complesso, dopo un certo intervallo di tempo detto intervallo di misura. When considering measuring techniques it is particularly important to consider the specific limits of each one, in order to be aware of the limitations in their use. In this sense, there are at least three arguments to be considered:

- experimental errors;
- space resolution;
- time resolution.

The first is based on the theory of error propagation and has been already considered in basic experimental fluid-mechanics courses, so that here considered as acquired. Nonetheless, specific points will be given for each considered measurement technique with laboratory practice.

Regarding space resolution,  $S_R$ , it is defined as the inverse of the minimum distance which can be measured by the specific technique,  $l$  (probe size, measurement volume typical size):

$$S_R = 1/l$$

So far, units are those of a length at minus one ( $m^{-1}$ ) and a high space resolution means a small typical size: for example for a Pitot tube, the typical size of the tube is in the order of  $0.5\text{ cm}$ , so that the space resolution is  $200\text{ m}^{-1}$ , whereas for the PIV technique these are typically  $10^{-4}\text{ m}$  and  $SR=10^4\text{ m}^{-1}$ . This resolution must be compared to the characteristic length scales of the flow field in order to determine the ability of the technique to resolve the spatial structure of the investigated field as depicted in the following figure.

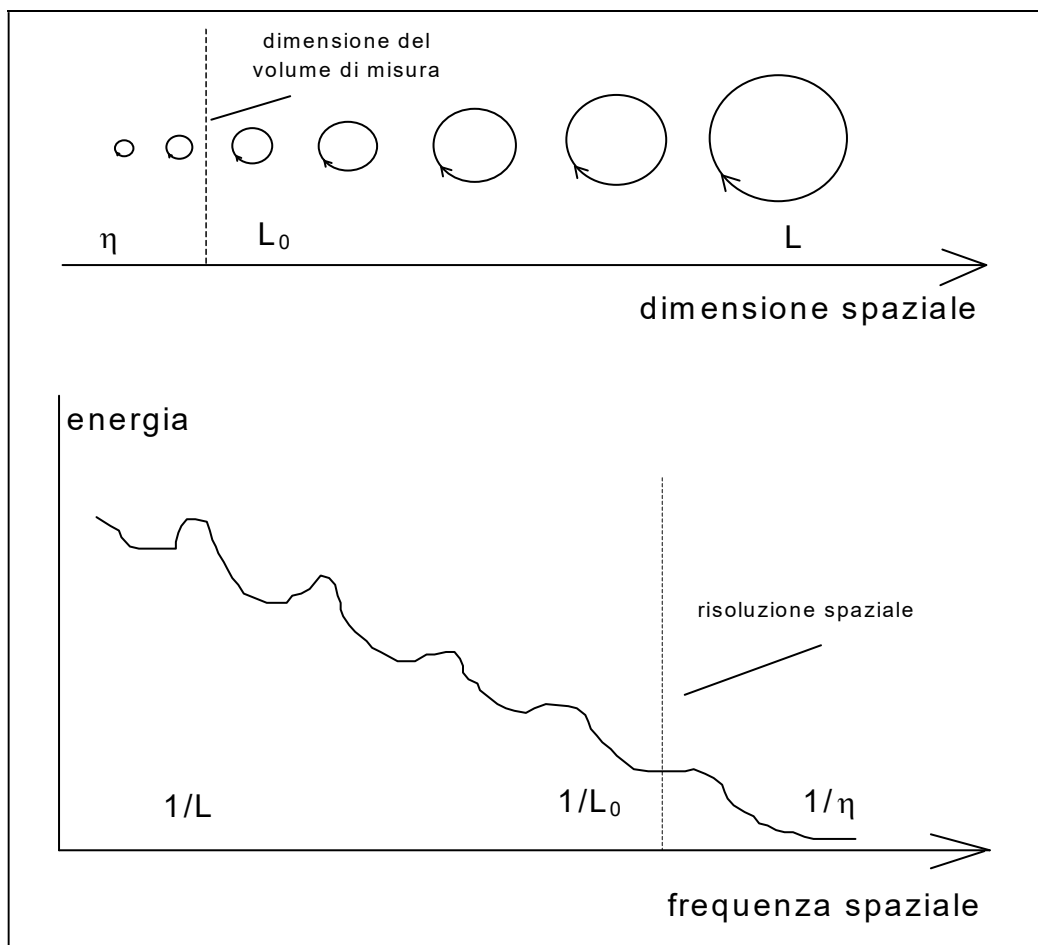


Figura 2. Effetto della risoluzione spaziale finita sulla descrizione di un insieme di strutture vorticosi di dimensione crescente (figura superiore) e corrispondente andamento nel dominio dei numeri d'onda (figura inferiore).

For resolution in time the discussion is similar,  $T_R$ , being defined as the inverse of the minimum time interval which can be measured by the specific technique,  $t_o$  (time interval to acquire one measurement data):

$$S_R = 1/t_o$$

So far, units are those of a time at minus one ( $t^{-1}$ ) and a high time resolution means a small typical time interval: for example for a Pitot tube, the typical time interval is in the order of 1 s, so that the time resolution is 1 Hz, whereas for the PIV technique these are typically  $10^{-3}$  s and  $SR=10^3$  Hz. This resolution must be compared to the characteristic time scales of the flow field in order to determine the ability of the technique to resolve the temporal structure of the investigated field. It is important to highlight that high resolutions are usually required when space and time relations among data are required (correlation and spectral functions), whereas a lower resolution can be used for the computation of statistical moments.

This second point is related to the time needed for a correct measurement. For a given fluid flow problem, it is usually possible to assess one large scale characteristic length (denoted as  $L$ , for example the chord of a wing, the diameter of a cylinder or of a jet for external flows and the channel transverse height or the diameter of a pipe for internal flows) and one large scale velocity ( $U_o$ , usually the free-stream, upstream or exit velocity). Therefore, it is possible to define a characteristic large scale time of the flow,  $\tau_F \approx L/U_o$ , (for example in a wind tunnel a wing with chord 10 cm and a free-stream velocity of 10 m/s, gives a time scale  $\tau_F \approx 10^{-2}$  s). This is a preliminary and simple way to compute a time large scale (the length large scale is of course equal to  $L$ ), to be used in order to select the proper measurement technique and check its performances in terms of space and time resolution, as previously reported. In addition, it can be also used to evaluate the time need ( $T_{ACQ}$ ) for a correct measurement of statistical moments, because it is required that  $T_{ACQ} \gg \tau_F$  (typically a factor 1000 ensures that we have at least 1000 independent samples). Therefore, it must be  $T_{ACQ} \approx 10^3 \tau_F \approx 10^3 L/U_o$ .

Being  $T_{ACQ} = N_{ACQ}/f_{ACQ}$ , where  $N_{ACQ}$  is the total number of acquired data and  $f_{ACQ}$  is the frequency of data acquisition (equal to the time resolution), it is

$$N_{ACQ} \approx 10^3 f_{ACQ} (L/U_o).$$

For example, using a Pitot tube ( $f_{ACQ} \approx 1$  Hz) and  $N_{ACQ} \approx 10$  samples, i.e. only ten samples are required, whereas using an UA anemometer ( $f_{ACQ} \approx 50$  Hz) and  $N_{ACQ} \approx 500$  samples, and using PIV anemometry ( $f_{ACQ} \approx 1000$  Hz) and  $N_{ACQ} \approx 10000$  samples, that is as higher the frequency of acquisition, as larger the number of required samples.

tracer particles, as described in next chapter.

## SISTEMI DI UNITA' DI MISURA

Accenniamo brevemente al problema delle unità di misura di una grandezza fisica. Un sistema di misura è un insieme di unità di misura basato su grandezze fondamentali. Tale sistema deve essere indipendente dal luogo in cui si effettua la misura (sistema di misura assoluto): per esempio un sistema di misura contenente il peso del campione di riferimento sarebbe dipendente dalla quota sul livello del mare e dalla latitudine del luogo nel quale si effettua la misura; è quindi preferibile utilizzare la massa in luogo del peso del campione di riferimento. Nonostante questo, per ragioni di comodità, si usano comunque sistemi non assoluti (sistemi tecnici).

Il Sistema Internazionale (SI) ha come unità di misura fondamentali quelle di lunghezza (metro,  $m$ ), di massa (chilogrammo,  $Kg$ ), di tempo (secondo,  $s$ ), di temperatura (grado Kelvin,  $^{\circ}K$ ), di corrente elettrica (ampere,  $A$ ), di intensità luminosa (candela,  $cd$ ) e di quantità di materia (mole,  $mol$ ). Ciascuna di queste unità di misura fondamentali rappresenta una ben precisa quantità fisica che può essere misurata in qualsiasi punto della Terra. Da queste unità fondamentali possono essere ottenute le unità di misura derivate (o composte): per esempio la velocità di un oggetto è misurata in  $m s^{-1}$ . Alcune unità derivate hanno nomi propri (newton, joule, watt, hertz etc.).

Per convertire le unità di misura da un sistema di misura ad un altro, è necessario utilizzare alcuni fattori di conversione dalle unità fondamentali di un sistema a quelle di un altro. Per esempio, per quello che riguarda la pressione, valgono i seguenti fattori di conversione:

$1 \text{ atmosfera} = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ pascal (Pa)} = 101325 \text{ N/m}^2 = 1.01325 \text{ bar}$	SI
$1 \text{ torr} = 13.59 \text{ mm H}_2\text{O} = 133.2 \text{ Pa}$	Unità tecniche
$1 \text{ millibar} = 10^3 \text{ dina/cm}^2 = 100 \text{ Pa}$	CGS

Senza entrare ulteriormente nel dettaglio dei differenti sistemi di unità di misura, si tenga presente che il risultato numerico di una misura deve essere affiancato dall'indicazione dell'unità di misura usata e dell'errore commesso.

## IL PROBLEMA DELLA SIMILITUDINE

Le equazioni della fluidodinamica sono equazioni dimensionali, nel senso che ogni termine possiede dimensioni fisiche uguali a quelle della grandezza considerata nell'equazione (massa,

quantità di moto ed energia) per unità di volume diviso per un tempo. Di conseguenza, volendo confrontare tra loro i differenti termini per stabilire quali sono preponderanti nelle diverse condizioni di moto, bisognerebbe considerare il valore di ciascuna grandezza nelle equazioni (lunghezze, tempi, velocità, temperature, pressioni, densità....) e calcolare il valore di ogni termine. Un metodo più pratico e più utile è quello di adimensionalizzare le equazioni e formare gruppi di variabili adimensionali che possano essere confrontati tra loro. A questo proposito si utilizzano le grandezze di misura fondamentali (massa, lunghezza, tempo e temperatura) e le loro unità di misura. La forma adimensionale delle equazioni consente anche di individuare in modo univoco quante e quali sono le grandezze fondamentali necessarie a descrivere completamente un dato problema fluidodinamico senza dover ricorrere alla ricerca di esse tramite il teorema di Buckingham. I risultati ottenuti con simulazioni numeriche e/o esperimenti per dati valori delle variabili possono essere estesi alla classe più ampia di valori che mantengono invariato il gruppo adimensionale caratteristico del problema in esame.

Per rendere adimensionali le equazioni, si prenderanno delle grandezze caratteristiche per le variabili fluidodinamiche e termodinamiche ( $u_i$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $c$  e  $T$ ) e per le variabili posizione ( $x_i$ ) e tempo ( $t$ ) (queste grandezze saranno derivate dalle condizioni al contorno e iniziali del problema e saranno indicate con il pedice  $o$ ):

$$\rho^* = \rho/\rho_o \quad u_i^* = u_i/U_o \quad p^* = p/p_o \quad t^* = t/t_o \quad x_i^* = x_i/L_o \quad T^* = T/T_o \quad (3.1)$$

dove si sono assunte pari a zero la pressione e la temperatura di riferimento,  $p'$  e  $T'$  (altrimenti al posto di  $p^* = p/p_o$  e  $T^* = T/T_o$  si scriverà  $p^* = (p - p') / p_o$  e  $T^* = (T - T') / T_o$ ). Dalla adimensionalizzazione delle equazioni di massa e quantità di moto (caso di flusso incomprimibile isoterma) vengono introdotti i gruppi adimensionali:

$$St = L_o/U_o t_o \quad (\text{numero di Strouhal})$$

(se il tempo caratteristico è sostituito da una frequenza caratteristica  $f_o$ , allora il numero di Strouhal sarà definito tramite  $f_o$ ). Notiamo che se  $t_o \approx L_o/U_o$ , allora il numero di Strouhal è circa unitario;

$$Re = U_o L_o / \nu \quad (\text{numero di Reynolds})$$

$$Fr = U_o / (gL_o)^{1/2} \quad (\text{numero di Froude})$$

$$Ru = \rho_o U_o^2 / p_o \quad (\text{numero di Rouark})$$

Notiamo che, per un gas perfetto isentropico, si può scrivere:

$$Ru = \rho_o U_o^2 / p_o = \gamma U_o^2 / a^2 = \gamma Ma^2$$

dove

$$Ma = U_o / a \quad (\text{numero di Mach}).$$

Ciascuno dei gruppi adimensionali definiti in precedenza e' stato ricavato come rapporto (o parte del rapporto) tra un termine dell'equazione considerata e il corrispondente termine inerziale (che in tutte le equazioni in forma adimensionale viene ad essere moltiplicato per l'unità). Di conseguenza, ciascun gruppo adimensionale può essere pensato come indicativo del rapporto tra le forze, i tempi, le velocità e le energie (o il calore) relativi a ciascun termine rispetto a quelle di inerzia:

$$St = \text{tempo (forza) convettivo } (L_o / U_o) / \text{tempo (forza) locale caratteristico del fenomeno}$$

$$Re = \text{forze di inerzia} / \text{forze viscosi}$$

$$Fr^2 = \text{forze di inerzia} / \text{forze gravitazionali}$$

$$Ru = \text{pressione dinamica} / \text{pressione statica} = \text{forze di inerzia} / \text{forze di pressione}$$

$$Ma^2 = (\text{velocità del fluido})^2 / (\text{velocità del suono})^2 = \text{forze di inerzia} / \text{forze elastiche}$$

Notiamo che ciascun numero può anche essere ottenuto direttamente da considerazioni dimensionali ( per esempio, considerando la forza di inerzia proporzionale a  $ma \approx \rho_o L_o^2 U_o^2$  e le forze viscosi dell'ordine di  $\mu U_o L_o$ , si ottiene proprio l'espressione del numero di Reynolds  $Re = U_o L_o \rho / \mu$ ).

L'aver scritto le equazioni in forma adimensionale permette di ottenere tre risultati:

- 1) determinazione di soluzioni delle equazioni in forma più generale e confronto con soluzioni numeriche più semplici (a parità di gruppi adimensionali);
- 2) individuazione delle forme asintotiche e semplificazione delle equazioni;
- 3) similitudini e analogie tra campi di moto.

Il primo punto significa che possiamo mettere a punto dei programmi di calcolo numerico per risolvere le equazioni che hanno soluzioni generali e non dipendenti dalla scelta particolare di

tempi, lunghezze, velocità, temperatura, pressione e densità ma solo dalle loro combinazioni nei gruppi adimensionali. Per il secondo punto, possiamo ottenere delle equazioni semplificate che conducono a soluzioni valide solo in alcuni regimi di moto (soluzioni asintotiche). Per il terzo punto, due campi fluidodinamici si dicono simili quando è verificata l'uguaglianza tra i gruppi adimensionali necessari (e sufficienti) alla descrizione completa del fenomeno in esame. L'applicazione della similitudine permette di studiare, numericamente o sperimentalmente, un fenomeno fluidodinamico a scala diversa da quella di partenza: nel primo caso si ottengono soluzioni numeriche di validità generale, mentre nel secondo si possono effettuare prove su modelli in scala ridotta. Tuttavia, non è possibile verificare l'uguaglianza tra tutti i gruppi adimensionali (e spesso anche tra solo alcuni) e bisognerà operare una scelta di quello effettivamente fondamentale per lo studio in oggetto. Per esempio, se abbiamo un campo fluidodinamico con una corrente in presenza di superficie libera, e richiediamo la similitudine contemporanea tra il numero di Reynolds e di Froude, otteniamo le due relazioni:

$$\frac{U_1 L_1}{\nu_1} \approx \frac{U_2 L_2}{\nu_2} \quad \frac{U_1}{(gL_1)^{1/2}} \approx \frac{U_2}{(gL_2)^{1/2}} \quad (2.8)$$

dove con i pedici 1 e 2 sono indicati il primo e secondo campo fluidodinamico. Per il rapporto tra le lunghezze otteniamo:

$$\frac{L_1}{L_2} \approx \frac{U_2 \nu_1}{U_1 \nu_2} \quad \frac{L_1}{L_2} \approx \left( \frac{U_1}{U_2} \right)^2$$

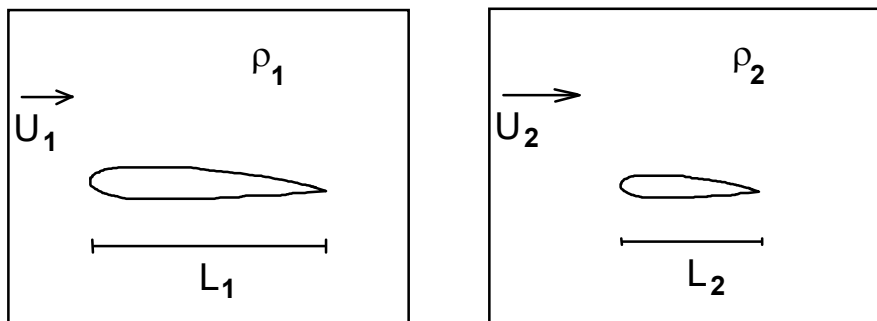


Figura 3. Similitudine geometrica, cinematica e dinamica tra campi di moto.

cioè se  $\nu_1 \approx \nu_2$  (viscosità cinematiche dei due fluidi uguali), la prima ci dice che se  $U_2 < U_1$  allora  $L_1 < L_2$ , mentre la seconda ci dice che  $L_1 \gg L_2$ . Allora, se siamo interessati più al campo di moto lontano dalla superficie libera, useremo la similitudine di Reynolds, se invece a quello in prossimità della superficie libera useremo la similitudine di Froude. L'alternativa è rimuovere la condizione di uguaglianza tra le viscosità cinematiche dei fluidi 1 e 2.

Con riferimento alla figura 3, si possono distinguere tre tipi di similitudine:

- 1) similitudine geometrica (riguarda le lunghezze);
- 2) similitudine cinematica (riguarda le lunghezze e i tempi, e quindi le velocità, e implica la 1));
- 3) similitudine dinamica (riguarda le lunghezze, i tempi e le masse, e quindi le densità e le forze, e implica la 1) e la 2)).

Come detto, l'analisi dimensionale alla Buckingham permette di individuare i gruppi adimensionali che verificano le tre similitudini, però dalle equazioni adimensionalizzate abbiamo già individuato i gruppi fondamentali che contengono le variabili geometriche, cinematiche e dinamiche e che quindi assicurano la verifica della similitudine nella sua forma più generale (cioè quella dinamica). Anche le condizioni al contorno e iniziali potranno essere considerate come condizioni di similitudine geometrica, cinematica e dinamica. La similitudine completa permette di generalizzare i risultati ottenuti su un campo di moto ad un altro avente valori di lunghezza, tempi (o velocità) e massa (o densità o forze) differenti, ma tali da dare gli stessi gruppi adimensionali.

Per quanto riguarda la Fluidodinamica Sperimentale, le similitudini più importanti per lo studio di modelli in scala sono quelle di Reynolds, Froude e Strouhal. La prima richiede impianti di dimensioni notevoli e/o alte velocità. Bisogna in particolare fare molta attenzione alla transizione da moto laminare a moto turbolento: un esperimento non può essere effettuato in condizioni laminari se in realtà avviene in condizioni turbolente perché le equazioni e la fisica del problema sono differenti. Tuttavia, mentre per  $Re < 500$  la similitudine deve essere verificata esattamente, per  $Re > 10^4$  possono esserci anche differenze nel numero di Reynolds in quanto i fenomeni di tipo turbolento tendono ad avere un comportamento asintotico al crescere di Reynolds.

Per quanto riguarda le non stazionarietà, cioè il numero di Strouhal, bisognerà distinguere se queste sono imposte dalle condizioni al contorno e iniziali (e allora la similitudine deve essere completa) o dalla presenza di instabilità locali del flusso (dove potrà essere anche parziale). Il primo caso corrisponde a forzanti esterne (eliche, elicotteri) e il secondo a scie a valle di corpi o a strati di mescolamento.



# Capitolo 1

## SISTEMI DI MISURA PRIMARI

### 1.1 GENERALITA'

La determinazione sperimentale delle variabili caratteristiche di un campo fluidodinamico (velocità, pressione, temperatura, densità, concentrazione) richiede l'uso di sistemi di misura i cui principi di funzionamento vanno compresi a fondo per un corretto uso dei dati ottenuti.

Si distinguono i sistemi di misura veri e propri, che permettono la determinazione quantitativa delle variabili, dai sistemi di visualizzazione che permettono un'analisi più qualitativa. In alcuni casi anche questi ultimi permettono di ottenere informazioni quantitative sulle variabili o su grandezze derivate (p.e. la visualizzazione di strutture vorticose in un campo di moto permette di individuarne le posizioni, dimensioni e le frequenze di generazione e interazione).

Per ogni sistema di misura individueremo la grandezza misurata, il principio di funzionamento, la metodologia della misura, la risoluzione spaziale e temporale del metodo (*cf.* 1° capitolo), gli errori di misura e le principali controindicazioni all'utilizzo del sistema. Verranno descritti in dettaglio i sistemi di misura del campo di forza e di pressione e quelli della portata.

### 1.2 SISTEMI DI MISURA DELLA FORZA SU UN MODELLO

La misura di forze intorno ad un oggetto in galleria del vento possono essere effettuate in 3 modi:

- direttamente attraverso l'uso di bilance dinamometriche.
- indirettamente attraverso l'effetto del modello sulla scia e sulle pareti del canale.
- indirettamente attraverso misura del campo di pressione intorno al modello.

Verranno descritti i principi di funzionamento di tutti e tre questi metodi.

### 1.2.1 Bilance dinamometriche

Il principio di funzionamento è la misura diretta della forza a partire dallo spostamento dalla posizione di equilibrio, quando il fluido viene messo in moto, di un elemento deformabile. La misura è effettuata tramite la lettura di questo spostamento che deve essere messo in relazione con il carico con una procedura di calibrazione. Come elementi deformabili vengono utilizzate capsule idrauliche (nelle quali vi è un pistone che esercita pressione su un fluido) o dispositivi elettrici (che variano la loro resistenza a seconda della pressione applicata o che variano la loro capacità a seconda della deformazione) con amplificatori. La grandezza misurata è quindi uno spostamento. La risoluzione spaziale è legata alle dimensioni dell'oggetto in prova, in quanto questo è un metodo globale che misura i carichi su tutto il modello. La risoluzione temporale è bassa perché le bilance necessitano di un certo tempo per raggiungere una posizione di equilibrio: fluttuazioni sulla scala temporale inferiore al minuto non sono apprezzabili. Le principali controindicazioni sono legate all'uso di un braccio di sostegno che influenza ed altera il comportamento del campo di pressione e quindi le forze. Si usano bilance dinamometriche a 3 componenti (per misurare portanza, resistenza e momento di beccheggio su un profilo alare o su una sezione di un corpo allungato) o a 6 componenti (per portanza, resistenza, forza laterale, momento di beccheggio, di imbardata e di rollio per un'ala o un corpo di forma qualsiasi) (*cfr.* figura 19). Per quello che riguarda la bilancia a 6 componenti, con riferimento alla figura 19 (e agli assi e ai versi di rotazione), si ha:

portanza	$-L = C + H + E$	( $C, H, e E$ sono definite negative)
resistenza	$D = A + B$	
forza laterale	$Y = F$	( $F$ è definita negativa)
momento di rollio	$R_p = (H - C)b/2$	(intorno all'asse $x$ )
momento di beccheggio	$M_p = El$	(intorno all'asse $y$ )
momento di imbardata	$S_p = (B - A)b/2$	(intorno all'asse $z$ )

(essendo P il punto rispetto al quale vengono calcolati i momenti e avendo preso positive le uscite A, B, C,...quando sono in estensione e negative quando sono in compressione).

Da un punto di vista costruttivo è fondamentale la perpendicolarità tra le componenti misurate (e l'allineamento con gli assi coordinati cioè con gli assi galleria) altrimenti una forza in una direzione apparirà come avente componenti anche nelle altre. Da un punto di vista della calibrazione è necessario sottrarre l'effetto della bilancia stessa (peso ed eventuali altre forze e momenti presenti).

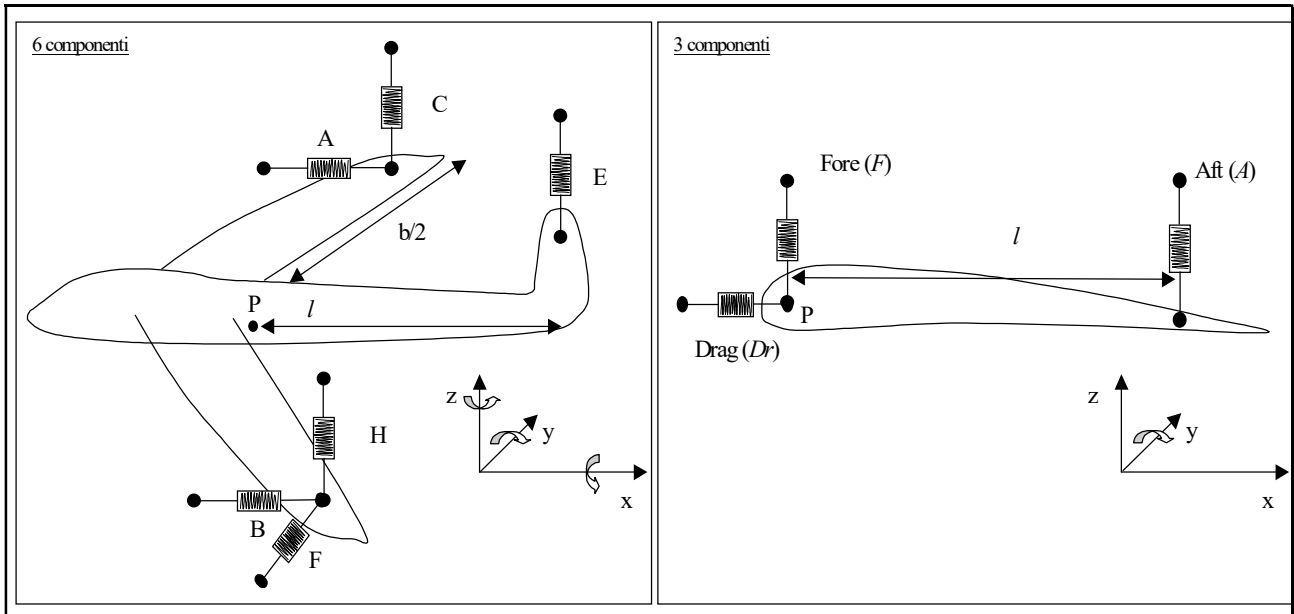


Figura 19. Deformazioni misurate da una bilancia a 6 (sinistra) e 3 componenti (destra).

Per la bilancia a 3 componenti, sempre con riferimento alla figura 19, vale:

portanza	$-L = F + A$
resistenza	$D = D_r$
momento di beccheggio	$M_p = Al$

(nella bilancia a 3 componenti in dotazione alla galleria del vento del Dipartimento e' presente un unico sostegno con un elemento lineare di lunghezza  $l$  al quale sono collegate le due celle di carico  $A$  ed  $F$ ; il momento di beccheggio rispetto alla posizione del sostegno sarà quindi  $M_p = A l/2 - F l/2 = (A-F) l/2 = 0.127 (A-F) \text{ N m}$ ).

I modelli sono sostenuti da fili di acciaio sottili (bilance meccaniche) o da bracci di sostegno (bilance elettroniche). Nelle bilance meccaniche si misurano le variazioni della lunghezza dei fili (ma questi si possono rompere con conseguente perdita del modello e quindi sono poco usati), mentre in quelle elettroniche l'uscita é un segnale elettrico in uscita da un trasduttore di forza che dovrebbe essere legato linearmente alla forza applicata. Quest'ultima relazione non é sempre verificata a causa di imperfezioni costruttive della bilancia o di deformazioni elastiche tra le varie parti che la compongono. Entrambe queste cause provocano un'interazione tra le forze misurate e un disallineamento che deve essere corretto mediante una procedura di calibrazione (che utilizza pesi noti e misura le uscite). Essendo le deformazioni non lineari funzione della temperatura, anche

la calibrazione può essere funzione della temperatura. La calibrazione consiste nel mettere in relazione l'uscita (di solito una tensione  $V$ ) con la forza applicata  $F$  per determinare la costante  $K$  differente per ciascuna uscita ( $V = K F$ ). L'errore relativo risultante sarà del tipo

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta K}{K}$$

dove il primo termine rappresenta l'errore di lettura e il secondo quello di calibrazione. Per la bilancia a 3 componenti sarà quindi

$$\Delta L = \Delta F + \Delta A, \quad \Delta D = \Delta D_r, \quad \Delta M_p = l \Delta A + A \Delta l$$

Il supporto dà luogo a due effetti, che modificano la misura rispetto alla situazione reale (nella quale il supporto non è presente):

- forze e momenti aggiuntivi (valutati mediante una misura con il solo supporto):
- variazione del campo di moto intorno al modello (interferenze tra campo fluidodinamico del modello e del supporto, che non possono essere valutate da misure sul solo supporto).

Entrambi gli effetti sono di carattere dinamico. Ovviamente, per minimizzare questi effetti, si può ridurre il più possibile la sezione del supporto (se cilindrico, il suo diametro  $d$ ), ma ciò provoca maggiore deformabilità del supporto stesso e la conseguente perdita di ortogonalità tra le direzioni lungo le quali si misurano le forze, oltre ad un aumento delle vibrazioni. Una valutazione teorica della resistenza del supporto può essere fatta analizzando il diagramma del coefficiente di resistenza in funzione del numero di Reynolds  $C_D (Re)$ , che per un cilindro a sezione circolare è rappresentato in figura 20 (se si lavora con numeri di Reynolds compresi tra  $10^2$  e  $10^5$  allora il  $C_D$  è costante e vale circa 1).

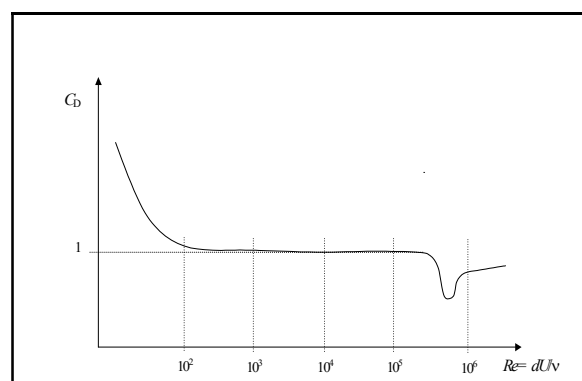


Figura 20. Andamento in funzione del numero di Reynolds del coefficiente di resistenza per un cilindro.

L'altra possibilità è quella di prendere il diametro  $d$  talmente piccolo da essere nella regione di Stokes ( $Re < 1$ ) dove  $C_D = A/Re$  (essendo  $A$  una costante che dipende dalla sezione e che vale 24 per un cilindro a sezione circolare). In questo caso la resistenza vale

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 d \cdot C_D = \frac{A \mu \rho U^2 d}{2 d \rho U} = \frac{A \mu U}{2}$$

è indipendente dal diametro del cilindro (che quindi posso fare grande a piacere purché valga la legge di Stokes). Quella di cui stiamo parlando è la forza per unità di lunghezza del cilindro. Una possibilità sperimentale per valutare l'interferenza supporto - modello è quella di posizionare in maniera simmetrica un supporto identico e nel misurare le variazioni del campo di forze dovute a questo. Utilizzando l'indice A per la configurazione sperimentale con il solo supporto (resistenza  $D_S$ ), l'indice B per quella con modello e supporto (resistenza  $D_S + D_M + D_{SM}$ , dove l'ultimo termine tiene conto dell'interazione) e l'indice C per modello, supporto e supporto posto simmetricamente (resistenza  $D_S + D_M + D_{SM} + D_{MS}$ ), si ha

$$D_A = D_S, \quad D_B = D_S + D_M + D_{SM}, \quad D_C \approx D_S + D_M + 2D_{SM}$$

dove si è linearizzata la dipendenza da ciascuno degli effetti in gioco e si è ipotizzato che l'interazione modello – supporto sia la stessa per entrambi i supporti ( $D_{SM} = D_{MS}$ ), ipotesi in effetti non vere, a meno che il supporto non sia molto più piccolo del modello. Dalle relazioni precedenti è possibile determinare la resistenza del solo modello attraverso la misura di resistenza in tre differenti configurazioni:  $D_M = 2D_B - D_A - D_C$ . Si consulti comunque il libro di Rae e Pope a pag. 204 per ulteriori approfondimenti.

### 1.2.2 Metodo della scia

Le forze su un modello possono anche essere misurate attraverso un'indagine nella scia dello stesso. In particolare, si ottiene la resistenza da un'indagine di quello che succede nella scia (rispetto a quanto succede a monte), mentre la portanza è ottenuta da un'analisi del campo di pressione sulle pareti della camera di prova. Questi studi sono effettuati per profili alari (o comunque per configurazioni bidimensionali) dove queste sono le forze più importanti.

La resistenza è misurata usando l'eq. di bilancio della quantità di moto in due sezioni  $A$  e  $S$  a monte e a valle del modello. Il difetto di quantità di moto sarà proprio uguale alla resistenza (Batchelor). Nel caso incompressibile (bassa velocità) abbiamo (con riferimento alla figura 22):

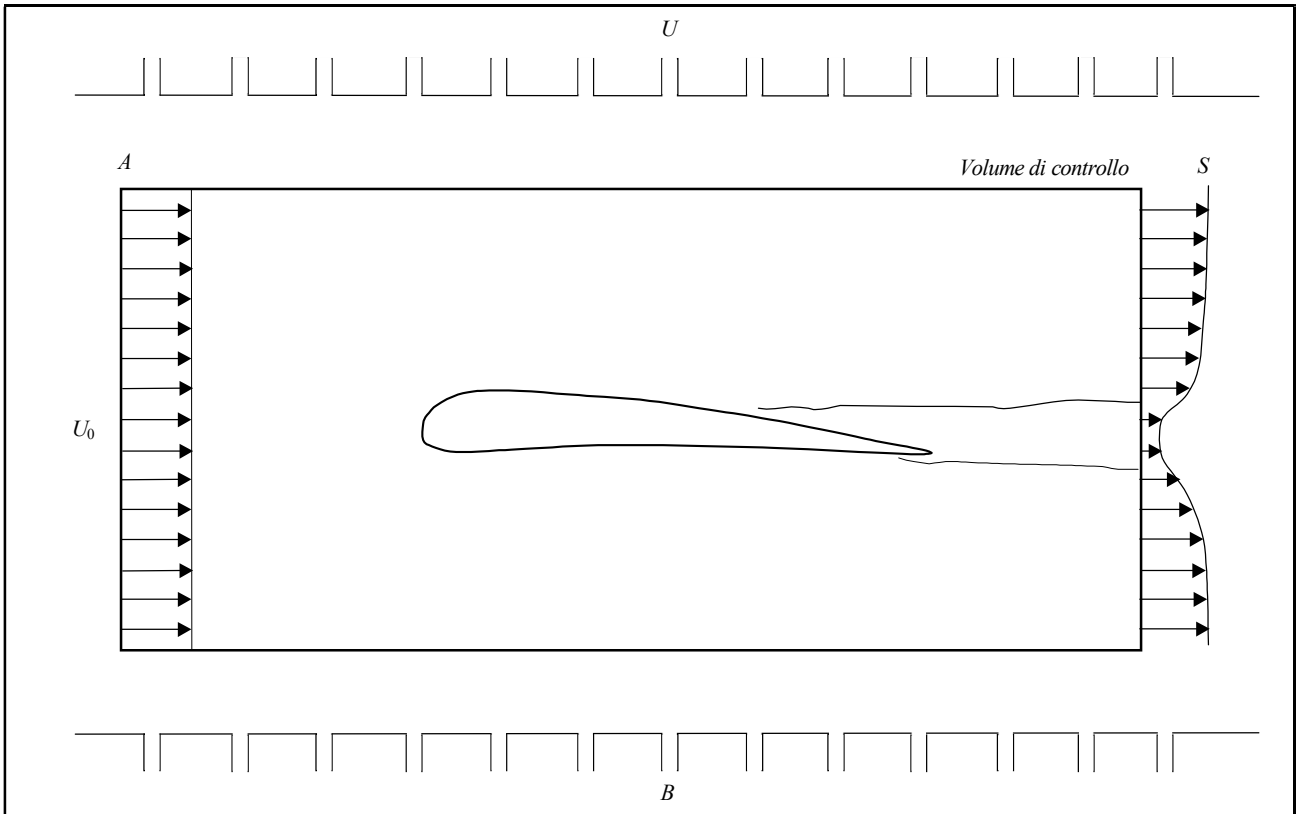


Figura 22. Determinazione della resistenza e della portanza da misure in scia e sulle pareti dell'impianto.

$$D = \iint_S [\rho U_A (U_A - U_0) + (p_A - p_S) - \rho U_S (U_S - U_0)] dS$$

( $S$  rappresenta l'area della sezione del condotto,  $U_S$  la velocità nella sezione a valle  $S$  e  $U_0$  la velocità indisturbata a monte) dove in  $D$  sono compresi sia gli effetti della resistenza di attrito che di quella di forma. L'uguaglianza precedente si ottiene a partire dalle equazioni di bilancio della quantità di moto (in direzione  $x$ ) e di conservazione della massa scritte in forma integrale nel volume di controllo, trascurando le forze tangenziali sulla superficie esterna di tale volume (ma non sul corpo). Considerando valida l'equazione di Bernoulli tra  $A$  e  $S$  nella sua forma più semplice, si può anche scrivere (assumendo che nella sezione di ingresso  $U_A \approx U_0$ ,  $V_A \approx 0$  e  $W_A \approx 0$ )

$$D = \iint_S [[\rho U_S (U_0 - U_S) + (p_A - p_S)]] dS = \iint_S [\rho U_S (U_0 - U_S) + \frac{1}{2} \rho (U_S^2 - U_0^2 + V_S^2 + W_S^2)] dS \quad ,$$

che rende esplicita la dipendenza dalle altre componenti della velocità (che possono essere trascurate se il rilevamento del profilo di velocità non è effettuato a ridosso del corpo,  $p_A \approx p_S$ ).

Nel caso di scia vicina (quando non si possono trascurare i termini aggiuntivi) si ottiene:

$$D = \frac{1}{2} \iint_S \rho (U_0 - U_s)^2 dS + \frac{1}{2} \iint_S \rho (V_s^2 + W_s^2) dS,$$

(il secondo integrale necessita la misura delle altre componenti di velocità), mentre nel caso di scia lontana (quando è possibile trascurare il secondo contributo e  $U_s \approx U_0$ ) si ottiene

$$D = \iint_S \rho U_s (U_0 - U_s) dS + \frac{1}{2} \iint_S \rho (V_s^2 + W_s^2) dS,$$

dove il secondo contributo dovuto alle altre componenti può essere trascurato. E' importante notare che nel caso di sezione di prova chiusa, le precedenti relazioni devono essere modificate, in quanto non esiste flusso attraverso la superficie laterale e il primo termine sarà modificato con  $(U_0^2 - U_s^2)$ .

Quindi, a partire da una misura di velocità in una sezione a valle del profilo, si può ottenere una valutazione della resistenza. Se il problema è realmente bidimensionale si ha che  $dS = l dy$  (dove  $l$  è l'apertura alare e  $y$  è la coordinata verticale) e che l'integrale in  $y$  andrà esteso sulla distanza di misura. In situazioni prossime allo stallo non è possibile usare l'espressione semplificata e bisogna inserire il contributo delle altre componenti di velocità a causa della presenza di strutture vorticosi. I metodi elencati hanno come grandezze misurate rispettivamente la velocità e la pressione. I principi di funzionamento, le metodologie, la risoluzione spaziale e temporale e le limitazioni sono quindi quelle caratteristiche dei sistemi di misura di velocità (*p.e.* tubo di Pitot) e di pressione.

### 1.2.3 Campo di pressione intorno al modello

Questo terzo metodo richiede la misura del campo di pressione intorno al modello (solo la parte statica). Il modello sarà equipaggiato con alcuni fori connessi attraverso dei tubi ad un barometro multiplo. La portanza sarà determinata (figura 23):

$$L = \int_0^c \int_0^l p \cos \alpha dS$$

(dove  $c$  è la corda,  $l$  l'apertura alare,  $\alpha$  l'angolo tra la direzione ortogonale alla corrente ( $y$ ) e la normale locale,  $p$  la pressione misurata e  $S$  la superficie alare).

Si può anche misurare il momento di beccheggio:

$$M = \int_0^c \int_0^l p \cos \alpha x dS$$

(essendo  $x$  la distanza dal punto  $P$  rispetto al quale si vuole calcolare il momento, di solito il bordo d'attacco o il quarto di corda), e la resistenza:

$$D = \int_0^c \int_0^l p \sin \alpha dS$$

Nel caso bidimensionale (ala a sezione costante) si ha che:  $dS = l dx$  (essendo  $dx$  la porzione dell'ala a cavallo della presa di pressione). Ovviamente, essendo le prese in un numero finito, sarà necessario sostituire l'integrale con una somma estesa alle prese sul dorso e sul ventre.

Bisogna però fare attenzione al risultato ottenuto per la resistenza  $D$  (la portanza  $L$  é di solito ben misurata): in effetti, a causa dell'indipendenza del campo di pressione dalla presenza dello strato limite, questa resistenza misurata contiene solo la resistenza di forma. Inoltre la procedura di proiezione della superficie  $dS$  sulla corda (cioè in direzione  $x$ ,  $dS = l dx \cong l dc$ ) può dare errori notevoli.

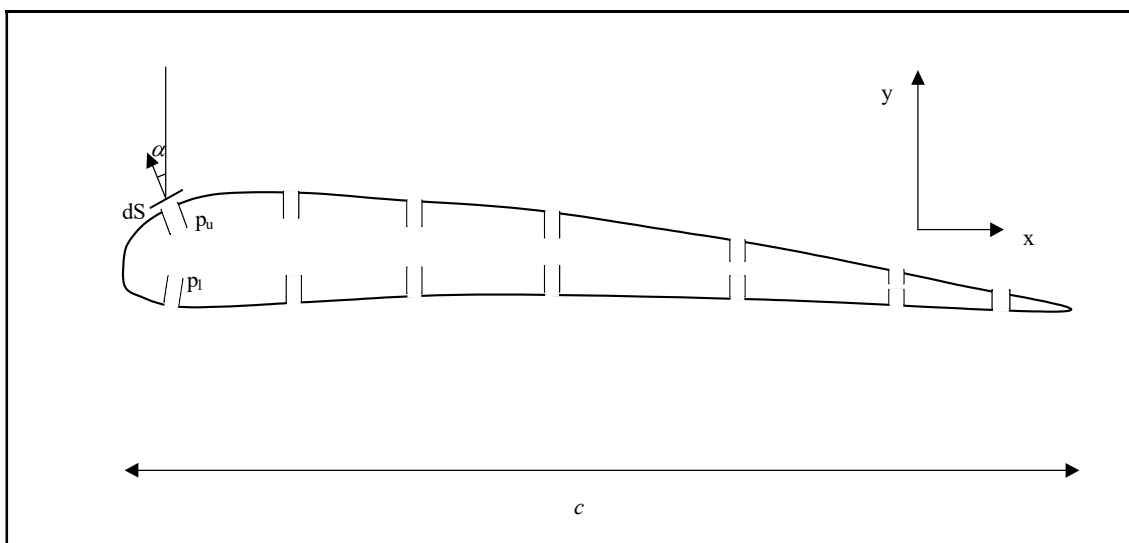


Figura 23. Determinazione della resistenza e della portanza da misure sulla superficie del modello.



Infatti, nel caso di flusso viscoso, si è trascurato in  $L$  un termine del tipo:

$$\int_0^c \int_0^l \tau_0 \sin \alpha \, dS$$

essendo  $\tau_0$  lo sforzo tangenziale alla parete, (che non può essere misurato con le prese di pressione).

Allo stesso modo, si è trascurato in  $D$  un termine aggiuntivo:

$$\int_0^c \int_0^l \tau_0 \cos \alpha \, dS$$

Pero', mentre il termine in  $L$  è trascurabile rispetto ai termini di pressione poiché contiene il seno di un angolo che quasi sempre è molto piccolo, quello in  $D$  non lo è, e questo porta errori nella determinazione della resistenza maggiori di quelli nel calcolo della portanza.

Anche in questo caso si rimanda ai sistemi di misura della pressione per quello che riguarda le caratteristiche della misura effettuata

### 1.3 SISTEMI DI MISURA DELLA PRESSIONE

Le misure di pressione statica sono essenzialmente di due tipi: canne barometriche (manometri) e trasduttori di pressione. Le canne barometriche riportano l'effetto di variazioni di pressione su orifizi situati su corpi o pareti, in termini di spostamenti su una scala graduata del liquido contenuto nelle canna stesse. La grandezza misurata è quindi lo spostamento di una colonna di liquido. Con riferimento alla figura 24, per una misura differenziale, applicando l'equazione di Bernoulli (cioè trascurando gli effetti della viscosità) nella forma che contiene il termine di carico verticale, si ottiene

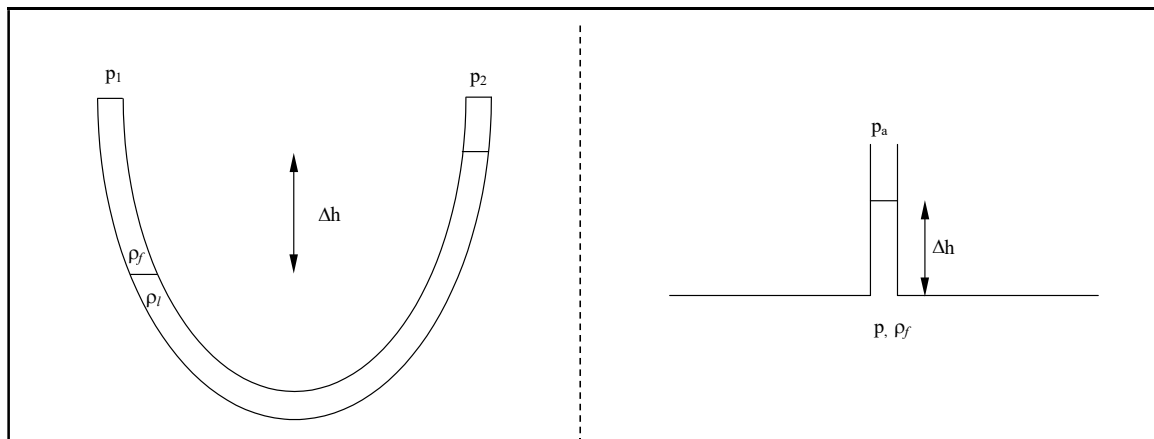


Figura 24. Sistemi di misura della pressione statica.

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\rho_l - \rho_f) \cdot \Delta h \cdot f(z, \Phi) \cdot g$$

(dove  $\Delta h$  rappresenta lo spostamento rispetto alla posizione di riferimento,  $z$  è l'altitudine sul livello del mare e  $\Phi$  la latitudine). Se abbiamo un'unica canna barometrica con liquido di densità  $\rho_f$  si ha (cfr. figura 24):

$$\Delta p = p - p_a = \rho_f g \cdot \Delta h f(z, \Phi).$$

A causa della differente risposta a seconda del liquido utilizzato (di solito acqua o alcool, ma anche mercurio) alle differenti altitudini e latitudini, è necessaria una calibrazione preliminare del sistema, misurando l'altezza raggiunta dal liquido con pressioni di riferimento note (*p.e.* in condizioni di assenza di moto ( $p = p_{\text{atm}}$ )): ciò determina la funzione  $f$ . La misura avviene tramite la lettura del livello raggiunto dal liquido su una scala graduata. L'errore relativo che si commette è dato da

$$\frac{\Delta(\Delta p)}{\Delta p} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta(\Delta h)}{\Delta h} + \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta g}{g}$$

dove la densità è data con un certo numero di cifre significative (cioè l'errore è noto), l'errore relativo sull'altezza viene misurato,  $\Delta f / f \approx 1\%$  e l'errore relativo sull'accelerazione di gravità è trascurabile. La risoluzione spaziale del metodo è legata alla dimensione della presa di pressione (di solito dell'ordine di qualche mm). La risoluzione temporale è bassa in quanto le fluttuazioni vengono di solito smorzate dall'inerzia del liquido utilizzato e da fenomeni di capillarità nelle canne barometriche (tipicamente il minimo intervallo di tempo utilizzabile non è inferiore a qualche secondo e quindi inutilizzabile per misurare le variazioni di pressione dovute alla turbolenza; si riescono a misurare pressioni in flussi turbolenti con fluttuazioni inferiori al 10 %).

I trasduttori di pressione trasformano il gradiente di pressione, presente tra ingresso ed uscita, in uno spostamento di una lamina deformabile collegata ad un circuito elettrico (lo spostamento e la deformazione si traducono in una variazione di resistenza, capacità o di frequenza). La quantità misurata è dunque una tensione la cui relazione con la variazione di pressione non è semplice: anche in questo caso è necessaria una calibrazione rispetto ad una pressione di riferimento. L'errore è di solito dell'ordine dell'1 % del valore massimo misurabile. La risoluzione spaziale è pari al metodo precedente, mentre quella temporale è migliore (intervallo di tempo dell'ordine della frazione di secondo e in quelli più moderni anche del centesimo di secondo).

Come detto, è sempre necessario riportare la pressione misurata ad un valore di riferimento (di solito la pressione atmosferica) in quanto la  $p = 0$  si ottiene solo nel caso di condizioni di vuoto: si misurerà quindi in effetti una differenza di pressione.

È importante mettere in evidenza che la forma della presa di pressione (sul corpo o sulle pareti dell'impianto) influenza molto il risultato attraverso un errore sistematico che è indicato nella figura 25 per alcune tipiche prese di pressione. Si noti che l'errore è molto maggiore a causa di uno smussamento degli spigoli a lato della presa di pressione rispetto a quello causato da un disallineamento angolare (se diretto in verso opposto alla corrente locale).

Per quello che riguarda la misura della pressione dinamica si usano sostanzialmente gli stessi sistemi per la misura delle differenze di pressione rispetto al caso di assenza di moto. Questa volta, però la presa di pressione è rivolta verso la direzione del moto. Lo strumento più usato è il tubo di Pitot che in realtà trasforma una misura di pressione in una misura di velocità (vedremo sotto quali condizioni) e quindi può rientrare anche nella categoria misura di velocità.

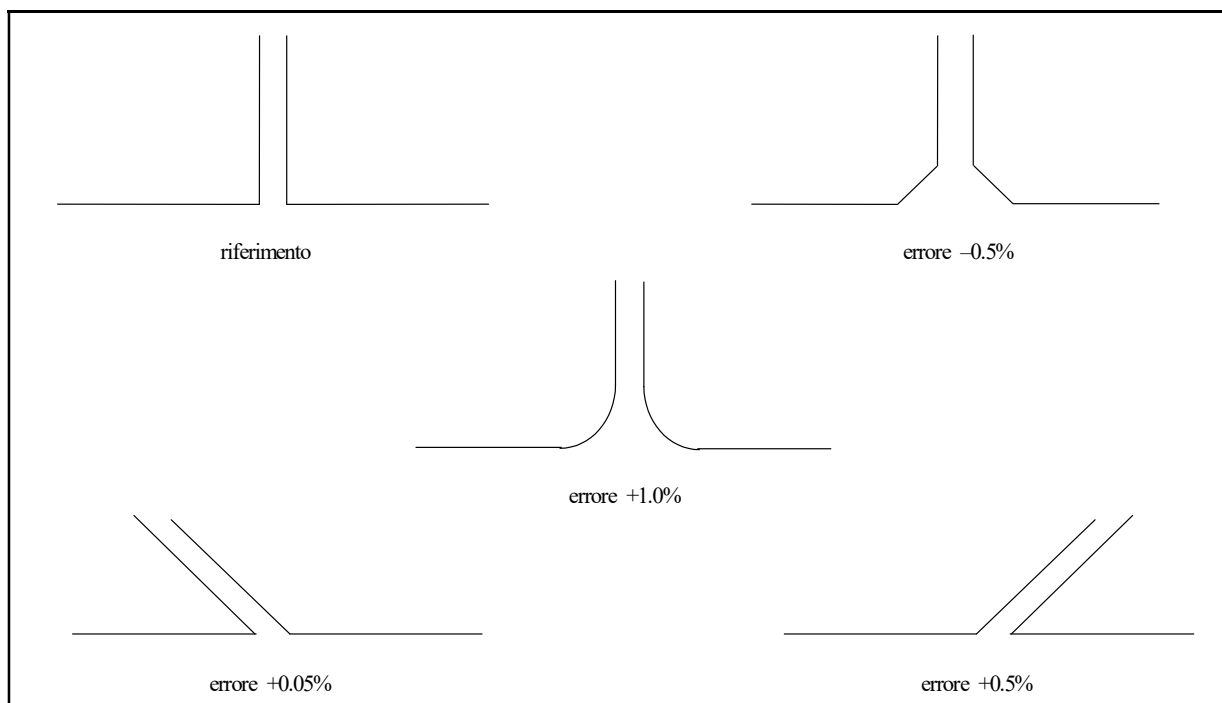


Figura 25. Errore sistematico causato dalla forma della presa sulle pareti dell'impianto.

## 1.4 SISTEMI DI MISURA DELLA PORTATA

Vi sono moltissimi misuratori di portata che misurano sia staticamente le quantità di flusso, o che determinano dinamicamente il passaggio del flusso attraverso una data sezione. Nel primo caso si ottiene una buona precisione ma scarsa risoluzione spaziale e temporale (*p.e.* attraverso le misure del tempo impiegato a riempire un contenitore di un volume noto), oltre alla semplicità. Nel secondo caso, la misura é effettuata tramite la determinazione di grandezze collegate alla velocità (quale ad esempio la pressione in più punti): la risoluzione spaziale e temporale e gli errori saranno quindi quelli relativi alle grandezze misurate.

Le portate in massa e volume sono definite rispettivamente come:

$$Q_m = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dx dy dz = \iint_A \rho U \, dy dz \approx \rho UA, \quad Q_v = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V dx dy dz = \iint_A U dy dz \approx UA$$

dove le ultime uguaglianze sono valide qualora si assuma un profilo di velocità costante (assenza di strato limite). Vedremo in dettaglio solo due esempi di misuratori di portata dinamici: il tubo di Venturi (o venturimetro) e il rotametro.

**Tubo di Venturi.** Con questo apparato si misura la caduta di pressione in corrispondenza del restringimento di una sezione dell'impianto. Può essere utilizzato sia per liquidi che per gas in condizioni incompressibili e compressibili. Nel caso incompressibile (quasi 1D, stazionario, non viscoso), mettendo insieme il teorema di Bernoulli nelle sezioni 1 e 2 e la conservazione della massa, otteniamo (con riferimento alla figura 30):

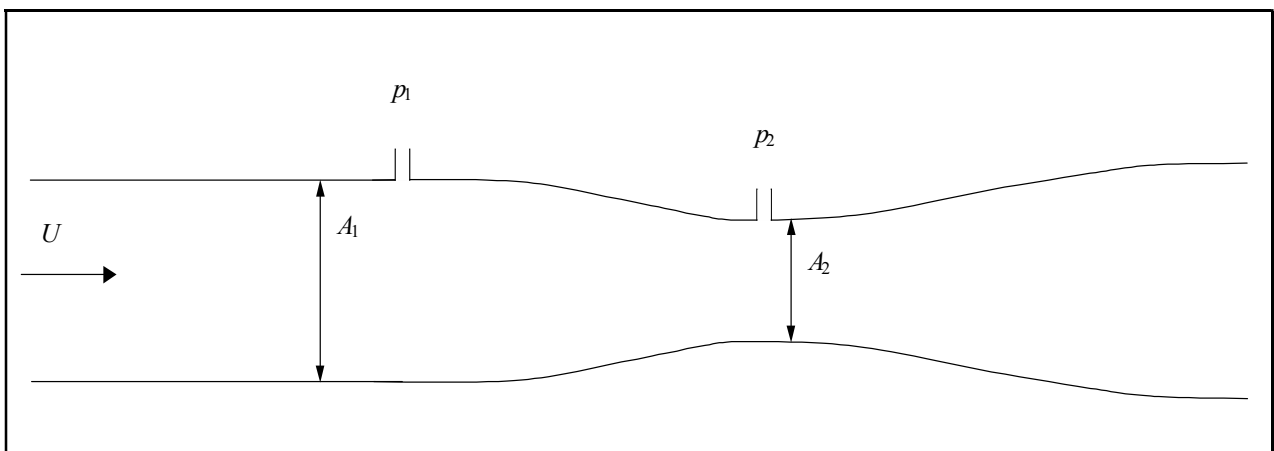


Figura 30. Tubo di Venturi.

$$p + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{cost}, \quad UA = \text{cost}$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2, \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

cioè

$$\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} = U_2^2 \left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] \Rightarrow U_2 = \left( \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[ 1 - (A_2/A_1)^2 \right]} \right)^{\frac{1}{2}}$$

essendo  $\rho$ ,  $A_1$  e  $A_2$  noti, dalla misura della caduta di pressione è possibile trovare  $U_2$  ( $U_1$  sarà determinata dalla conservazione della massa). La portata in massa sarà:

$$Q_1 = Q_2 = \rho U_2 A_2 = A_2 \left[ \frac{2\rho(p_1 - p_2)}{1 - (A_2/A_1)^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**Rotometro.** Il suo funzionamento è basato sul bilancio tra il peso di un oggetto (galleggiante) e le forze di resistenza esercitate dal fluido in un condotto leggermente divergente. Si misura l'altezza raggiunta dall'oggetto in condizioni di equilibrio; tale altezza con una scelta opportuna del divergente è linearmente proporzionale alla portata. Nel rotometro il galleggiante è messo in rotazione per avere una stabilizzazione giroscopica. In un tubo tronco-conico quale quello raffigurato nella figura 31 vale la relazione di equilibrio:

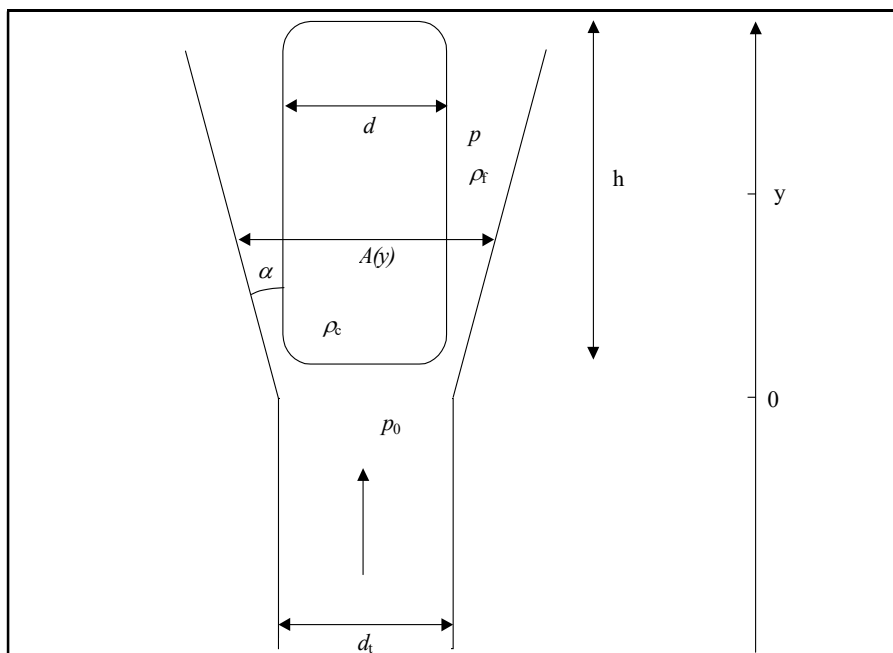


Figura 31. Rotometro.

$$(\rho_c V g - \rho_f V g) = D$$

che esprime il bilancio tra la forza di gravità, quella di galleggiamento e la spinta del fluido (dove  $V$  è il volume occupato dal corpo e  $\rho_c$  e  $\rho_f$  sono le densità del corpo e del fluido). Nel termine  $D$  sono inglobate la resistenza di forma e di attrito; trascurando quest'ultima abbiamo che:

$$D = S(p - p_0) ,$$

con  $S$  che rappresenta la sezione dell'oggetto e  $p$  la pressione generica nella sezione ad altezza  $y$  e  $p_0$  la pressione all'inizio del divergente. Se l'oggetto galleggiante è un cilindro si ha che  $S = \pi d^2/4$  e che  $V = h S$  (con  $h$  che rappresenta l'altezza del cilindro); nella realtà il cilindro è invece sagomato per ridurre le perdite di carico. Si avrà quindi:

$$p - p_0 = hg(\rho_c - \rho_f)$$

cioè il salto di pressione è costante e non dipende da  $y$ . Il teorema di Bernoulli, applicato tra la sezione generica  $y$  e la sezione 0, fornisce:

$$p + \frac{1}{2} \rho_f U^2(y) = p_0 + \frac{1}{2} \rho_f U_0^2, \quad p - p_0 = \frac{1}{2} \rho_f [U_0^2 - U^2(y)]$$

e la conservazione della massa:

$$U_0 A_0 = U(y) A(y) , \quad U_0 = \frac{U(y) A(y)}{A_0}$$

dove:

$$A_0 = \pi \left( \frac{d_t}{2} \right)^2 , \quad A(y) = \pi \left[ \left( \frac{d_t}{2} + y \operatorname{tg} \alpha \right)^2 - \left( \frac{d}{2} \right)^2 \right] \cong \pi \left[ \left( \frac{d_t}{2} + y \alpha \right)^2 - \left( \frac{d}{2} \right)^2 \right] ,$$

sono le aree delle sezioni (essendo  $\alpha$  abbastanza piccolo) e  $d_t$  è il diametro del tubo a monte del rotametro. Si ottiene

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho_f U^2(y) \left[ \left( \frac{A(y)}{A_0} \right)^2 - 1 \right]$$

$$U(y) = \left( \frac{2hg(\rho_c - \rho_f)}{\rho_f \left[ \left( \frac{A(y)}{A_0} \right)^2 - 1 \right]} \right)^{1/2}$$

e la portata in massa é:

$$Q = \rho_f A(y) U(y) = A_0 \left[ \frac{2hg\rho_f(\rho_c - \rho_f)}{1 - (A_0/A(y))^2} \right]^{1/2},$$

La portata dipende dall'altezza  $y$  (poiché  $A(y)$  cresce con  $y$ , allora  $Q$  cresce con  $y$ ). Dalla misura della altezza  $y$  alla quale si posiziona il galleggiante si determina quindi la portata. In realtà, a causa della resistenza di attrito, del peso del fluido e del peso del galleggiante, la formula risulta più complessa ed é necessario tarare il rotametro.

Le formule trovate in precedenza, sia per il tubo di Venturi che per il rotametro, devono essere corrette con dei coefficienti che tengano conto delle *perdite di carico* in corrispondenza del restringimento della sezione (Venturi) o del divergente con il galleggiante (rotametro). Queste perdite sono a volte dello stesso ordine di grandezza o anche superiore a quelle dovute all'attrito (a meno che non si tratti di lunghi tubi rettilinei nei quali, ovviamente, il contributo maggiore é dovuto all'attrito). Il coefficiente di perdita,  $K$ , é quello che abbiamo già utilizzato nel capitolo 3 relativo agli impianti:

$$K = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

(essendo  $\Delta p$  il salto in pressione tra le sezioni considerate e  $U$  la velocità di solito calcolata nella sezione a monte). Si definisce anche una altezza di carico equivalente:

$$h = K \frac{U^2}{2g}.$$

Come visto in precedenza,  $K$  dipende dalla geometria e dalla velocità:  $K = K(\text{geometria}, Re)$ .

Si può anche parlare di lunghezza equivalente, cioè di quella lunghezza del condotto che darebbe una perdita per attrito equivalente a quella localizzata nella sezione in esame

$$l_{eq} = \frac{Kd_t}{4C_d(Re)} = \frac{Kd_t}{\lambda(Re)}$$

con  $d_t$  che rappresenta il diametro del tubo e

$$\lambda(Re) = \left\{ \begin{array}{l} 64/Re \quad \text{per flussi laminari} \\ 1/Re^{0.25} \quad \text{per flussi turbolenti} \end{array} \right\}.$$

Il valore di  $K$  viene trovato empiricamente: alle pagine 492 e seguenti del Munson sono riportati i valori di  $K$  per espansioni e diffusioni di vario genere, gomiti, valvole (tabella 8.2).



# Chapter 2

## FLOW VISUALIZATION AND TRACERS

### 2.1 THE BEHAVIOR OF CONTINUOUS AND DISCRETE TRACERS

A flow visualization system allows highlighting and making visible the flow field behavior usually in a rather qualitative way. However, the use of advanced technological solutions, for example light emitting sources, photo or video-cameras and image analysis software, sometimes enable obtaining quantitative data to be used for design purposes or to validate existing analytical or empirical models. Therefore, it is possible to visualize vortical structures in complex flow fields and investigate in detail their generation and interaction.

As also in the case of effective measurement systems, as PIV, flow visualization requires flow tracers in order to making visible the hidden flow. Therefore, it is very useful to point out the major drawbacks which are present when using continuous or discrete tracers in a fluid flow.

In case of a dye which is distributed in the fluid (a so called scalar field), as for example in the case of smoke in air or a dye in water, the reference equations are the vorticity transport equation for the fluid and the mass balance equation for the scalar. The transport equation for vorticity (defined as the curl of the velocity,  $\underline{\omega}$ ) describes the behaviour of a vortical structure convected and diffused in a fluid flow and can be obtained by taking the curl of the Navier-Stokes equations, which allows obtaining for an incompressible flow (in non-dimensional form)

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = (\underline{\omega} \cdot \nabla)\underline{u} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{\omega},$$

where  $Re$  is the Reynolds number ( $Re=UL/v$ , with  $U$  an  $L$  characteristic velocity and length and  $v$  kinematic viscosity coefficient),  $\underline{u}$  is the velocity vector and  $\nabla$  the nabla operator.

If compared with the balance equation for the scalar concentration,  $c$ , always for incompressible flows, which involves the Schmidt number,  $Sc=v/D$ , where  $D$  is the scalar molecular diffusivity coefficient in the specific fluid,

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{1}{Re Sc} \nabla^2 c ,$$

it is clear that even in the ideal case of  $Sc = 1$ , the two equations are different, thus describing different phenomena. Indeed, in the second equation it is not present the “vortex-stretching” term, which is included as a first term in the right end side of the first equation. It provides the stretching and orientation of vortices along the mean velocity gradient direction, usually involved in vortex structure interaction and evolution in a flow field. These equations are strictly valid only for laminar flows, but even in the case of a turbulent flow the arguments are similar.

So far, being impossible to have a scalar for flow visualization behaving exactly as the fluid flow, usually dyes with a very small diffusion coefficient are selected. In this way, the Schmidt number is very high (for example equal to several thousand for a colored dye in water) and the previous equation reduced to a simple transport equation (in non-dimensional form the transport term has a weight equal to unity)

$$\frac{Dc}{Dt} \cong 0 .$$

Therefore, the continuous tracer is simply convected without any molecular diffusion, so far well describing the behavior of the conveying fluid, especially if injected close to the visualization position.

The arguments are quite different for the case of tracers in the form of solid particles, droplets or bubbles. In figure 1, as an example, the behavior of air streamlines, seeded with solid particles, over a cylinder is shown for different tracer size (with density slightly larger than that of the fluid). The rather small tracers follow quite well the flow streamlines around the cylinder, whereas the large tracers (around 10 times) clearly show a vertical velocity component towards the bottom all over the field, due to the tracer weight. In addition, tracer particle inertia does not allow following flow streamlines close to the surface of the cylinder, giving rise to tracer impact on the surface itself, as in the case of a windshield.

To model this phenomenon, we will consider quite low tracer concentration (less than  $10^{-3}$  in volume), so that they are moving almost individually as described by a single particle equation (rather than the mass scalar balance). Particle-particle interactions will be also neglected as also backwards effect from particles to fluid and heat transfer phenomena. Making reference to figure 2,

these hypothesis are within the so-called “one-way coupling” condition, in which each particle is non-interacting with the others. The other hypotheses are those of spherical particle, isotropic and homogeneous turbulence.

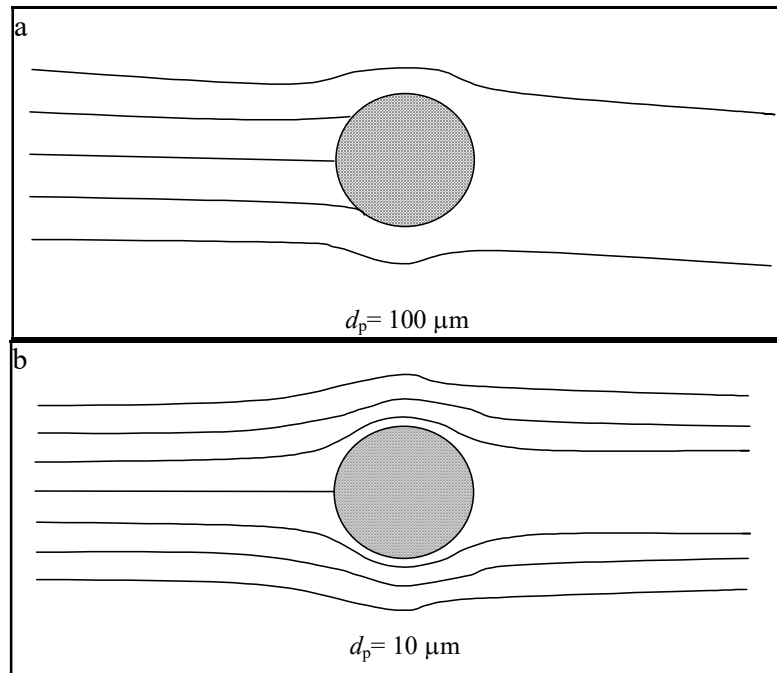


Figure 1. Behavior of spherical tracer particles in an air flow over a cylinder ( $U \approx 6$  m/s,  $\rho_p \approx 1.4$  g/cm<sup>3</sup>).

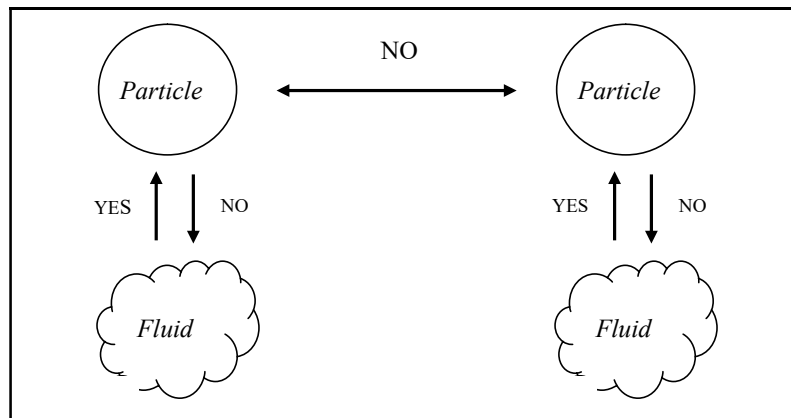


Figure 2. Interactions among particles and fluid in a multiphase flow.

By neglecting pressure gradients and unsteadiness, in the hypothesis of large particle density, that is  $\rho_p/\rho_f \gg 1$ , the equation of motion of a single particle reduces to

$$\frac{du_p}{dt} = a'(u_f - u_p)$$

with  $a' = \frac{18\mu}{\rho_p d^2}$  (units of a frequency), which increases as smaller is  $\rho_p$  (always keeping  $\rho_p/\rho_f \gg 1$ )

and as smaller is  $d$ . The quantity  $1/a'$  is known as the Stokes particle time scale,  $\tau_s$ , and must be considered in comparison with the flow characteristic time, as previously described. The previous equation can also be solved by a direct integration, assuming initially  $u_p = u_f = \text{const.}$ , to get the result

$$u_p = u_f(1 - e^{-t/\tau_p})$$

which shows how, for small values of the Stokes time (small  $\rho_p$  and  $d$ ), the particle velocity approaches quickly the fluid velocity, the opposite taking place for large values of  $\tau_p$ . This time scale must be evaluated every time flow visualizations or measurements are performed using tracer particles. In addition, by defining the characteristic time scale for the flow,  $\tau_f$  (for example equal to the characteristic length divided by characteristic velocity,  $L/U$ , this being considered in detail in the last chapter of these notes), it is possible to get the non-dimensional Stokes number

$$Sk = \frac{\tau_p}{\tau_f}$$

which establishes if a tracer is good or not. Specifically, for  $Sk \ll 1$ , the tracer is perfectly following the fluid, for  $Sk \gg 1$ , the tracer is dominated by inertia and does not follow the fluid, while for  $Sk \approx 1$  there is the strongest particle-fluid interaction.

## 2.2 LIGHT SCATTERING BY SOLID PARTICLES

When a solid particle is illuminated by light, the intensity of transmitted light is much larger than that diffused, especially for those quite large particles used as flow tracers, as reported in scattering diagrams. An example of scattering diagram is given in Figure 3, the distance from the origin being proportional to the intensity of scattered light in each direction, in a logarithmic scale.

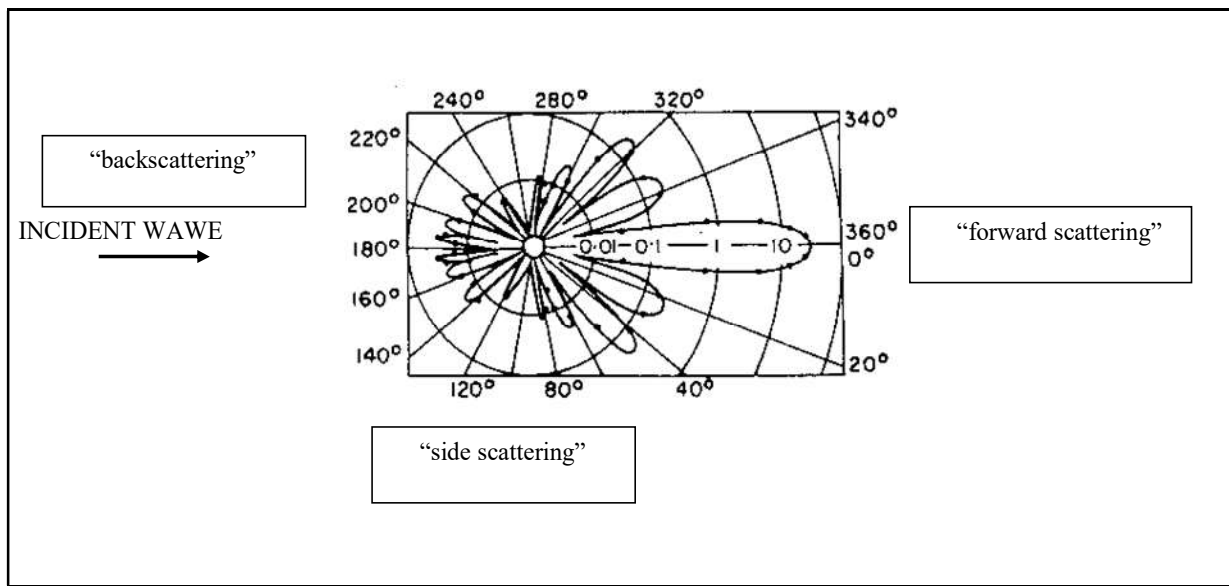


Figure 3. Angular lobes of light intensity for scattering light from a solid particle (distance from the origin is in logarithmic scale).

The number and position of lobes depend on several parameters as incident light wavelength and polarization and particle size and relative refractive index. The intensity is also increasing with the particle size (around  $d^2$ ) and, as already stated, the forward scattering intensity is around 100 times larger than those in the other directions. From intensity diagrams, as that presented in Figure 3, it is clear that small changes in receiving direction could produce large changes in scattering intensity. So far a compromise should be taken between capability to follow the flow (i.e. small Stokes time) and scattering of light (i.e. large diffused intensity) which lead to two opposite requirements for the size of the tracer particle.

# Chapter 3:

## ADVANCED MEASUREMENT TECHNIQUES IN FLUID MECHANICS

### 3.1 VELOCITY FIELD MEASUREMENT SYSTEMS

As for all measurement systems, measurements can be made in two ways: measurements at a single point and multipoint measurements. The first category includes the Pitot tube, the Ultrasound Anemometry (UA), the Hot Wire (or Hot Film) Anemometry (HWA and HFA) and the Laser Doppler Anemometry (LDA), while images analysis techniques (as PIV and PTV) belong to the category of multipoint measurements. Apart from the Ultrasonic Anemometer, the large size velocity measurement methods will not be here considered because they greatly affect the flow field (for example those based on macroscopic electromechanical devices, as anemometer shells or propeller anemometers) even if these devices are used as standard equipment in airports or atmospheric surveys. As the ultra sound anemometers (UA), such devices are placed on stakes in open fields, but they are not suitable for indoor measurements as for example to be used in wind tunnel tests. The methods that will be discussed here are partially intrusive, either due to the insertion of small probes (Pitot, UA, HWA and HFA) or because of the presence of tracer particles in the flow (LDA, PIV and PTV). The following table shows the main characteristics of optical methods LDA and PIV compared to Pitot, UA and HWA.

Method	Velocity component	Type	Intrusive	Linearity	Calibration	Robustness	Temporal resol. (s <sup>-1</sup> )	Spatial resol. (m <sup>-1</sup> )	Price (€)
PITOT	1	Local	YES	NO	NO	YES	1	10 <sup>2</sup>	10 <sup>2</sup>
UA	3	Local	YES	YES	YES	YES	10	10	10 <sup>3</sup>
HWA	1-3	Local	YES	NO	YES	NO	10 <sup>4</sup>	10 <sup>5</sup>	10 <sup>3</sup>
LDA	1-3	Local	NO	YES	NO	YES	10 <sup>3</sup>	10 <sup>4</sup>	5 10 <sup>4</sup>
PIV	2-3	Global	NO	YES	NO	YES	10 <sup>3</sup>	10 <sup>3</sup>	10 <sup>5</sup>

Table: Comparison among velocity measurement methods.

### 3.2 SINGLE AND MULTI-HOLE PITOT TUBES

É uno strumento che permette la misura della pressione totale (di ristagno) e della pressione statica e per differenza della pressione dinamica tramite almeno due prese, una orientata nella direzione del moto ed una (o più) in direzione normale (figura). Il diametro del foro per la pressione di ristagno é maggiore di quello usato per la pressione statica (circa 0.5 cm). Complessivamente la dimensione del tubo di Pitot ( $D$  nella figura) raggiunge il centimetro. Questa misura é pari a più o meno l'inverso della risoluzione spaziale del sistema. La risoluzione temporale é simile a quella del caso delle prese statiche.

The working principles of a Pitot tube are well known from basic courses in Fluid Mechanics and here only brief notes are reported. Making reference to **Figure** and to Bernoulli equation between the hole in front of the Pitot (total pressure  $p_t$ ) and the lateral hole (one or more, static pressure  $p_s$ ), it is possible to derive the velocity  $U_s$  (which being  $D \approx 0.5$  cm is close to the free stream velocity  $U_o$ ) by measuring the pressure difference ( $p_t - p_s$ ) (in the figure obtained by means of the heights  $h_t - h_s$ )

$$U_o = \left[ \frac{2(p_t - p_s)}{\rho} \right]^{1/2}$$

where  $\rho$  is the density of the incoming fluid. The previous formula is valid for subsonic incompressible flows, otherwise the density will be a variable dependent on the temperature. Note also that this technique is highly intrusive and with poor spatial and temporal resolutions.

L'errore che si commette nel caso delle misure di pressione statica e totale é equivalente a quanto visto in precedenza. Nel caso della velocità invece, una volta determinato l'errore sulla pressione, si avrà:

$$\frac{\Delta U_s}{U_s} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta(\Delta p)}{\Delta p} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right].$$

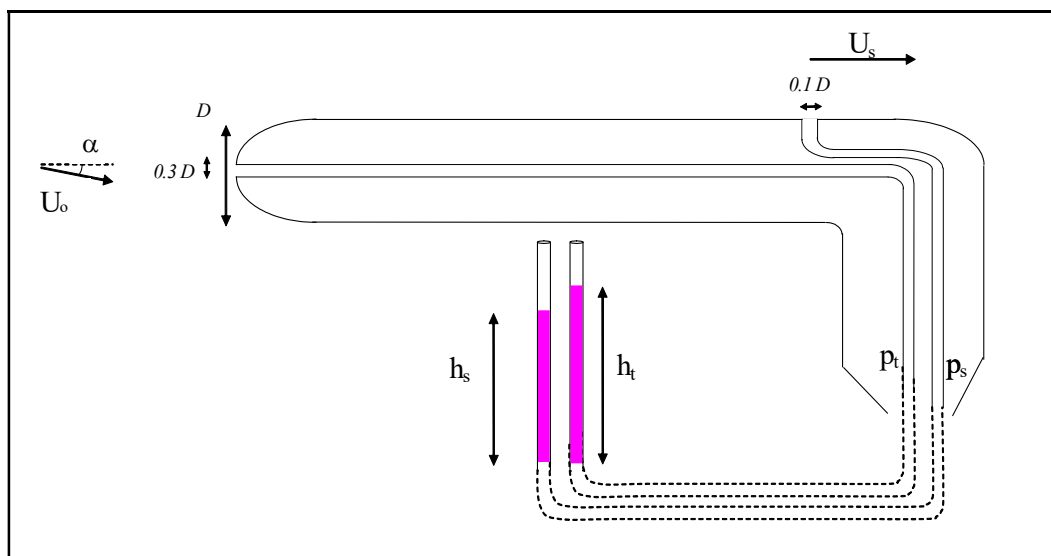
In realtà, affinché sia valida la formula per il calcolo della velocità sono necessarie le seguenti ipotesi:

- flusso stazionario (per il caso non stazionario non é sempre possibile integrare l'eq. di Navier-Stokes):

- assenza di forza di massa (altrimenti sarebbe presente un termine aggiuntivo nella relazione precedente del tipo  $2g\Delta h/\rho$ , con  $\Delta h$  che rappresenta la differenza di quota tra la presa statica e quella totale; tale termine è di solito trascurabile essendo  $\Delta h$  molto piccolo);
- flusso barotropico (nel quale non si innescano rotazioni causate da un diverso punto di applicazione tra il gradiente di pressione e di densità);
- flusso non viscoso (cioè ad elevati numeri di Reynolds ( $> 1000 \div 2000$  basato su  $D$ ), in assenza di separazione e comunque in zone distanti da pareti).

In particolare, in prossimità delle pareti, sono presenti effetti di interferenza tra Pitot e parete che provocano una differenza tra velocità misurata e velocità effettiva. Infatti l'aumento di velocità tra tubo e parete provoca un aumento della pressione di ristagno ed una diminuzione della pressione statica. Tale interferenza può essere corretta impiegando tubi di Pitot di differente dimensione esterna e forma.

As can be immediately noticed, the formula to derive the velocity is not dependent on the incidence angle  $\alpha$  of the free stream and indeed a single hole Pitot tube is very poorly sensitive to this angle (within  $\pm 20^\circ$ , which can be improved up to  $\pm 30^\circ$  using special configurations). Usually this is positive due to insensitivity to misalignments, but this could be a limitation if one would like to know the incidence angle, as for example in the case of vehicles rapidly changing their direction of motion as helicopters and racing cars. In order to allow the measurement of the angle  $\alpha$  simultaneously to that of the absolute value of the free stream velocity, the so called multi-hole arrangement is required.



**Figure.** Typical configuration of a single-hole Pitot tube.



Hereafter, the three holes configuration is considered, but geometries with five or more hole are also possible (the three hole configuration considers pitching or yaw separately, whereas the five hole one all them together). The considered geometry is that of a hemispheric front part as shown in **Figure**, but different geometries are also possible (as for example the conical one). With reference to this figure, the hole number 1 is used to derive the absolute value of the velocity,  $U_0$ , as previously described for single-hole Pitot tube. On the other hand, hole numbers 2 and 3 are used to derive the incidence angle,  $\alpha$ . Considering the potential flow theoretical solution, the following pressure coefficients can be derived

$$c_p = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

for  $\alpha=0$  and

$$c_p = 1 - 4 \sin^2(\theta - \alpha)$$

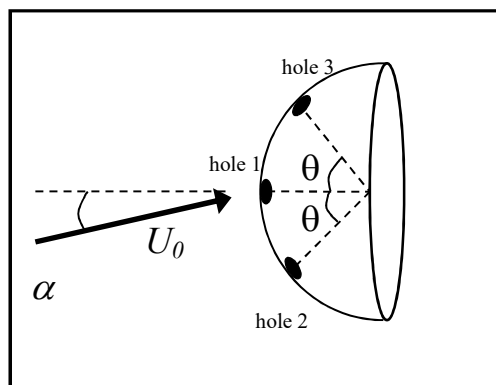
for  $\alpha \neq 0$ . Therefore, the pressure coefficient difference between holes 2 and 3 is given by

$$\Delta c_p = c_{p_2} - c_{p_3} = 1 - 4 \sin^2(\theta - \alpha) - 1 + 4 \sin^2(\theta + \alpha) = \sin 2\alpha \sin 2\theta$$

For a fixed value of the incidence angle, this function gets a maximum for  $\theta=45^\circ$ , so it is convenient to build the two holes 2 and 3 separated by an angle of  $90^\circ$  in order to get the maximum resolution. In these constructive conditions the pressure coefficient difference is given by

$$\Delta c_p = \sin 2\alpha$$

which is a non-monotonic function of the angle of incidence, in theory to be used to derive it from the measurement of the pressure coefficient difference. However, in practice this is not so simple due to the mentioned non-monotonic dependence, to the inviscid theory used to derive the relation and to some possible constructive misalignment.



**Figure.** Geometrical configuration of a three-hole Pitot tube with hemispheric shape.

So far, a procedure involving a preliminary calibration is involved. In this procedure, the angle of incidence of the free stream is known (because the Pitot tube is tilted of a given known angle) and no model is inserted in the wind tunnel. The pressure differences in respect to the ambient pressure are measured at holes numbers 1, 2 and 3 ( $p_1, p_2, p_3$ ), in order to derive the following functions of  $\alpha$

- mean pressure  $\bar{p} = (p_2 + p_3)/2$
- calibration coefficient  $c_{p\alpha} = \frac{p_3 - p_2}{p_1 - \bar{p}}$

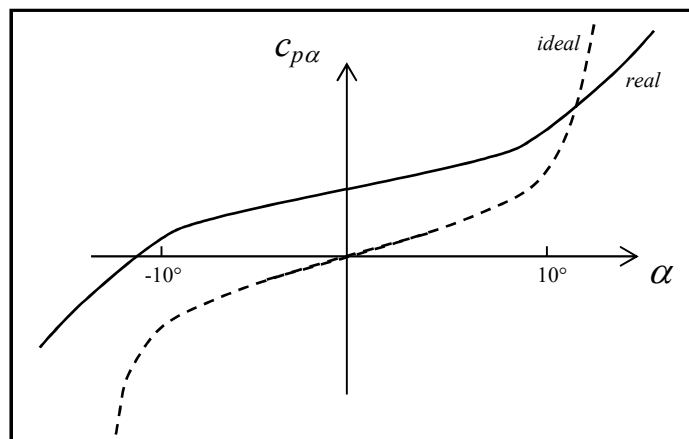
For an ideal potential flow, it is possible to derive that

$$c_{p\alpha} \approx 2 \operatorname{tg} 2\alpha \sim 4\alpha$$

the last being valid for small values of angle of incidence (say less than  $10^\circ$ ). From this point of view, it is important to highlight that in real measurements, such angle could be even much larger than  $|10^\circ|$ , so that the low angle approximation cannot be always retained. In the real case the result will be slightly different,

$$c_{p\alpha} = A\alpha + B$$

where  $A$  and  $B$  have to be determined by the calibration procedure and compared to the ideal values ( $A=4$  and  $B=0$  for small  $\alpha$ ). In **Figure**, the situation is summarized, so that not only the slope (coefficient  $A$ ) could be different from the ideal one, but also the term  $B$  could be different from zero (non zero-crossing). This is due to effects due to size, shape of the tube and Reynolds number.



**Figure.** Calibration coefficient as a function of the angle of incidence on the Pitot tube for ideal and real cases.

### 3.3 ULTRASOUND ANEMOMETRY (UA)

These anemometers, due to their characteristic dimensions (typically from 20 cm to 40 cm), are mainly used for measurements in open field as for example in airports and for the identification of suitable sites for installing wind power plants. Through an ultrasonic anemometer, it is possible to determine the magnitude and direction of wind velocity. The measurement principle is based on the determination of the transit time of an ultrasonic pulse between a pair of sonic transducers, as shown in the following figure

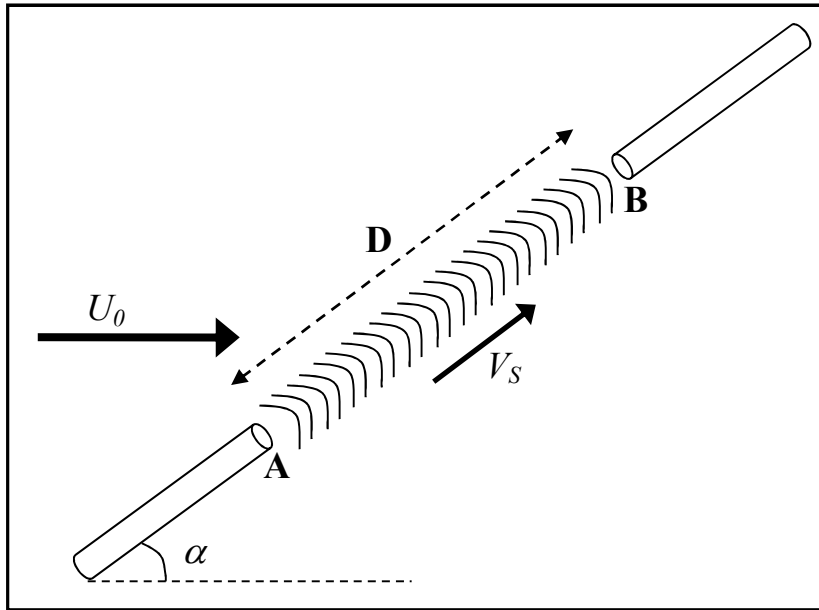


Figure 7. Working principle of a single component Ultrasonic Anemometer.

In the figure,  $D$  is the distance between the two transducers A and B,  $V_s$  the speed of sound and  $U_0$  the wind velocity to be measured. Considering that the air velocity component, in addition to the velocity of sound, along the direction AB decreases and increases, respectively the required time for the sound impulse to travel the forward and backward distances AB and BA, it is possible to write

$$t_{AB} = \frac{D}{V_s + U_0 \cos \alpha}, \quad t_{BA} = \frac{D}{V_s - U_0 \cos \alpha}, \quad U_0 \cos \alpha = \frac{D}{2} \left( \frac{1}{t_{AB}} - \frac{1}{t_{BA}} \right)$$

*i.e.* from the measurement of two times  $t_{AB}$  e  $t_{BA}$ , it is possible to derive the component of the wind velocity in the direction of the two transducers. Having eliminated the sound speed from the final calculation in the previous formula, the independence of the measured wind velocity from the environmental conditions of temperature, humidity and pressure is attained. With two or three pairs of transducers the measurements of all three wind velocity components in the reference system as defined by the transducer pairs. These can be projected in the reference system related to the undisturbed wind velocity.

Once the velocity component  $U_0 \cos \alpha$  has been obtained, from the value of the time  $t_{AB}$  (or of  $t_{BA}$ ), it is also possible to determine the sound velocity  $V_S = (\gamma RT)^{1/2}$  and so far to the temperature, which is added to ambient pressure and humidity as derived by specific sensors located in the main envelope of the probe.

The reference size and the response time of the system are dependent on the dimension of the entire probe and on the travel time for the sound wave to move from the emitter to the receiver, in addition to the time needed for signal processing. As a consequence, the spatial resolution is in the order of  $10 \text{ m}^{-1}$  and the temporal resolution is around 50 Hz. Therefore, an Ultrasound Anemometer is useful for the measurements of large spatial and time scales, as those involved in open environments.

The typical velocity range is between a minimum velocity, around 1 cm/s, and a maximum velocity around 50 m/s (dynamical ratio equal to  $5 \times 10^3$ ). Measurement errors depend on the resolution of time measurements, which is around a fraction of a millisecond, so far the typical relative error on each velocity component is around 1%, whereas  $\pm 1^\circ\text{C}$  on the sonic temperature,  $\pm 0.2^\circ\text{C}$  on the temperature,  $\pm 0.4 \text{ mbar}$  on pressure and 2.5% on relative humidity.

### 3.4 PARTICLE IMAGE VELOCIMETRY (PIV)

Compared to previous techniques, PIV allows the measurement of at least two components of the velocity field, with good spatial and temporal resolution, in an extensive region of the fluid-dynamic field. This method is an optical technique, linear, non-intrusive, which on the one hand requires a large amount of light (being the area of measurement quite large), but on the other hand, does not require coherent light since no interference is carried out. The technique has experienced a huge growth over the past 20 years, thanks to the exponential growth of storage capacity and images analysis on modern computers.

The measurement principle is based on the determination of the distance traveled by the tracer particles (with a diameter of approximately  $(2\div 10)\mu\text{m}$  (in air) to a range of  $(10\div 50)\mu\text{m}$  in water) in a known time interval . Through an optical system consisting of spherical and cylindrical lenses (as reported in the following figure), a light beam is transformed into a light sheet with around 1 mm thickness.

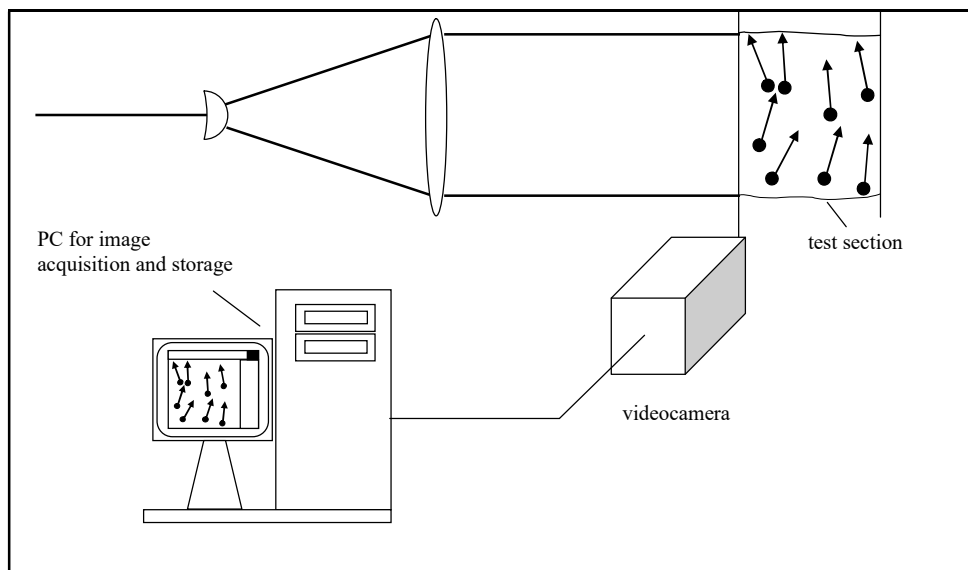


Figura. Schematic configuration of a PIV system.

Images of scattered light from tracer particles present in the test section are acquired in the direction orthogonal to the plane (using a video camera) and recorded on a PC for later analysis. The measurement of the velocity field can be divided into two parts:

- Image Acquisition
- Image Analysis.

**Image acquisition.** To obtain the velocity measurement on the measurement plane, it is necessary to acquire images in which it is possible to detect the tracer particles displacement in a known time interval. This time interval is the one between two successive illuminations of the measurement section or between two frames of the acquisition system. So far, in the first case the light source is a pulsed source (as for example a pulsed laser or a sufficiently intense stroboscopic light), which emits light at regular time intervals (ranging from a fraction of a microseconds to milliseconds in dependence to velocity involved) and the acquisition system is a so-called cross-correlation camera (one image for each pulse). In the second case, the light source is a high-power continuous one (as a continuous laser or a sufficiently intense continuous lamp) and the acquisition system is a high-speed camera (the system is also called High-Speed PIV – HS PIV). The resulting images of the tracer particles are then multiple images acquired at different time instants (single exposure mode, *i.e.* one image of a particle in each frame), as reported in the following figure.

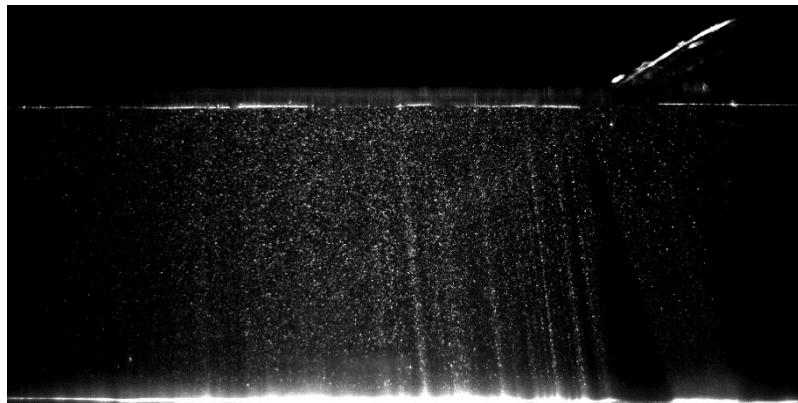


Figure. Example of PIV frames acquired with High-Speed camera (at the top) and with pulsed laser (at the bottom).

Using this arrangement it is possible to:

- determine also *velocity direction* based on the time sequence of images in addition to the velocity absolute value;
- simplify the images *analysis procedure* and have it more sensitive to small displacements;
- make possible to *increase in the number of tracer particles* in the images (i.e. increase in the number of information) without compromising the measurement of the velocity field with too much overlap.

On the other hand, it is necessary to have a high power pulsed laser or a high-speed camera, which are very expensive.

Another important difference is between the high or low density limit of tracer particles in the interrogation window (*i.e.* the window in which velocity measurement is performed) of size  $r$ . If  $r_m$  is the average distance among particles and  $N$  is the number of particles in this window, we have

$$\begin{aligned} r_m \ll r, \quad N \gg 1 & \quad (\text{PIV, properly called}), \\ r_m \leq r, \quad N \sim 1 & \quad (\text{PTV, Particle Tracking Velocimetry}), \end{aligned}$$

In proper PIV, it is  $N \cong 10$  and operations are performed to obtain the average displacement of all particles in the interrogation region, while in PTV, each particle is tracked to determine its movement.

The sensor of the videocamera transforms the image into an array of integers, each representing the light intensity averaged over a spatial element of the sensor (for color cameras, three different sensors R, G, B are present each with its intensity). Typically, in a black and white, 8 bit sensor, the permitted levels of intensity are  $2^8=256$  (0 = dark black element, 255 = white element completely saturated with light) and the matrix dimensions are given in terms of pixels, for example 1 Mpx corresponds to  $1024 \times 1024$  elements (this number is related to the resolution of the sensor and it is also dependent to the number of captured frames in one second by the camera).

The minimum measurable distance of the system (*i.e.* the inverse of the spatial resolution) is then larger than (in the case of 1024 elements)

$$l_{min} = \frac{L}{1024},$$

where  $L$  = dimension of the framed area (if  $L \cong 50$  cm this is in the order of 1 mm, but usually it is larger). The minimum time interval measured is related to the inverse of the interval between captured frames and for a normal camera is in the order of 1/25 of a second (and also 1/50 of a second using only the even or odd lines of images), being able to get up to 1/8000 of a second for a high-speed camera, which allows measuring also unsteady phenomena.

The image is thus presented as a function of the intensity or gray level ( $F$ ) in each image, which relates each pixel  $(x,y)$  to a number  $F$  (as previously reported this is between 0 and 255 for a 8 bit sensor)

$$F(x,y)$$

The information is related to the illuminated plane and allows the determination of the velocity components on that plane, by the relation:

$$\underline{U} = \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

Being  $\Delta t$  known (interval of light pulses or interval of camera frames), the problem is then to determine the displacement in the plane  $\Delta r$  (the hypothesis of constant velocity in time interval  $\Delta t$  is assumed, so far requiring this time interval to be very small) .

**Analisi delle immagini.** In questa fase é necessario distinguere tra PIV e PTV.

L'analisi delle immagini PIV suddivide il dominio spaziale acquisito in un insieme di sottodomini (cfr. figura 41) in ciascuno dei quali verrà calcolato lo spostamento medio delle particelle presenti (per motivi legati all'uso di algoritmi FFT, ciascun sottodominio ha solitamente forma quadrata con lato di dimensioni pari ad un multiplo di 2). Si utilizzano di solito solo due esposizioni successive delle particelle traccianti.

Lo spostamento in ciascun sottodominio si calcola a partire dalla funzione bidimensionale di autocorrelazione (multiesposizione) o della funzione di cross-correlazione (singola esposizione) delle intensità dei livelli di grigio nello stesso sottodominio di interrogazione:



**Images analysis.** At this step, it is necessary to distinguish between PIV and PTV.

PIV images analysis divides the spatial domain into a set of sub-domains (see figure 41) in each of which, the average displacement of the present particles will be calculated (for reasons related to the use of FFT algorithms, each subdomain usually has the square form with side dimensions equal to a multiple of 2) . Typically, only two successive exposures of the tracer particles are used.

The displacement in each subdomain is calculated from the two-dimensional autocorrelation function ( multi-exposure) or from cross-correlation function (single exposure) of the gray levels intensity in the same integration subdomain:

$$R_{ij}(r_1, r_2) = \iint F_i(x, y) F_j(x + r_1, y + r_2) dx dy$$

dove con  $i$  e  $j$  si sono indicati i sottodomini di interrogazione di area  $A_i$  e  $A_j$  (se  $i = j$  allora abbiamo una auto-correlazione) e con  $r_1$  e  $r_2$  le componenti sul piano  $(x, y)$  dello spostamento generico.

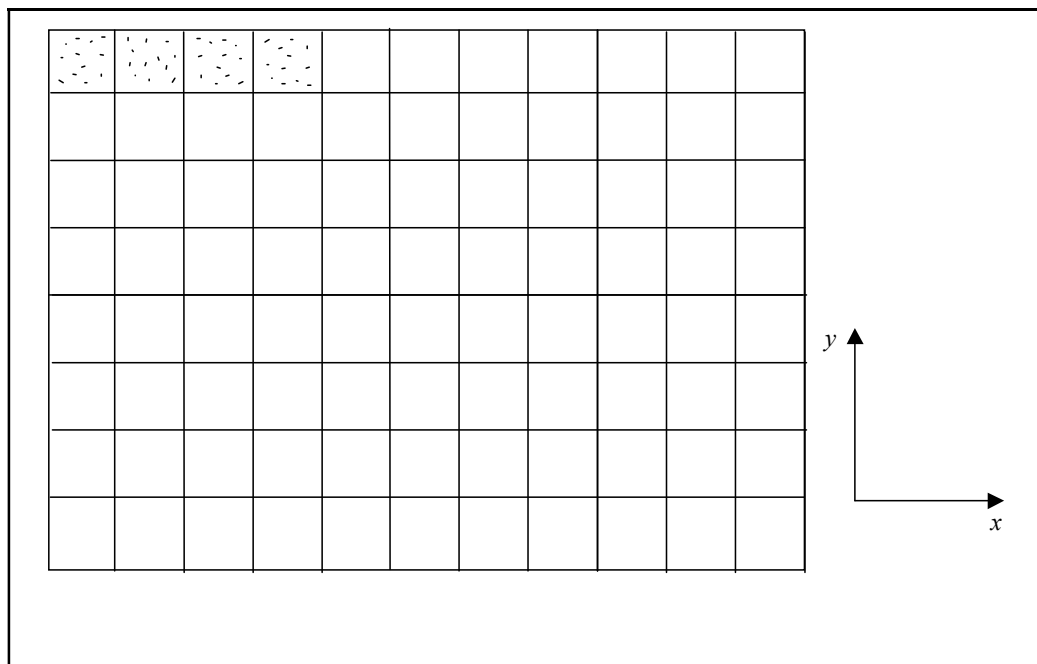


Figura 41. Suddivisione dell'immagine in sottodomini nella PIV.

L'integrale é di solito effettuato su  $A_i \equiv A_j$  (anche per singole esposizioni successive), ma, a volte, per migliorare la qualità della funzione risultante e diminuire il rumore si usa un dominio  $A_i \neq A_j$  in dipendenza del campo locale di velocità (metodi avanzati di elaborazione di immagini PIV).

Per determinare la funzione risultante sul piano  $(r_1, r_2)$ , si consideri il caso ideale di una singola particella in moto a velocità  $\underline{U}$ , rappresentata nel sottodominio  $A_i$  dell'immagine da una delta di Dirac  $\delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$  (essendo  $\underline{r}_0 = (x_0, y_0)$  la posizione della particella all'istante  $t_0$ ), e nel sottodominio  $A_j (\equiv A_i)$  da una delta di Dirac  $\delta(\underline{r} - \underline{r}'_0)$  (essendo  $\underline{r}'_0 - \underline{r}_0 = \Delta \underline{r}_0 = \underline{U} \Delta t$ , con  $\underline{r}'_0 = (x'_0, y'_0)$  e  $\Delta \underline{r}_0 = (\Delta x_0, \Delta y_0)$ ). La funzione precedente sarà:

$$R_{ij}(r_1, r_2) = \iint_A \delta(x - x_0, y - y_0) \delta(x - x'_0 + r_1, y - y'_0 + r_2) dx dy = \delta(r_1 - \Delta x_0, r_2 - \Delta y_0),$$

nel caso della cross-correlazione, e

$$R_{ij}(r_1, r_2) = \iint F_i(x, y) F_j(x + r_1, y + r_2) dx dy$$

where i and j are indicated as subdomains interrogation area  $A_i$  and  $A_j$  (if  $i = j$  then we have a self-correlation) and  $r_1$  and  $r_2$  with the components in the plane  $(x, y)$  of the displacement generic.

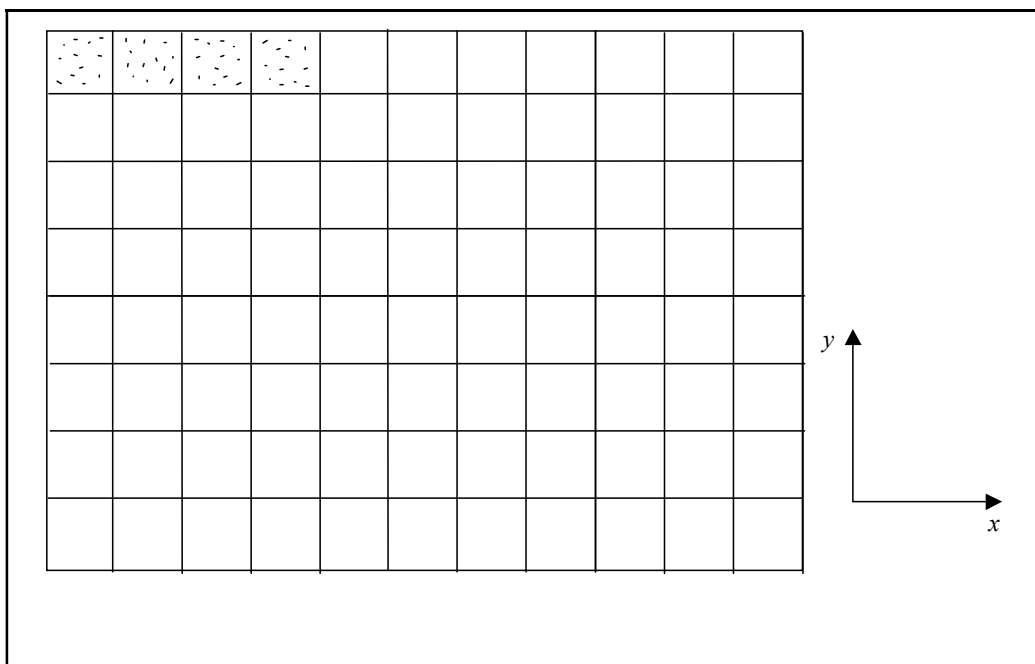


Figure 41. Suddivisione dell'immagine in sottodomini nella PIV.

The integral is usually performed on  $A_i \equiv A_j$  (also for successive single exposures), but some times, to improve the quality of the resulting function and decrease the noise, the domain  $A_i \neq A_j$  is used in dependence to the local velocity field (advanced methods in PIV images processing).

To determine the resulting function in the plane  $(r_1, r_2)$ , consider the ideal case of a single particle in motion at velocity  $\underline{U}$ , represented in the image subdomain  $A_i$  by a Dirac delta  $\delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$  (being  $\underline{r}_0 = (x_0, y_0)$  the particle position at time  $t_0$ ), and in the subdomain  $A_j (\equiv A_i)$  by a Dirac delta  $\delta(\underline{r} - \underline{r}'_0)$  (being  $\underline{r}'_0 - \underline{r}_0 = \Delta \underline{r}_0 = \underline{U} \Delta t$ , with  $\underline{r}'_0 = (x'_0, y'_0)$  and  $\Delta \underline{r}_0 = (\Delta x_0, \Delta y_0)$ ). The previous function would be:

$$R_{ij}(r_1, r_2) = \iint_A \delta(x - x_0, y - y_0) \delta(x - x'_0 + r_1, y - y'_0 + r_2) dx dy = \delta(r_1 - \Delta x_0, r_2 - \Delta y_0),$$

in the case of cross-correlation, and

$$\begin{aligned} R_{ii}(r_1, r_2) &= \iint_A [\delta(x - x_0, y - y_0) + \delta(x - x'_0, y - y'_0)] [\delta(x - x_0 + r_1, y - y_0 + r_2) + \delta(x - x'_0 + r_1, y - y'_0 + r_2)] dx dy = \\ &= 2\delta(r_1, r_2) + \delta(r_1 - \Delta x_0, r_2 - \Delta y_0) + \delta(r_1 + \Delta x_0, r_2 + \Delta y_0) \end{aligned}$$

nel caso della auto-correlazione.

Preso l'origine degli assi nel centro del piano  $(r_1, r_2)$ , si avrà quindi un unico picco nel caso della cross-correlazione e un triplo picco nel caso della auto-correlazione (cfr. figura 42).

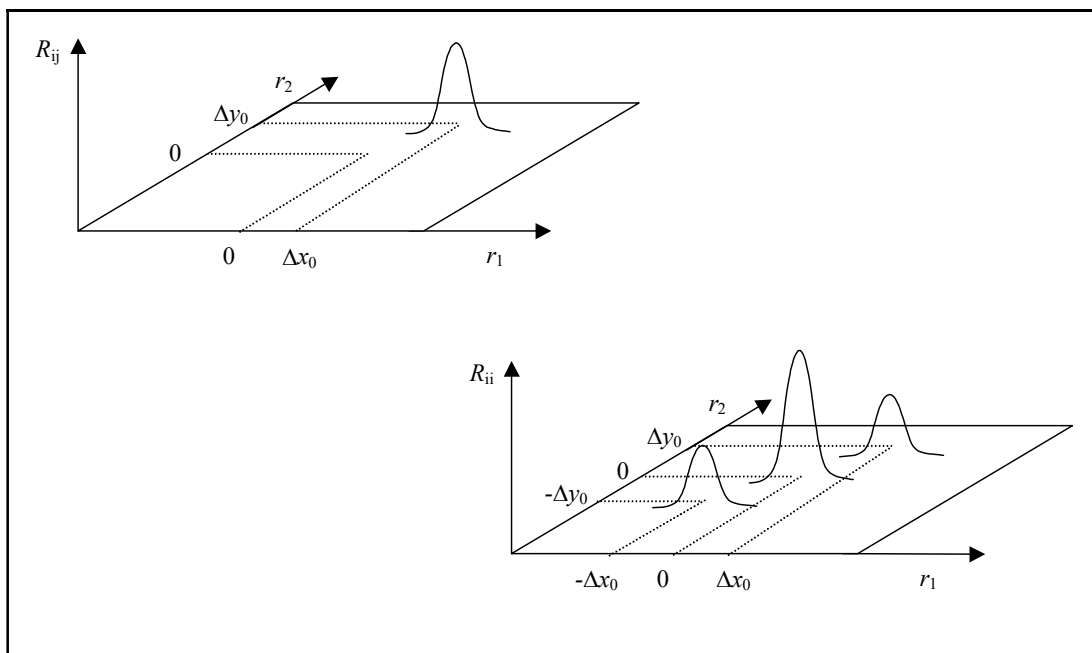


Figura 42. Picchi nel piano della cross-correlazione (a sinistra) e dell'auto-correlazione (a destra) in PIV.

Nel caso di una immagine reale, i picchi saranno degradati sia dalla presenza del rumore di fondo (anche sotto forma di particelle singole senza corrispondenza nella seconda esposizione), sia dalla presenza di spostamenti differenziati per le diverse particelle (che daranno allargamenti dei picchi intorno al valore medio). Applicando un livello di soglia alle funzioni di correlazione ottenute, è possibile determinare la posizione dei picchi. Come si può notare, mentre nel caso della cross-correlazione la determinazione è univoca, nel caso della auto-correlazione l'energia è suddivisa su tre picchi (e quello centrale è più elevato degli altri due); in particolare, per spostamenti piccoli, i picchi che si trovano in  $\pm \Delta r_0$  possono essere parzialmente nascosti dal picco centrale. Inoltre, la presenza dei due picchi simmetrici preclude la determinazione del segno dello spostamento. Queste osservazioni aiutano a comprendere perché è preferibile, quando possibile, utilizzare una coppia di esposizioni singole e calcolare su queste la funzione di cross-correlazione.

$$R_{ii}(r_1, r_2) = \iint_A [\delta(x-x_0, y-y_0) + \delta(x-x'_0, y-y'_0)] [\delta(x-x_0+r_1, y-y_0+r_2) + \delta(x-x'_0+r_1, y-y'_0+r_2)] dx dy =$$

$$= 2\delta(r_1, r_2) + \delta(r_1 - \Delta x_0, r_2 - \Delta y_0) + \delta(r_1 + \Delta x_0, r_2 + \Delta y_0)$$

in the case of the auto-correlation .

Taken the axes origin at the center of the plane  $(r_1, r_2)$ , a single peak in the case of cross-correlation and a triple peak in the case of auto-correlation can be observed (see figure 42) .

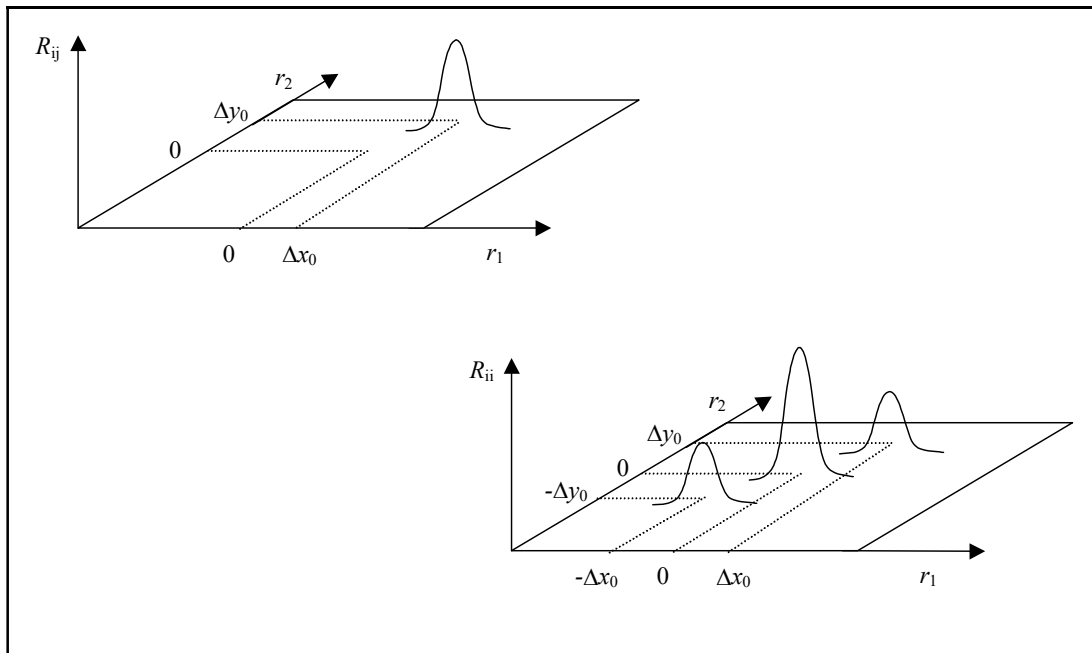


Figura 42. Peaks in cross-correlation (left side) and auto-correlazione (right side) plane in PIV.

In the case of a real image, the peaks will be degraded both by the presence of background noise (also in the form of single particles without correspondance to the second exposure) and by the presence of different displacements for different particles (which will give peaks widening around the mean value). Applying a threshold level to the correlation functions obtained, it is possible to determine the position of the peaks. As can be seen, while in the case of cross-correlation determination is unique, in the case of the auto-correlation energy is divided into three peaks (and the middle one is higher than the other two), in particular, for small displacements, peaks which are found in  $\pm \Delta r_0$ , can be partially hidden by the central peak. Moreover, the presence of two symmetrical peaks prevents the determination of the displacement sign. These observations help to understand why it is preferable, when possible, using a pair of single exposures and calculating the cross-correlation function on them.

Da un punto di vista pratico, essendo la determinazione delle funzioni di correlazione molto onerosa in termini di tempi di calcolo (sostituendo gli integrali con somme su elementi discreti, il numero di operazioni è pari a  $N^2 (N - r_1) (N - r_2) \approx N^4$ ), si ricorre alla densità spettrale di potenza (che con algoritmi Fast Fourier Transform, FFT, necessita di  $(N \log N)^2 \approx N^2 \log N$  operazioni):

$$S_{ij}(k_1, k_2) = \tilde{F}_i(k_1, k_2) \cdot \tilde{F}_j^*(k_1, k_2) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \left( \iint_{A_i} F_i(x, y) e^{-i(k_1 x + k_2 y)} dx dy \right) \left( \iint_{A_j} F_j(x, y) e^{i(k_1 x + k_2 y)} dx dy \right)$$

dove con  $\tilde{F}(k_1, k_2)$  si è indicata la trasformata di Fourier di  $F(x, y)$ , con l'asterisco il complesso coniugato e con  $\underline{k} = (k_1, k_2)$  il vettore d'onda di modulo pari a  $[(2\pi/r_1)^2 + (2\pi/r_2)^2]^{1/2}$ . La densità spettrale di potenza (spettro) è pari al modulo quadro della trasformata dell'immagine; come detto, queste funzioni spettrali possono essere calcolate in tempi rapidi con l'ausilio degli algoritmi di FFT. Nelle stesse ipotesi di cui in precedenza (immagini di particelle rappresentate da delta di Dirac), si può scrivere:

$$S_{ij}(k_1, k_2) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 [\cos(k_1 \Delta x_0 + k_2 \Delta y_0) - i \text{sen}(k_1 \Delta x_0 + k_2 \Delta y_0)]$$

nel caso del cosiddetto cross-spettro e per l'auto-spettro:

$$S_{ii}(k_1, k_2) = \frac{1}{\pi^2} [1 + \cos(k_1 \Delta x_0 + k_2 \Delta y_0)]$$

Il primo è una funzione complessa che avrà modulo e fase, mentre il secondo è una funzione reale. Per prima cosa consideriamo quest'ultimo che, nel piano  $(k_1, k_2)$  corrisponde ad un sistema di frange (la dizione frange, derivata dai sistemi ottici, è adottata in quanto tali funzioni spettrali venivano calcolate in passato per via ottica (Young fringe photography)) che presenta dei massimi (di valore pari a  $1/\pi^2$ ) quando  $k_1 \Delta x_0 + k_2 \Delta y_0 = 2\pi N$  (cfr. figura 43). Per  $N=0$  si ottiene la retta passante per l'origine degli assi con coefficiente angolare  $-(\Delta x_0 / \Delta y_0)$ ; sempre con riferimento alla figura 43, la distanza tra le frange è data da:

$$\Delta k_0 = \frac{2\pi}{(\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2)^{1/2}} = \frac{2\pi}{\Delta r_0}$$

From a practical point of view, since the determination of the correlation functions are very costly in terms of computation time (replacing the integrals with sums of discrete elements, the number of operations is equal to  $N^2 (N - r_1) (N - r_2) \approx N^4$ , the power spectral density (which with Fast Fourier Transform algorithms, FFT, requires  $(N \log N)^2 \approx N^2 \log N$  operations ) is used:

$$S_{ij}(k_1, k_2) = \tilde{F}_i(k_1, k_2) \cdot \tilde{F}_j^*(k_1, k_2) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \left( \iint_{A_i} F_i(x, y) e^{-i(k_1 x + k_2 y)} dx dy \right) \left( \iint_{A_j} F_j(x, y) e^{i(k_1 x + k_2 y)} dx dy \right)$$

Where with  $\tilde{F}(k_1, k_2)$ , the Fourier transform of  $F(x, y)$  is indicated, with the asterisk the complex conjugate and with  $\underline{k} = (k_1, k_2)$  and the wave vector in with absolute value equal to  $[(2\pi/r_1)^2 + (2\pi/r_2)^2]^{1/2}$ . The power spectral density (spectrum) is equal to the square absolute value of the transformed image, as said, these spectral functions can be calculated in a short time with the aid of FFT algorithms. Under the same assumptions mentioned above (particles images represented by the Dirac delta), it can be written:

$$S_{ij}(k_1, k_2) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 [\cos(k_1 \Delta x_0 + k_2 \Delta y_0) - i \text{sen}(k_1 \Delta x_0 + k_2 \Delta y_0)]$$

in the case of so-called cross-spectrum and the auto-spectrum:

$$S_{ii}(k_1, k_2) = \frac{1}{\pi^2} [1 + \cos(k_1 \Delta x_0 + k_2 \Delta y_0)]$$

The first one is a complex function which has absolute value and phase, while the second is a real function. For the first, we consider that the latter, in the plane  $(k_1, k_2)$  corresponds to a system of fringes (fringes diction, obtained from optical systems, is adopted since these spectral functions were calculated in the past by optic (Young fringe photography)) which has the maximum (with a value equal to  $1/\pi^2$ ) when  $k_1 \Delta x_0 + k_2 \Delta y_0 = 2\pi N$  (see Figure 43). For  $N=0$ , a straight line passing through the axes origin with angular coefficient  $-(\Delta x_0/\Delta y_0)$  can be obtained; always with reference to figure 43, the distance between the fringes is given by:

$$\Delta k_0 = \frac{2\pi}{(\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2)^{1/2}} = \frac{2\pi}{\Delta r_0}$$

cioè, determinando la distanza tra le frange, si determina il modulo dello spostamento, necessario per conoscere il modulo della velocità. La direzione di tale spostamento è quella ortogonale al sistema di frange (data dall'inverso del coefficiente angolare di cui in precedenza  $(\Delta y_0/\Delta x_0)$ ).

Per quello che riguarda il cross-spettro, si ottiene in modulo

$$|S_{ij}(k_1, k_2)| = \frac{1}{4\pi^2}$$

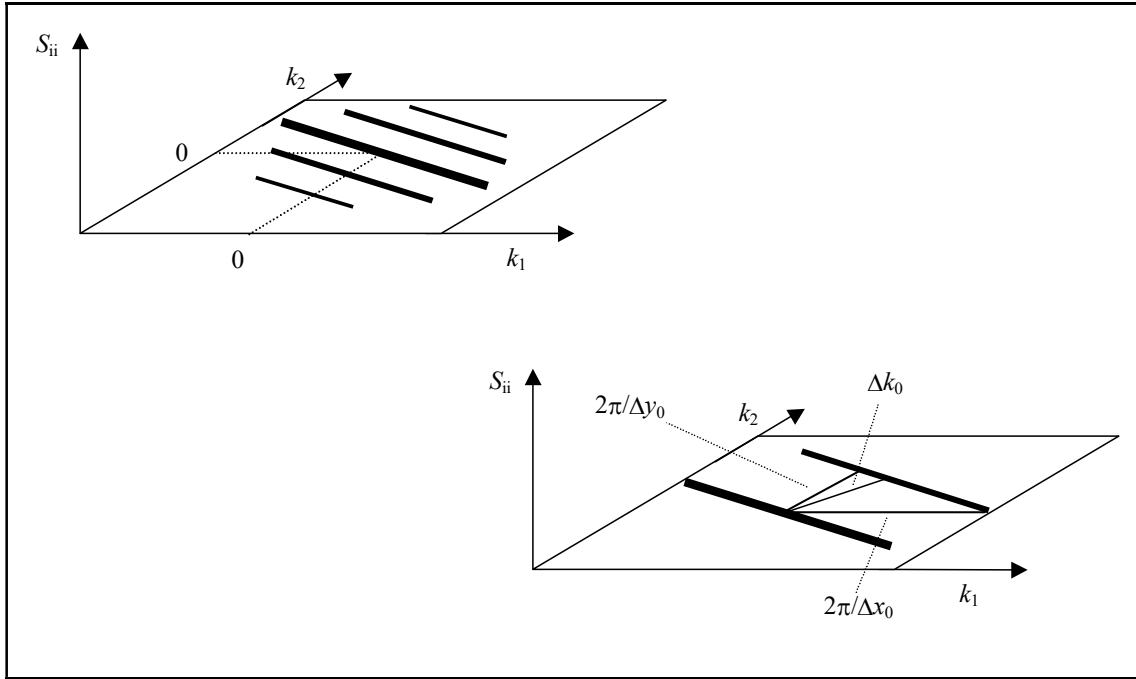


Figura 43. Configurazione delle frange nel piano spettrale  $(k_1, k_2)$  e distanza tra le frange per la PIV.

e per la fase:

$$\Phi_{ij}(k_1, k_2) = k_1 \Delta x_0 + k_2 \Delta y_0$$

Il modulo ha valore costante su tutto il piano (fornisce solamente l'energia complessiva associata all'intensità luminosa delle immagini), mentre la fase contiene le stesse informazioni dell'auto-spettro; infatti per  $\Phi = 2\pi N$  si avranno dei massimi corrispondenti alle rette di equazione  $k_1 \Delta x_0 + k_2 \Delta y_0 = 2\pi N$ . Ovviamente, nelle situazioni reali, questo sistema di frange sarà degradato esattamente come nel caso delle funzioni di autocorrelazione.

i.e. by determining the distance between the fringes, the displacement form can be determined, which is necessary for knowing the velocity absolute value. The direction of this displacement is perpendicular to the fringes system (given by the inverse of the angular coefficient previously mentioned  $(\Delta y_0/\Delta x_0)$ ).

Considering cross-spectrum, the module can be gained

$$|S_{ij}(k_1, k_2)| = \frac{1}{4\pi^2}$$



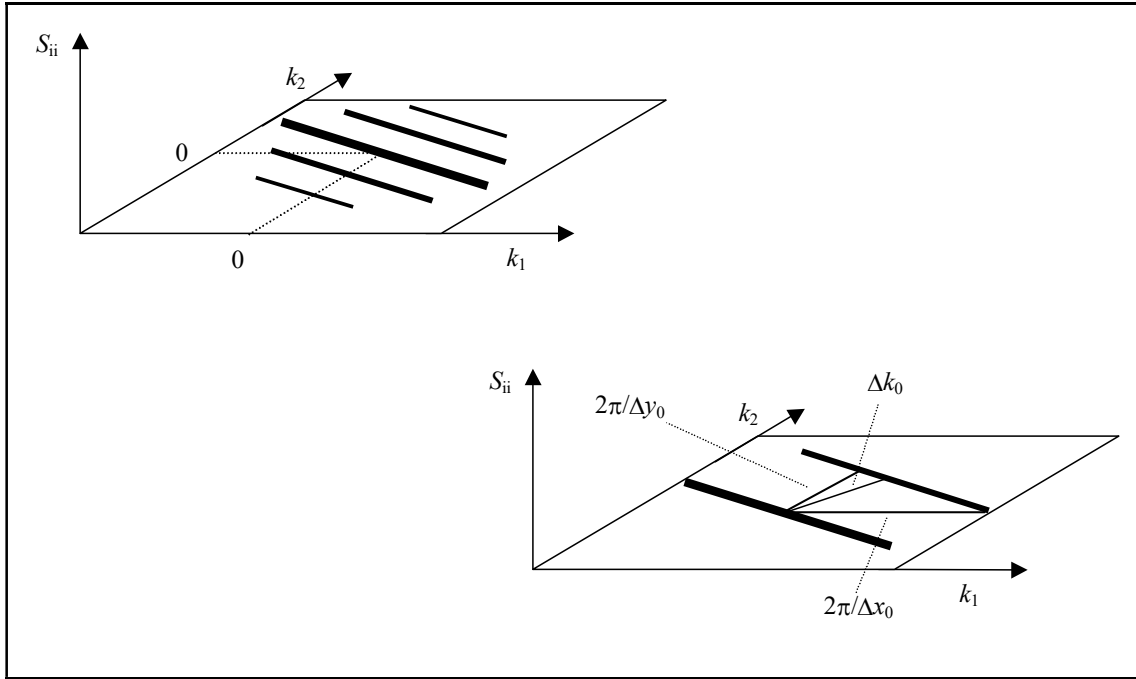


Figure 43. Fringes configuration in the spectral plane  $(k_1, k_2)$  and the distance between the fringes for PIV.

and for the phase:

$$\Phi_{ij}(k_1, k_2) = k_1 \Delta x_0 + k_2 \Delta y_0$$

The module has a constant value over the entire floor (provides only the total energy associated to the light intensity of the images), while the phase contains the same information of auto-spectrum; in fact for  $\Phi = 2\pi N$  there will be the maximum correspondance to the straight lines of equation  $k_1 \Delta x_0 + k_2 \Delta y_0 = 2\pi N$ . Obviously, in real situations, this fringes system will be degraded exactly as in the case of the autocorrelation functions.

Questo parallelismo tra funzioni di correlazione e spettrali trova espressione nel legame derivato dal teorema di Wiener-Khintchine:

$$S_{ij}(k_1, k_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{A_i} R_{ij}(r_1, r_2) e^{-i(k_1 r_1 + k_2 r_2)} dr_1 dr_2$$

$$R_{ij}(r_1, r_2) = \iint_{A_i} S_{ij}(k_1, k_2) e^{i(k_1 r_1 + k_2 r_2)} dk_1 dk_2$$

utilizzando il quale si possono anche verificare i calcoli precedenti. Il precedente legame suggerisce anche un metodo pratico per il calcolo delle funzioni di correlazione e dello spostamento:

- calcolo della densità spettrale di potenza con algoritmi FFT (spesso tale calcolo è effettuato separatamente prima lungo la direzione  $x$  e poi lungo la direzione  $y$ );
- utilizzo delle relazioni di Wiener-Khintchine per ottenere la funzione di correlazione;
- valutazione dello spostamento dall'analisi delle superfici di correlazione (cosa più semplice dell'analisi delle frange).

Nell'effettuare il primo passo, si possono utilizzare le metodologie di miglioramento e velocizzazione di calcolo (spostamento finestre, finestrata, "zero-padding") tipicamente usate nell'analisi dei segnali (cfr. capitolo successivo).

In uscita dall'algoritmo di calcolo per la tecnica PIV, si ottiene un valore delle due componenti di velocità per ciascun sottodominio corrispondente al valor medio per le particelle ivi presenti.

This parallelism between the correlation functions and spectrals finds the expression in the relation derived from the Wiener-Khintchine theorem:

$$S_{ij}(k_1, k_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{A_i} R_{ij}(r_1, r_2) e^{-i(k_1 r_1 + k_2 r_2)} dr_1 dr_2$$

$$R_{ij}(r_1, r_2) = \iint_{A_i} S_{ij}(k_1, k_2) e^{i(k_1 r_1 + k_2 r_2)} dk_1 dk_2$$

By using them, previous calculations can be verified. The previous relation also suggests a practical method for calculation of correlation functions and displacement:

- Calculation of the power spectral density with FFT algorithms (usually this calculation is performed separately first along the  $x$  direction and then along the  $y$ -direction);
- Using Wiener-Khintchine relation to obtain the correlation function;
- Evaluation of the displacement from correlation surfaces analysis (simpler than fringe analysis).

In carrying out the first step , improvement methods and accelerating of calculation can be used (windows displacement, windows, "zero -padding " ) typically used in the signal analysis (see next chapter).

In the output of the calculation algorithm for PIV technique, the value of two velocity components for each sub-domain corresponding to the average value for the particles therein can be found.

Per quello che riguarda gli errori, questi sono quasi del tutto determinati dalla misura della distanza percorsa dalle particelle traccianti (avendo la misura dell'intervallo temporale un errore molto inferiore all'1%). Poiché la digitalizzazione è effettuata su matrici con un numero discreto di elementi (tipicamente 512), l'errore assoluto sulla distanza è dell'ordine di  $\pm 1$  pixel:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta(\Delta t)}{\Delta t} \approx \pm \frac{1 \text{ pixel}}{\Delta x}$$

cioè l'errore relativo sarà molto grande per piccoli spostamenti e relativamente piccolo per grandi spostamenti (anche se, come accennato in precedenza, è possibile ottenere un'accuratezza sub-pixel con tecniche di interpolazione). La richiesta di grandi spostamenti è però in contraddizione con quella di piccoli spostamenti affinché la velocità misurata sia effettivamente "locale" e non mediata su grandi distanze (con un errore di troncamento che è direttamente proporzionale a  $\Delta x$ ).

$$R_{D_{PIV}} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} \approx \frac{D}{2d}$$

where, typically  $D \approx 30 d$ , we have  $R_{D_{PIV}} \approx 15$  (actually it is possible to extend the minimum measurable velocity to a fraction of  $d$  (sub-pixel accuracy) and get  $R_{D_{PIV}} \approx 50$ ).

In the case of PTV instead, there is the same minimum velocity theory (also here the minimum distance can be a fraction of  $d$ ) and a maximum velocity which this time is related to the dimension of the whole framed area ( $L$ ), ie,  $L / 2 \Delta t$ . It has therefore

$$R_{D_{PTV}} \approx \frac{L}{2d}$$

i.e.  $R_{D_{PTV}} \approx 50$  (being  $L \approx 100 d$ ), which, as previous, extends by a factor of about 3 by measuring small displacements in the order of a fraction of  $d$ . For comparison, keeping in mind that

with LDA technique, the dynamic range, obtaining without altering the geometric configuration of the beams (ie without changing the spacing between the fringes ), is in the order of 200 .

Compared to the LDA technique, it should also be pointed out that both the PIV and PTV allow to obtain information on the spatial structure of the turbulence (in addition to temporal one by using fast cameras). Being turbulence characterized by variable quantities both in time and in space, the image analysis technique will allow them a more complete description.

Considering errors, these are almost whole determined by measuring the distance traveled by the tracer particles (having time interval measurement error much less than 1%). Because the digitization is performed on matrices with discrete number of elements (typically 512), the absolute error on the distance is in the order of  $\pm 1$  pixel:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta(\Delta t)}{\Delta t} \approx \pm \frac{1 \text{ pixel}}{\Delta x}$$

i.e. the relative error will be very large for small displacements and relatively small for large displacements (although, as mentioned before, it is possible to obtain sub-pixel accuracy by interpolation techniques). The demand for large displacements is therefore in contradiction with that of small displacements so that measured velocity is actually "local" and not averaged over large distances (with a truncation error which is directly proportional to  $\Delta x$ )

Tipicamente si ha un errore dell'ordine di qualche percento, che, pur essendo maggiore di quelli ottenibili con altre tecniche anemometriche, è parzialmente compensato dall'aver informazioni su una regione estesa e quindi misurazioni spazialmente contigue una con l'altra.

Infine, è possibile, tramite tecniche tomografiche, cioè utilizzando più sistemi di ripresa, estendere le misure anche ad un volume di fluido invece che su un solo piano. Pur se le procedure di acquisizione delle immagini sono identiche a quanto descritto in precedenza, le procedure di analisi delle immagini ottenute risultano notevolmente più complicate. Inoltre, il gran quantitativo di dati acquisiti rende ormai problematica non solo la fase di acquisizione ed elaborazione delle immagini, ma anche quella di registrazione, lettura e estrazione dei dati e delle informazioni in essi contenute.

### 3.5 Algoritmi avanzati per l'analisi di immagini PIV

L'analisi delle immagini di tipo PIV è stata nel corso degli anni sempre più raffinata sia per quanto riguarda la velocità degli algoritmi che per quello che riguarda l'aumento di risoluzione. Anche per la tecnica PTV si sono sviluppati algoritmi e idee in grado di ottenere dei buoni risultati anche in presenza di elevata densità del tracciante.

Per quanto riguarda la PIV, si è lavorato sugli algoritmi per il calcolo della cross-correlazione mettendo a punto i seguenti miglioramenti (più o meno elencati in ordine di sviluppo negli anni, si rimanda alla bibliografia sulla PIV per approfondimenti):

1. utilizzo di uno spostamento della finestra di interrogazione (“window offset”) per la determinazione della velocità;
2. approssimazione sub-pixel del picco di cross-correlazione;
3. sovrapposizione parziale delle finestre di interrogazione;
4. calcolo ricorsivo su finestre di interrogazione di dimensioni decrescenti;
5. utilizzo di una funzione peso per i livelli di intensità luminosa nelle finestre di interrogazione;
6. deformazione delle finestre di interrogazione e dell'intera immagine sulla base del gradiente di velocità locale;
7. calcolo diretto della funzione di cross-correlazione;
8. moltiplicazione di mappe di cross-correlazione adiacenti.

Typically the error is in the order of a few percent, which, although higher than those obtained with other anemometry techniques, is partially compensated by having information on a large region and then measurements which are spatially adjacent one to each another.

Finally, by means of tomographic techniques, i.e. using multiple camera, it is also possible to extend the measurement to a fluid volume instead of a single plane. Although the procedures for the acquisition of the images are identical to that described above, the procedures for analysis of images obtained are considerably more complicated. Furthermore, the large amount of captured data now makes it problematic not only the acquisition phase and images analysis, but also the recording, reading and extracting data and information contained therein.

### 3.5 Advanced algorithms for the analysis of PIV images

The PIV images analysis has been refined increasingly over the years both considering algorithms convergence speed and increasing the resolution. Even for the PTV technique, some algorithms and ideas have developed to obtain good results even in the presence of high density tracers.

Considering PIV, some studies on algorithms for calculating the cross-correlation are carried out by developing the following improvements (more or less presented in order of development over the years, refer to the bibliography on the PIV for details) :

- 1 . use of a of the interrogation window displacement ("window offset") for velocity determination;
- 2 . sub-pixel approximation of the cross-correlation peak;
- 3 . partial overlap of the interrogation window;
- 4 . recursive calculation of the interrogation window with decreasing dimensions;
- 5 . use of a weight function for the levels of light intensity in the query dialogs;
- 6 . deformation of interrogation window and of the entire image on the basis of the local velocity gradient;
- 7 . direct calculation of the cross-correlation function;
- 8 . multiplication of adjacent cross-correlation maps.

Con l'applicazione di questi metodi é stato possibile ridurre l'errore sulla determinazione dello spostamento inferiore a 0.1 pixel (considerando che lo spostamento ottimale per immagini PIV é dell'ordine di 10 pixel, si deduce che l'errore su un vettore istantaneo di velocità é inferiore all'1%). Si considereranno brevemente i miglioramenti elencati in precedenza.

Per quello che riguarda il primo metodo, si cerca di spostare la seconda finestra di interrogazione rispetto alla prima precedentemente al calcolo della funzione di correlazione. In tal modo si possono rimuovere i requisiti sugli spostamenti massimi misurabili (limitati normalmente a metà della dimensione della finestra) e massimizzare il numero delle stesse particelle traccianti in ogni coppia finestra (seguendo le particelle nel loro moto medio). Il procedimento é illustrato nella figura 47. Il problema principale consiste nel trovare il valore dello spostamento da attribuire alla seconda finestra. In teoria ciascuna sottofinestra potrebbe avere uno spostamento indipendente che é proprio la quantità che si vuole determinare !! Solamente nel caso di un flusso medio in una

direzione, con basse variazioni di velocità, si può ragionevolmente assegnare uno spostamento medio costante. Negli altri casi lo spostamento andrà ricercato ricorsivamente attraverso un'ottimizzazione della funzione di correlazione; in questo senso, risulta naturale far lavorare questo metodo in parallelo con quanto descritto al punto 4 (calcolo ricorsivo su finestre decrescenti).

Per il secondo metodo (approssimazione sub-pixel), essendo lo spostamento delle immagini di particelle misurato dalla mappa della funzione di cross-correlazione in termini di numeri interi (i pixel appunto), ci si aspetta che non sia possibile ridurre l'errore sulla determinazione di tale spostamento a meno di pixel. In realtà, come si può vedere dalla figura 48, quasi sempre il massimo effettivo della funzione di correlazione non è detto che si trovi in corrispondenza di un valore intero. Mediante un'interpolazione tra i punti in corrispondenza dagli interi (3 o più) è quindi possibile trovare un'approssimazione di questo massimo effettivo effettuando la misura con una risoluzione sub-pixel. Sono state provate numerose funzioni interpolatrici e infine la scelta è caduta sulla parabola e sulla gaussiana che meglio approssimano i valori in corrispondenza dei pixel; la gaussiana è quella che si rivela più robusta rispetto alle differenti situazioni (considerando anche che l'illuminazione è di tipo gaussiano). Ovviamente quanto rappresentato in figura 48 riguarda una sola direzione, mentre in realtà sul piano di correlazione si ha a che fare con una superficie sul piano  $(x,y)$ ; di conseguenza, si potrà scegliere tra due funzioni di interpolazione gaussiane che passino per 3 punti (una per ciascuna direzione) o una gaussiana bidimensionale che passi almeno per 5 punti.

With application of these methods, it was possible to reduce the error on displacement determination to less than 0.1 pixels (whereas the optimal displacement for PIV images is in the order of 10 pixels, it can be deduced that the error on an instantaneous velocity vector is less than 1%). We will consider briefly the previous improvements listed above.

Considering the first method, one tries to put the second interrogation window earlier than the first one into calculation of correlation function. In this way, the requirements on maximum measurable displacements (normally limited to half of the window size) and maximize the number of the same tracer particles in each window pair ( following the particles in their mean motion). The procedure is illustrated in figure 47. The main problem consists in finding the displacement value attributed to the second window. In theory, each subwindow could have a displacement which is exactly the quantity to be determined! Only in the case of the average flow in one direction, with low velocity variations, it can reasonably assign a constant average displacement. In other cases,

the displacement will be searched recursively through the correlation function optimization; in this sense , it naturally results in working in parallel with the method described in paragraph 4 (a recursive calculation on decreasing windows) .

For the second method (sub-pixel approximation), considering the particles images displacement measured from the cross-correlation function map in terms of integers (in fact, the pixels), it is expected that reducing the error to less than  $\pm 0.5$  pixels on the determination of such displacement is not possible. In fact, as can be seen from figure 48, almost always the actual maximum of the correlation function is not in correspondence with an integer value. By interpolation among the points in correspondance with the integers (3 or more), then it is possible to find an approximation of this effective maximum by measuring with a sub-pixel resolution. Several interpolating functions have been tried and finally the good choice is the parabola and the Gaussian which approximate better the values at the pixel, the Gaussian is more robust with respect to different situations (also considering that the illumination is of Gaussian type). Obviously, what shown in figure 48 is related to only one direction , while in reality on the correlation plane, it has to do with a surface on the plane  $(x,y)$ ; consequently, one can choose between two interpolant Gaussians functions which pass from 3 points (one for each direction) or a two-dimensional Gaussian which passes from at least 5 points .

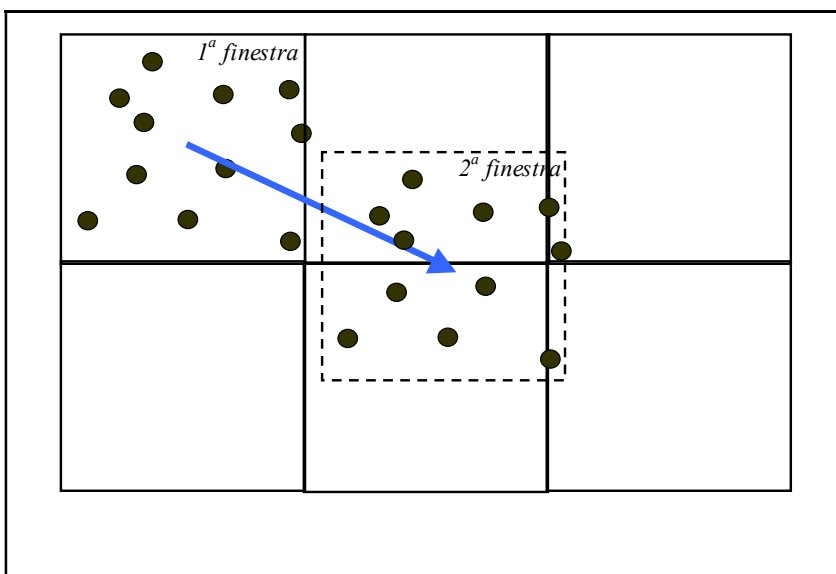


Figura 47. Window offset tra finestre di interrogazione.



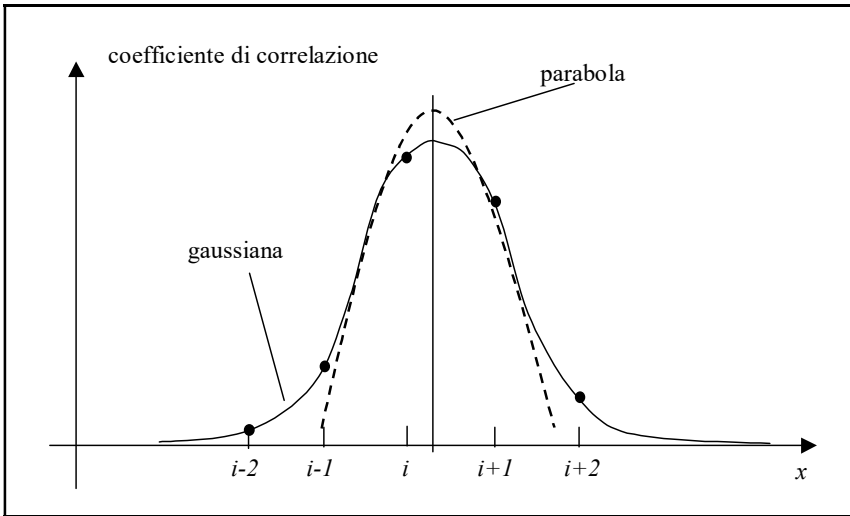


Figura 48. Approssimazione sub-pixel della funzione di correlazione.

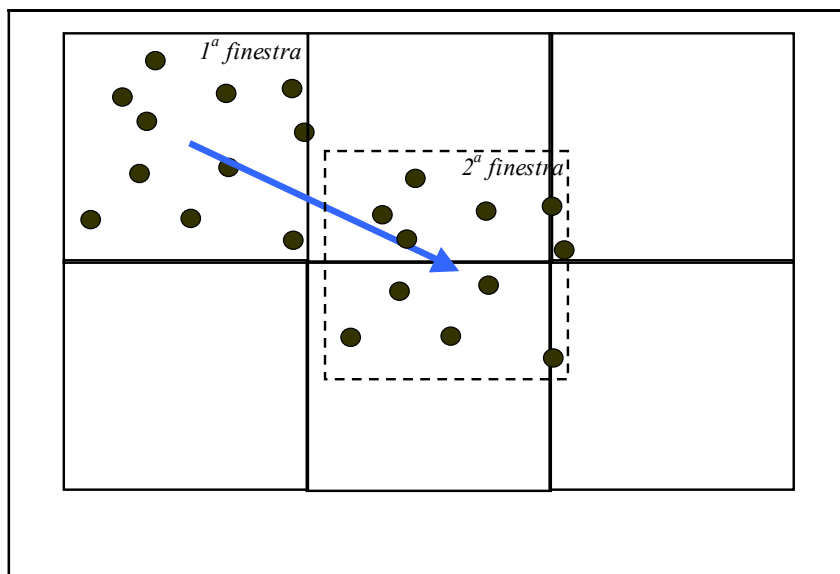


Figure 47. Window offset between interrogation windows.

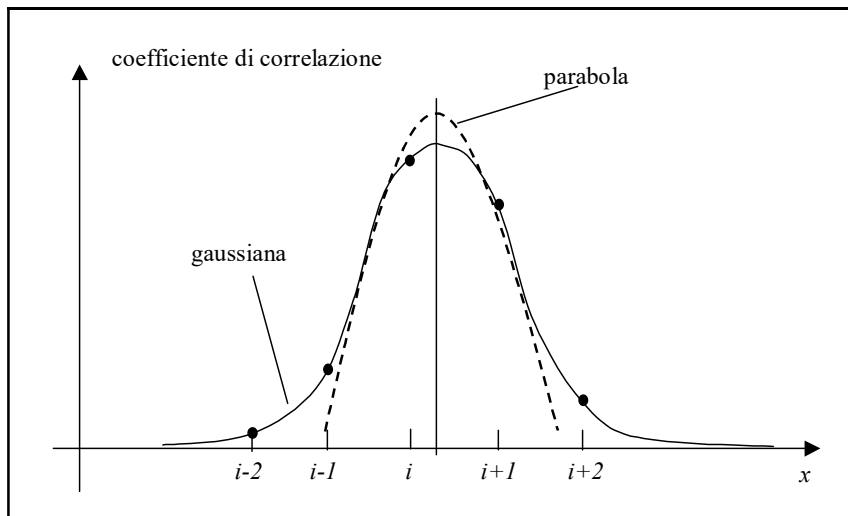


Figure 48. Sub-pixel approximation of correlation function.

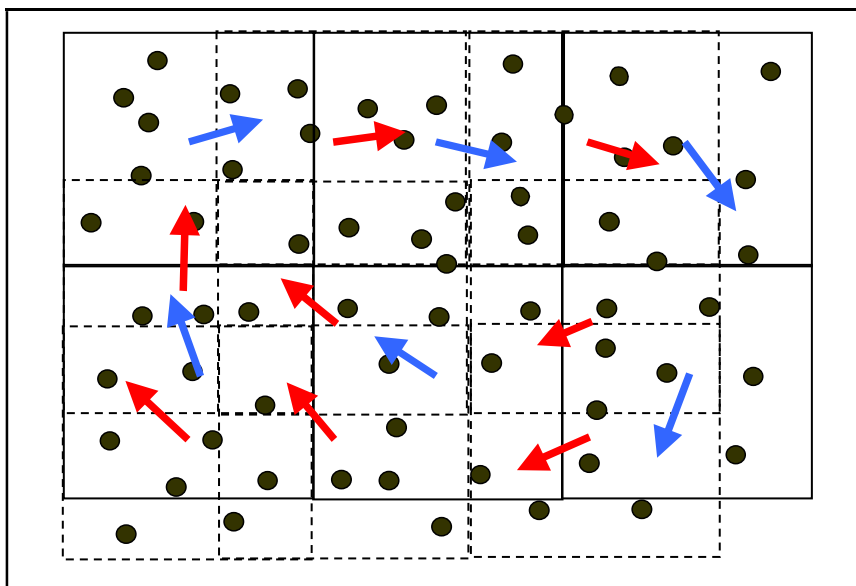


Figura 49. Sovrapposizione parziale delle finestre di interrogazione e vettori velocità risultanti.

Per quello che riguarda la possibilità di incrementare artificialmente la risoluzione spaziale mediante sovrapposizione parziale di finestre di interrogazione adiacenti (3° metodo), si tratta di scegliere l'intervallo tra le finestre di interrogazione in modo da avere una sovrapposizione parziale delle stesse. Sebbene tale operazione non aggiunga alcuna informazione aggiuntiva (le immagini delle particelle traccianti sono sempre le stesse), si é osservato un notevole beneficio sia nell'aspetto dei campi di velocità misurati (che risultano essere con più vettori e per così dire più "regolari") che nella diminuzione dei così detti vettori spuri (cioè vettori non omogenei a quelli

immediatamente vicini). In particolare, quest'ultimo miglioramento, come si può osservare dalla figura 49, dipende dal fatto che le immagini di particelle ai margini della zona di interrogazione possono essere parzialmente tagliate e quindi il loro contributo alla velocità misurata risulta solo parziale (nella figura sono indicati in blu i vettori velocità risultanti dall'analisi con finestre di interrogazione non sovrapposte e in rosso quelli che vengono ad aggiungersi ai blu grazie alla sovrapposizione). Dalle prove effettuate risulta che la migliore sovrapposizione sia piuttosto forte (tra il 60% e il 75% della finestra) in entrambe le direzioni; ne risulta un pesante aumento dei tempi necessari all'analisi di ogni immagine PIV.

In maniera simile a quanto sviluppato nei codici numerici, si è pensato di ottimizzare il calcolo delle velocità su un dato reticolo finale di misura attraverso un processo iterativo che partendo da un reticolo piuttosto rado arrivi per passi successivi al reticolo finale (punto 4). Normalmente non sono necessari più di 3-4 passi, però come detto questo processo viene svolto simultaneamente a quello di ricerca dello spostamento della finestra di cui al punto 1.

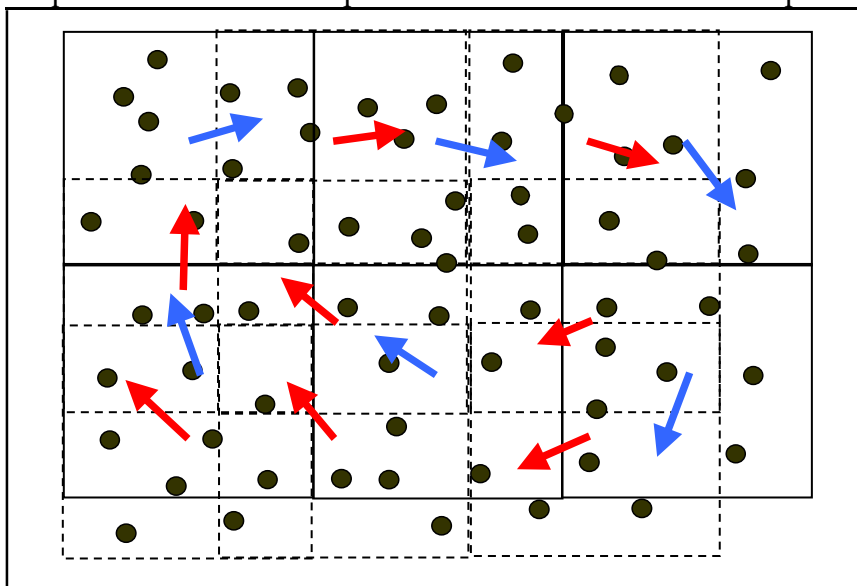


Figure 49. Partial overlap of the interrogation windows and velocity vectors resulting

Considering the possibility of artificially increasing the spatial resolution by partial overlapping of adjacent interrogation windows (3<sup>rd</sup> method), it comes to choose the interval between the interrogation windows in order to have a partial overlap of the same. Although this does not add any additional information (the images of the tracer particles are always the same), it is observed a significant benefit both in the measured velocity fields (which appear to be more carriers and so to say more "regular") and in the reduction of so-called spurious vectors (i.e. vectors are not homogeneous with those nearby). In particular, the latter improvement, as can be seen from

figure 49, depends on the fact that particles images on the borders of the interrogation area may be partially cut off and thus their contribution to the measured velocity is only partial (in the figure velocity vectors resulting from the analysis of interrogation windows with non-overlapping are indicated in blue and those which are added to the blue due to overlapping are in red). Preliminary measurements show that the best overlap is quite strong (between 60% and 75% of the window) in both directions, yielding a heavy increase in the required time for analysis of each PIV image.

In a manner similar to that developed in the numerical codes, it is thought to optimize the velocity calculation on a given final measurement grid through an iterative process which by starting from a quite fine grid, it arrives to successive passes in final grid (paragraph 4). Normally, more than 3-4 passes are not necessary, so as it is said, this process is carried out simultaneously with that of the search window displacement referred to in paragraph 1.

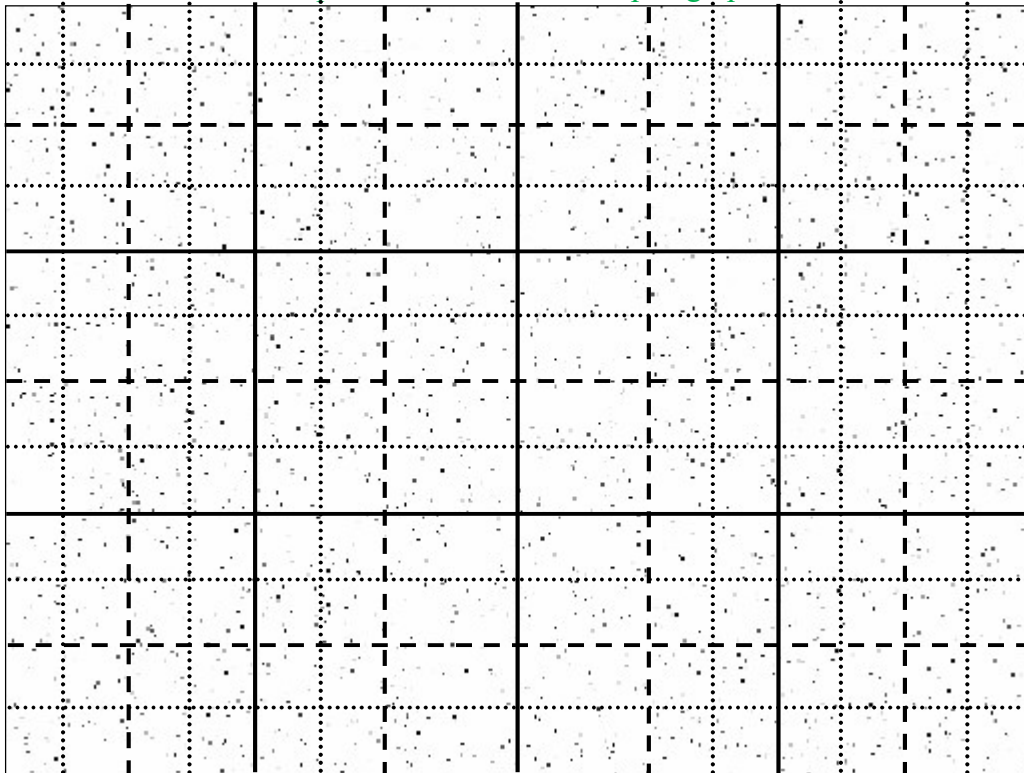


Figura 50. Immagine PIV con reticolo raffinato iterativamente (dal reticolo continuo a quello a punti passando per quello tratteggiato).

Di conseguenza, spesso si effettuano più passi temporali sullo stesso reticolo di misura prima di passare a quello più fitto. Nella figura 50 il procedimento è schematizzato sovrapposto ad un immagine PIV (in effetti si tratta di un'immagine costruita artificialmente per le analisi che verranno esposte successivamente riportata in negativo).

Per quello che riguarda il quinto punto (utilizzo di una funzione peso), come si è già messo in evidenza, uno degli aspetti cruciali nel calcolo della funzione di correlazione è la perdita di particelle dalla prima alla seconda immagine. Tale perdita è causata spesso dalla presenza di una componente di velocità in direzione ortogonale alla lamina di luce, ma spesso anche dallo spostamento delle particelle sul piano della lamina stessa (cosa a cui si cerca di porre rimedio con lo spostamento della finestra di cui al punto 1) o dal loro posizionamento in una zona laterale (con conseguente “taglio” di parte dell’immagine della particella). Il risultato è un decremento del massimo di correlazione con conseguente maggiore difficoltà della misura e aumento del rumore. Per ovviare a questo effetto si effettua spesso una “finestratura” (“windowing”) di ciascuna finestra di interrogazione moltiplicandola per una funzione peso (di solito una gaussiana) che dia maggiore importanza alle particelle situate in prossimità del centro della finestra stessa. Come raffigurato

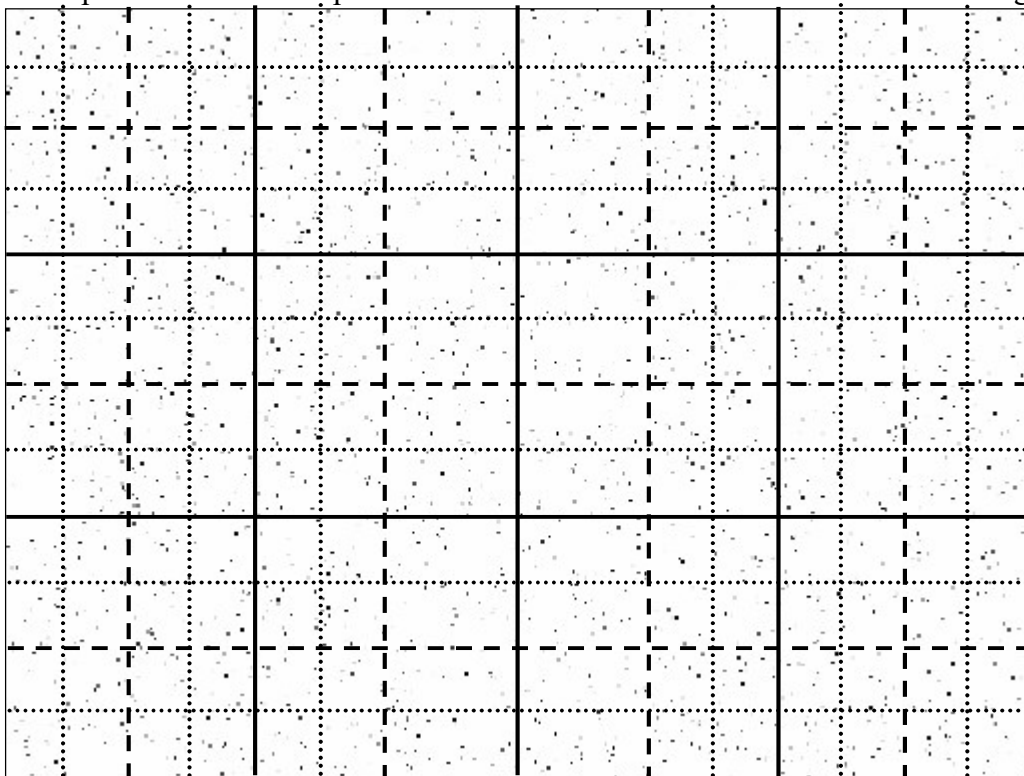


Figure 50. PIV image with iteratively refined grid (from continuous grid to dotted one by passing from dashed one).

As a result , usally more time steps on the same measurement grid are performed before moving to the coarse one. In figure 50, the procedure is schematically shown by superimposing on a PIV image (in fact, it comes from an image artificially made for analyses which will be exposed in negative for next analysis).

Considering fifth point (use of a weight function) , as has been already pointed out , one of the crucial aspects in correlation function calculation is the lack of particles from the first to the second image. This lack is often caused by the presence of a velocity component in the direction perpendicular to the light sheet and often by particles displacement in the sheet plane itself (something in which one seeks to address by window displacement referred to in paragraph 1) or by positioning them in a lateral zone (resulting in "cutting" a part of particle image). The result is a decrease in the maximum correlation with consequent greater difficulty in measurement and increasing the noise. To overcome this effect, a "windowing" of each interrogation window is often made by multiplying a weight function (usually a Gaussian ) which gives more importance to the particles located near the center of the window itself. as shown

nella figura 51, in alcuni casi (cioè per alcune funzioni peso) questa operazione consente anche di aumentare il rapporto segnale rumore (il rapporto tra l'intensità luminosa dovuta alle particelle traccianti e quella dovuta alla luminosità di fondo). Il metodo può anche essere utilizzato per definire un'orientazione della finestra di interrogazione in base al campo di velocità locale semplicemente deformando il cerchio risultante dalla proiezione della finestra peso sull'immagine in un'ellissi orientata (figura 52). Questa può essere un'alternativa meno onerosa dal punto di vista computazionale alla deformazione dell'intera immagine (trattata al punto successivo). Con l'applicazione delle procedure descritte fino a questo punto si ottiene un errore complessivo intorno a  $\pm 0.1$  pixel.

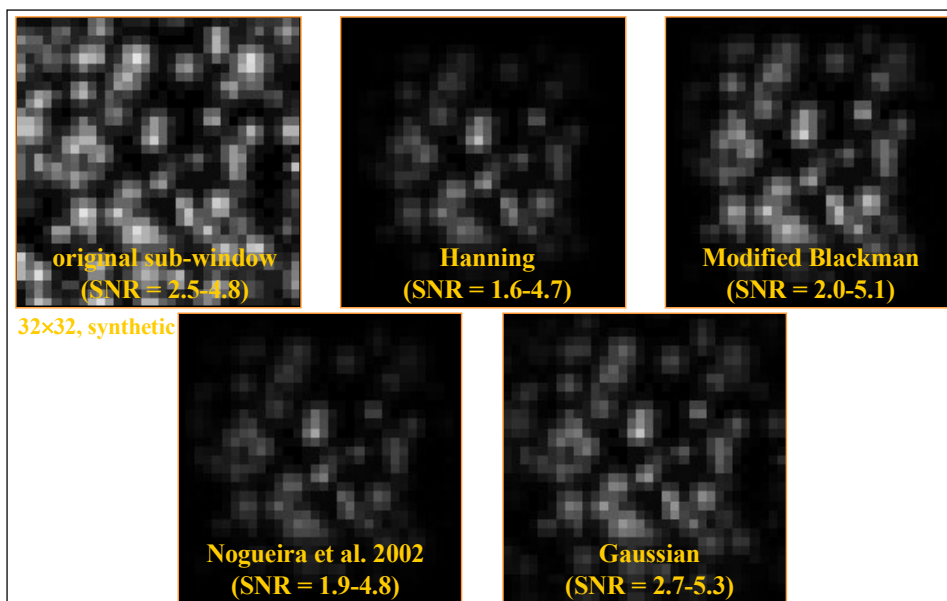


Figura 51. Immagine di una finestra di interrogazione 32\*32 con applicazioni di differenti funzioni peso.

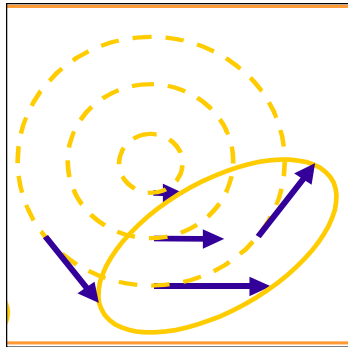


Figura 52. Esempio di deformazione di una finestra di interrogazione pesata nel caso di un vortice.

in figure 51, in some cases (i.e. for some weight functions) this operation also allows to increase the signal to noise ratio (the ratio between the light intensity due to the tracer particles, and that due to background brightness). The method can also be used to define an orientation of the interrogation window according to local velocity field by simply deforming the resulting circle from the projection of the weight window on the image in an oriented ellipse (figure 52). This can be a cheaper alternative from the computational point of view for entire image deformation (discussed in the next paragraph). With the application of the procedures described before until this paragraph, a total error around  $\pm 0.1$  pixels can be obtained.

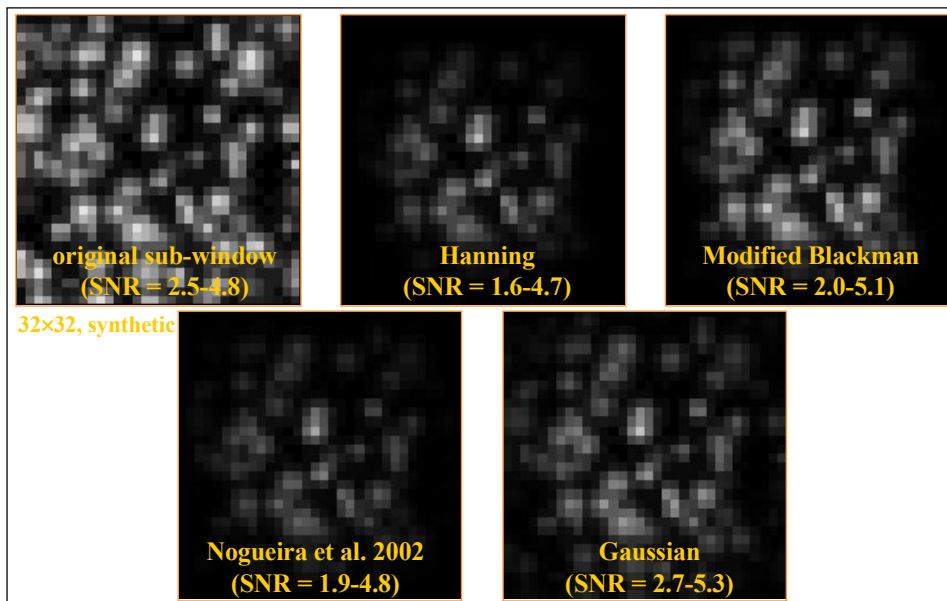


Figure 51. Picture of an interrogation window  $32 \times 32$  with applications of different weight functions.

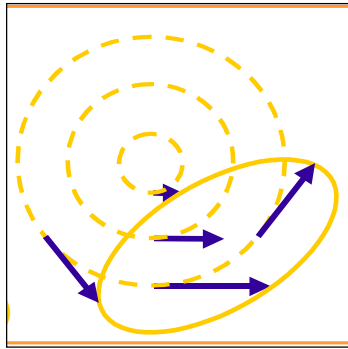


Figure 52. Example of an interrogation window deformation weighted in the case of a vortex.

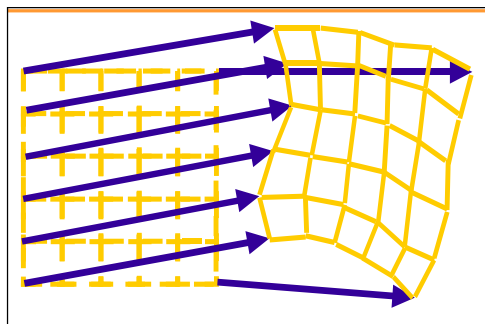


Figura 53. Deformazione dell'intera immagine PIV in base al campo di velocità misurato iterativamente.

Per quanto riguarda la deformazione dell'intera immagine (punto 6), come detto, per rendere massimo il valore della funzione di correlazione (e quindi validare la misura PIV), è necessario rendere minima la differenza tra la prima e la seconda immagine. Uno degli aspetti che maggiormente aumenta tale differenza è la perdita di immagini di particelle tra le due immagini a causa di fuoriuscita dal piano di misura e gradienti del campo di velocità. Questa seconda causa può essere rimossa attraverso una deformazione locale delle finestre di interrogazione in base al campo di velocità misurato alle iterate precedenti (come descritto al punto 4). Ciascun vertice della finestra di interrogazione viene spostato nella seconda immagine in una nuova posizione così che il rettangolo iniziale si possa deformare in un quadrilatero orientato in qualsiasi modo. In realtà per effettuare la deformazione si utilizza sia il primo che il secondo fotogramma deformando il rettangolo per metà spostamento in avanti per il secondo fotogramma e per metà spostamento indietro per il primo. In tal modo, si effettuano differenze centrate piuttosto che in avanti (come noto dalla differenziazione finita, ciò porta ad un errore di un ordine di grandezza inferiore). Nella figura 53 è illustrato il procedimento: in tal modo la stessa immagine del reticolo di misura costituisce una visualizzazione del campo di velocità e dei gradienti in esso presenti. Questa



procedura, sebbene comporti un aumento dei tempi di calcolo di circa un fattore 10, parallelamente porta una riduzione dell'errore di misura fino al limite di circa  $\pm 0.05$  pixel (insieme alle modalità descritte in precedenza).

I punti sei e sette, utilizzo diretto della funzione di correlazione senza uso di algoritmi FFT e moltiplicazione di tavole di correlazione adiacenti, portano benefici solo in un numero limitato di casi e comunque comportano un aumento dei tempi di calcolo.

Per dare una valutazione degli effetti di alcune delle procedure precedentemente descritte, si è considerata un'immagine artificiale a partire dalla soluzione esatta di Burgers delle equazioni di Navier-Stokes (si è considerata però la sola componente di velocità tangenziale)

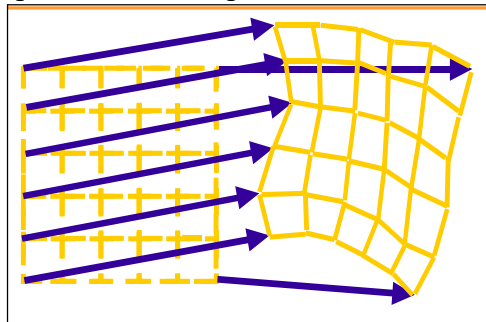


Figure 53. Deformation of the entire image based on the PIV velocity field measured iteratively.

Considering the deformation of the entire image (paragraph 6), as said, to make the maximum value of the correlation function (and thus validate the PIV measurement), it is necessary to minimize the difference between the first and the second image. One of the aspects which mostly increases this difference is the lack of particles images between the two images due to leakage from the measurement plane and velocity field gradients. This second reason can be removed through a local deformation of the interrogation window based on the velocity field measured at previous iterates (as described in paragraph 4). Each vertex of the interrogation window is replaced in the second image in a new position so that initial rectangle can be deformed in a quadrilateral oriented in any way. In fact, to perform the deformation, both the first and the second frame are used to by deforming the rectangle to half forward displacement for the second frame and to half backward displacement for the first frame. In this way, central differences are performed rather forward (as known from the finite differentiation, i.e. leads to an error in the order of lower magnitude). The procedure is shown In figure 53 : in this way, the same image of the measurement grid is the visualization of velocity field and the gradients present in it. This procedure, although it involves an increase in computation time by about a factor of 10, in parallel leads to a reduction of

measurement error up to the limit of about  $\pm 0.05$  pixels (together with the procedures described previously).

The paragraphs six and seven, use the direct usage of the correlation function without using FFT algorithms and multiplication of correlation adjacent tables, are beneficial only in limited number of cases, however, result in an increase in computation time.

For evaluation of the effects of some parts of previous procedures described above, an artificial image is considered from the exact solution of Burgers from the Navier-Stokes equations (it is considered, therefore, the only tangential velocity component)

$$u_{\theta} = \frac{A}{r} (1 - e^{-Br^2})$$

dove  $r$  rappresenta la distanza dal centro del vortice e A e B sono costanti. Le immagini artificiali sono ottenute aggiungendo particelle in posizioni casuali che si spostano secondo il campo di velocità sopra riportato (figura 54); si è anche aggiunto del rumore sia nella forma di pixel che casualmente hanno intensità luminosa differente da zero da un'immagine all'altra, sia nella definizione delle immagini delle particelle (forma e illuminazione) (figura 54). Nelle figure dalla 55 alla 61 sono riportati i miglioramenti nel campo vettoriale che si ottengono applicando alcune delle procedure descritte in precedenza confrontati con quanto disponibile con la soluzione esatta. Si può osservare chiaramente che già il semplice passaggio allo spostamento finestra (procedura 1) e all'interpolazione sub pixel (procedura 2) produce un notevole miglioramento del risultato (da figura 55 a 56 e 57). Bisogna anche notare un notevole miglioramento con la sovrapposizione parziale delle finestre (procedura 3) e con la procedura iterativa di cui al punto 4 (figure 58 e 59). Invece i miglioramenti sono solo parziali quando si utilizzano le procedure dal punto 5 in poi (figure 60 e 61), sebbene in alcuni punti ci siano ancora dei miglioramenti.

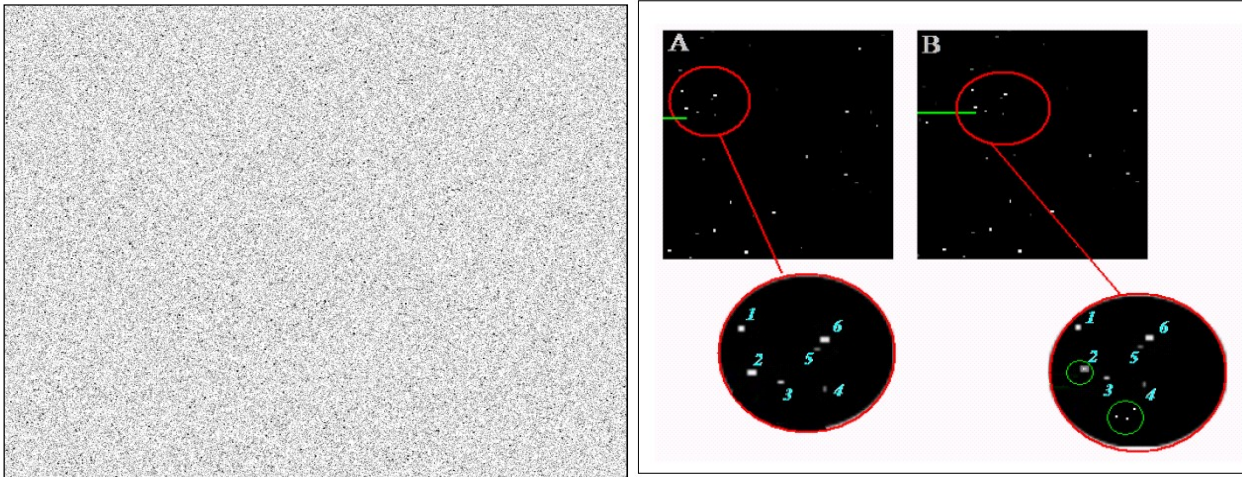


Figura 54. Esempio di immagine artificiale con 5000 particelle (a sinistra) e esempio di aggiunta di rumore (a destra).

$$u_{\theta} = \frac{A}{r} (1 - e^{-Br^2})$$

where  $r$  is the distance from the center of the vortex and  $A$  and  $B$  are constants . The artificial images are obtained by adding particles in random positions which move according to the velocity field reported above (figure 54); it is also of noise is added either in the form of pixels which have randomly light intensity different from zero from an image to another, or in the definition of the particles images (shape and lighting) (figure 54). In figures 55 to 61, some improvements in the vector field are reported which are obtained by applying some of the previously described procedures compared with what is available in the exact solution. One can observe clearly that simple passage to the window offset (step 1) and to 'sub-pixel' interpolation (step 2) already produces a significant improvement in results (from 55 to 56 and figure 57). It should be also noted a significant improvement with the partial overlapping of windows (steps 3) and the iterative procedure referred to in paragraph 4 (figures 58 and 59). Instead, the improvements are only partial when using the procedures from step 5 onwards (figures 60 and 61 ), although in some places there are still improvements.

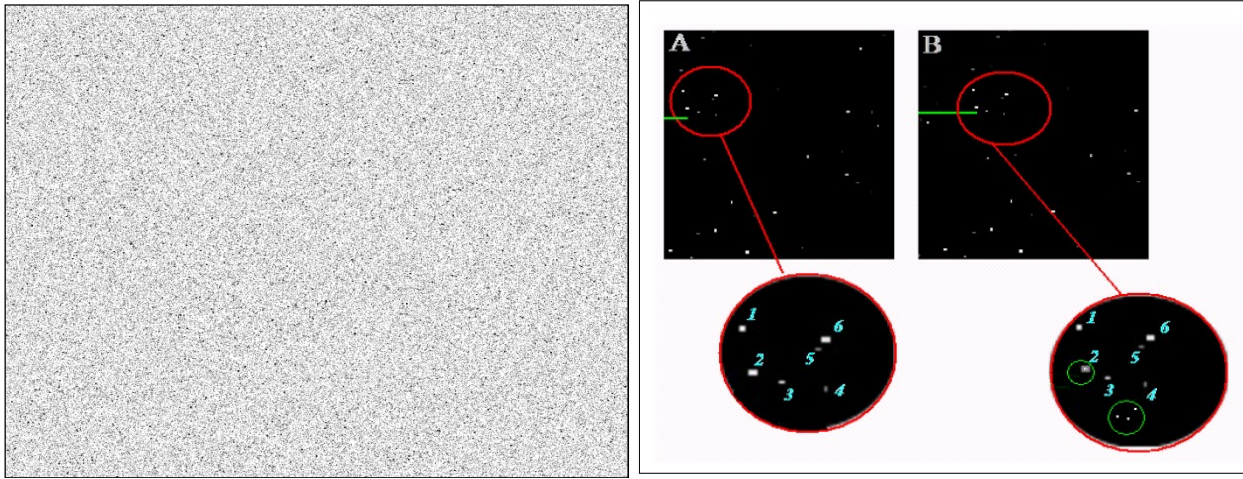


Figure 54. Example of artificial image with 5000 particles (left) and example of noise adding (right).

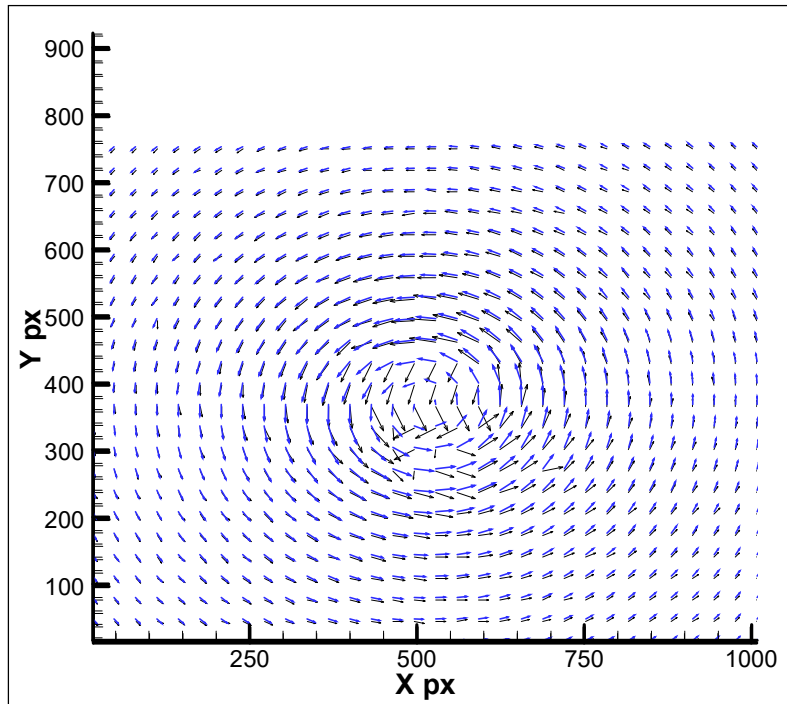


Figura 55. Vortice di Burger da immagini artificiali analizzate con finestre 32\*32 pixel: no spostamento finestra, no interpolazione sub-pixel, no sovrapposizione finestre, no iterazioni. In blu sono riportati i vettori ottenuti dalla soluzione esatta.

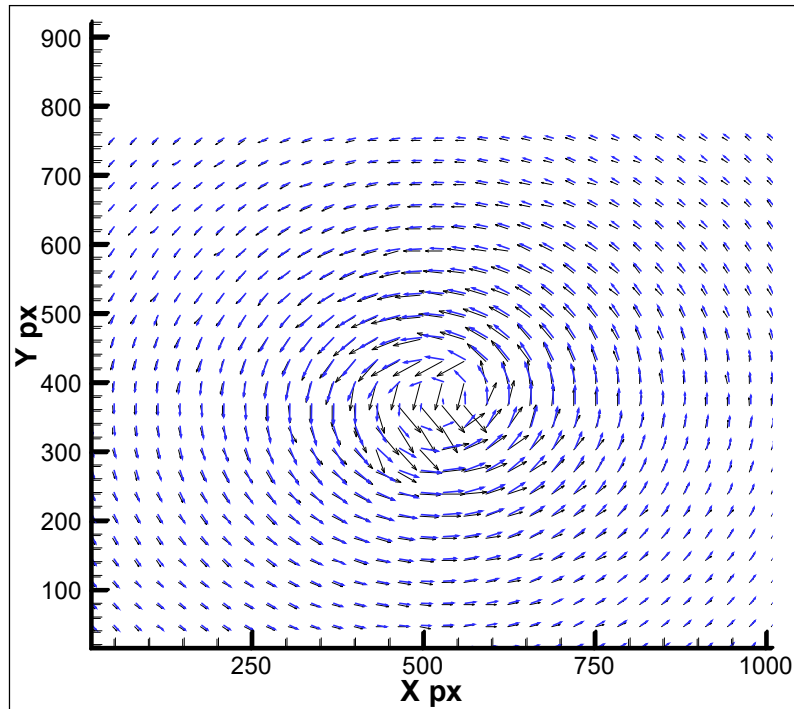


Figura 56. Vortice di Burger da immagini artificiali analizzate con finestre 32\*32 pixel: con spostamento finestra, no interpolazione sub-pixel, no sovrapposizione finestra, no iterazioni. In blu sono riportati i vettori ottenuti dalla soluzione esatta.

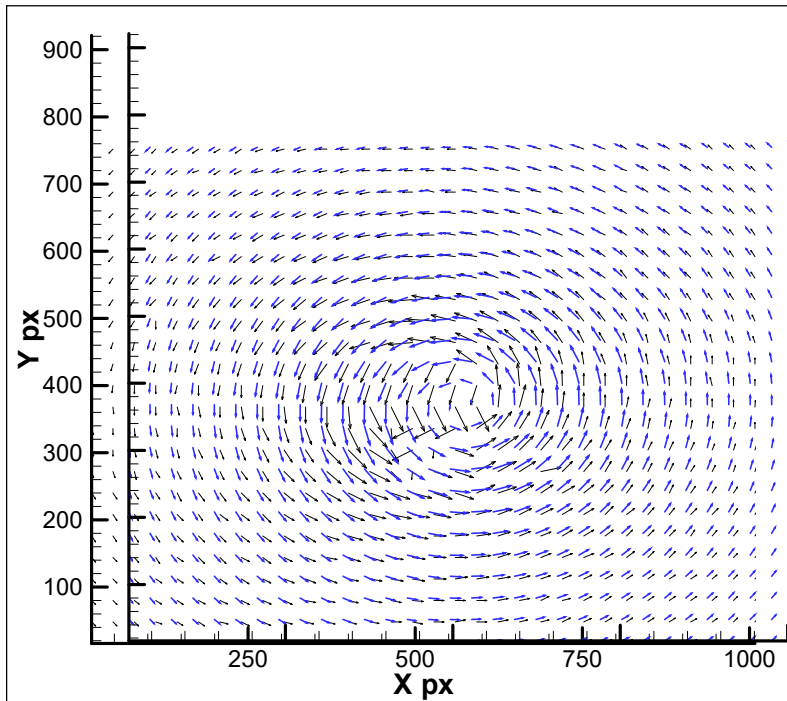


Figure 55. Vortex Burger from artificial images analyzed by windows 32 × 32 pixels: no moving window, no sub-pixel interpolation, no overlapping windows, no iterations. The vectors in blue are obtained from the exact solution.

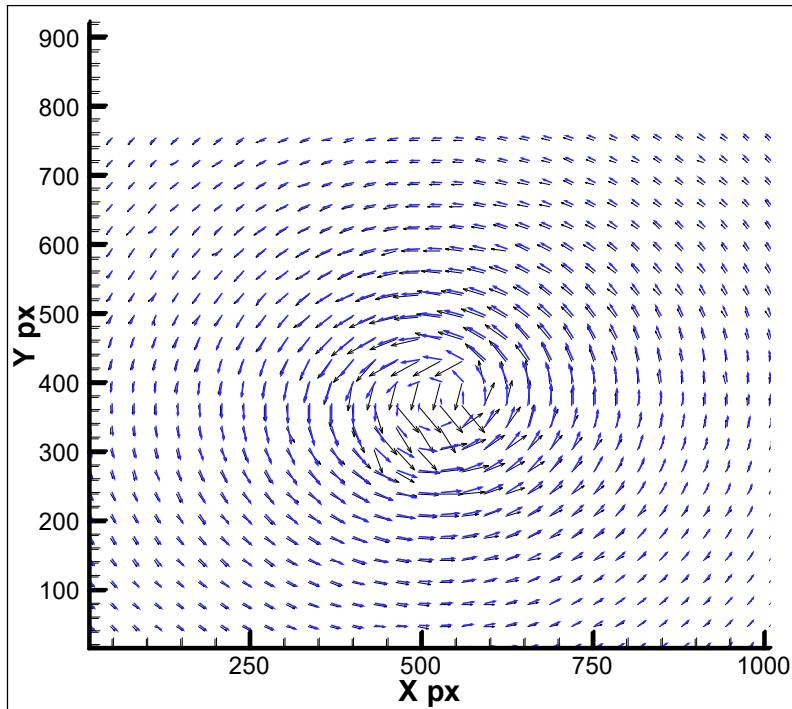


Figure 56. Vortex Burger from artificial images analyzed by windows  $32 \times 32$  pixels: window offset, no sub-pixel interpolation, no overlapping window, no iterations. The vectors in blue are obtained from the exact solution.

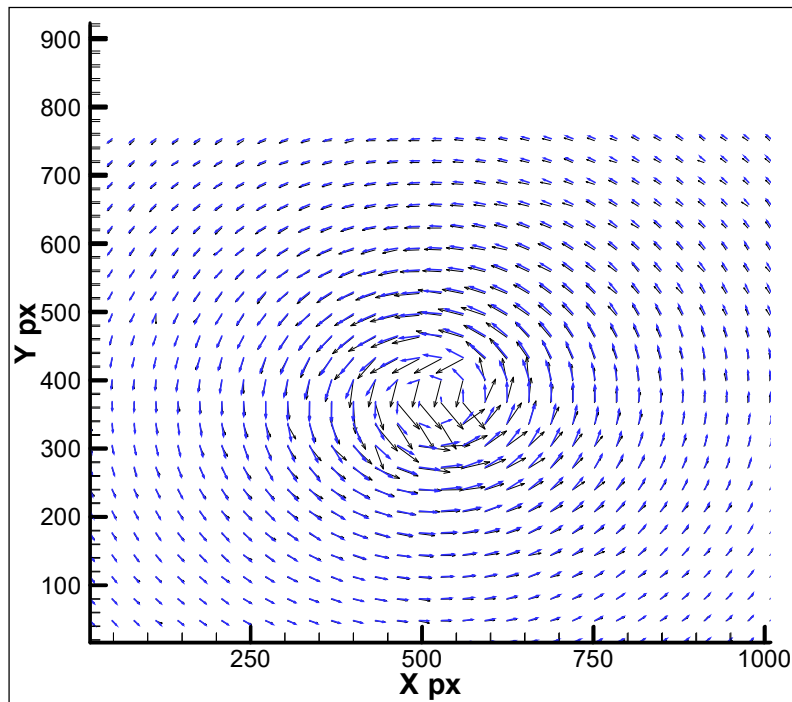


Figura 57. Vortice di Burger da immagini artificiali analizzate con finestre  $32 \times 32$  pixel: con spostamento finestra, con interpolazione sub-pixel, no sovrapposizione finestra, no iterazioni. In blu sono riportati i vettori ottenuti dalla soluzione esatta.

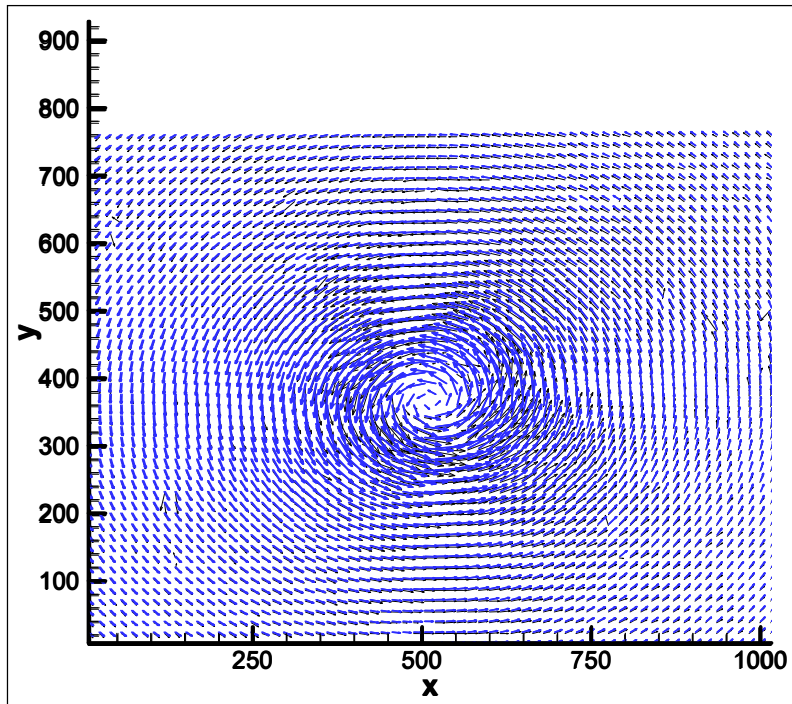


Figura 58. Vortice di Burger da immagini artificiali analizzate con finestre 32\*32 pixel: con spostamento finestra, con interpolazione sub-pixel, con sovrapposizione finestra 50%, no iterazioni. In blu sono riportati i vettori ottenuti dalla soluzione esatta.

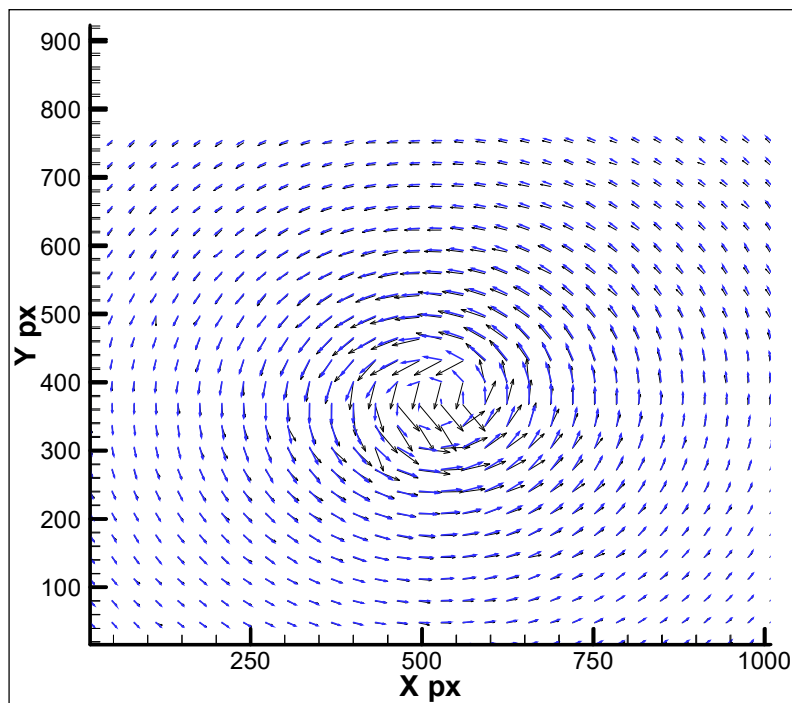


Figure 57. Burger vortex analyzed by artificial images with windows  $32 \times 32$  pixels: with window offset, with sub-pixel interpolation, no overlapping window, no iterations The vectors in blue are obtained from the exact solution.

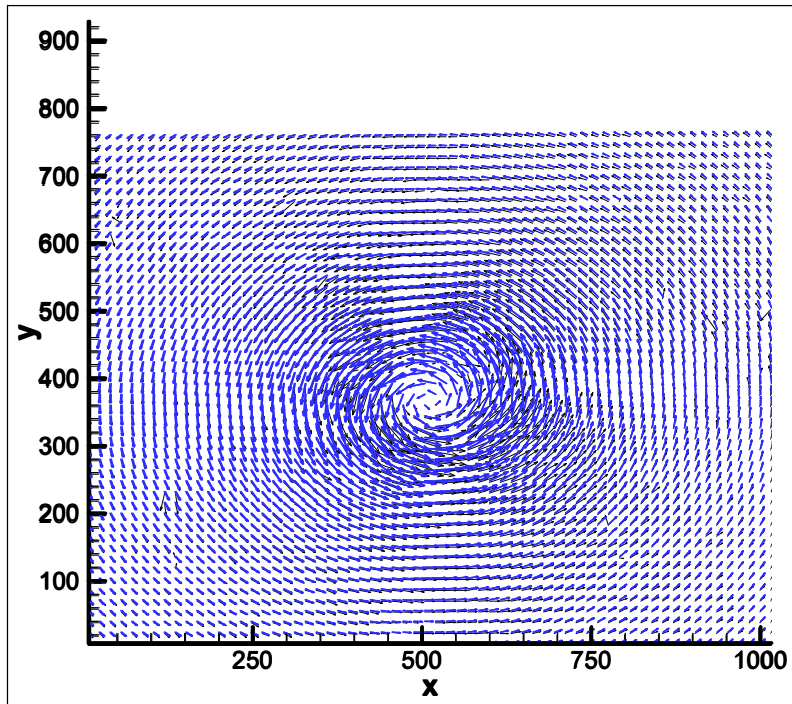


Figure 58. Burger vortex analyzed by artificial images with windows  $32 \times 32$  pixels: with window offset, with sub-pixel interpolation, with 50% window overlap, no iterations. The vectors in blue are obtained from the exact solution.

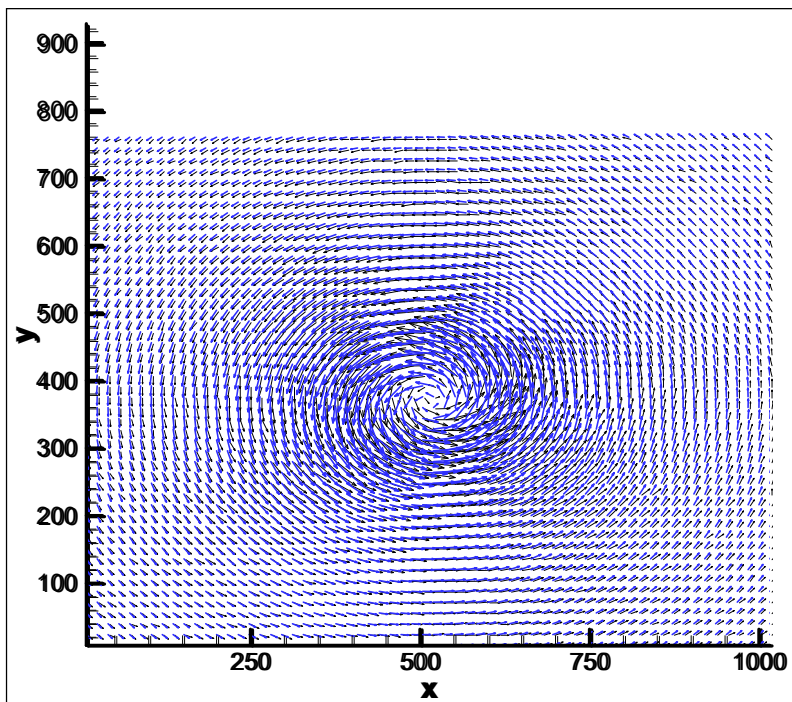


Figura 59. Vortice di Burger da immagini artificiali analizzate con finestre  $32 \times 32$  pixel: con spostamento finestra, con interpolazione sub-pixel, con sovrapposizione finestra 50%, iterazione da  $64 \times 64$  a  $32 \times 32$ . In blu sono riportati i vettori ottenuti dalla soluzione esatta.



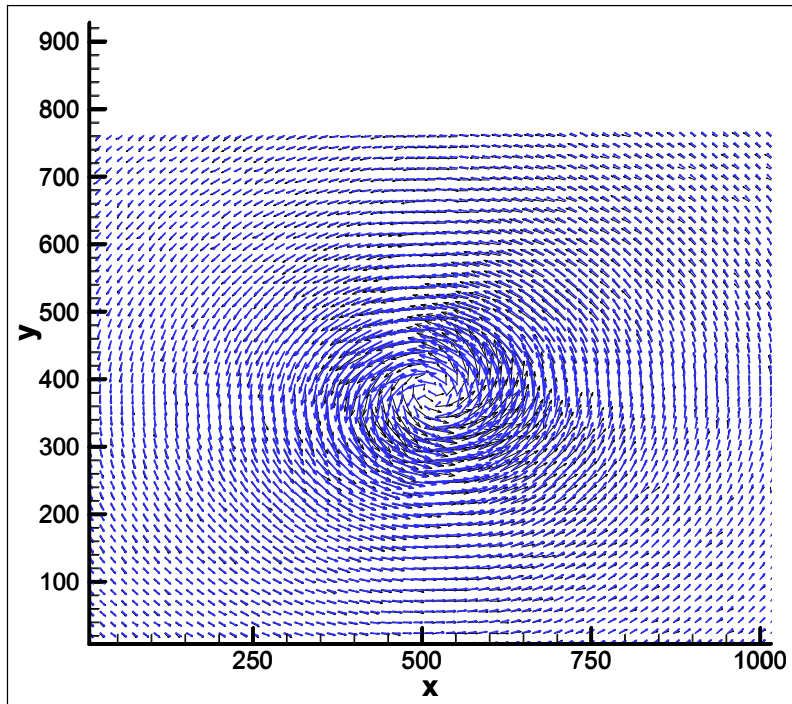


Figura 60. Vortice di Burger da immagini artificiali analizzate con finestre 32\*32 pixel: con spostamento finestra, con interpolazione sub-pixel, con sovrapposizione finestra 50%, iterazione da 64\*64 a 32\*32, con finestatura gaussiana. In blu sono riportati i vettori ottenuti dalla soluzione esatta.

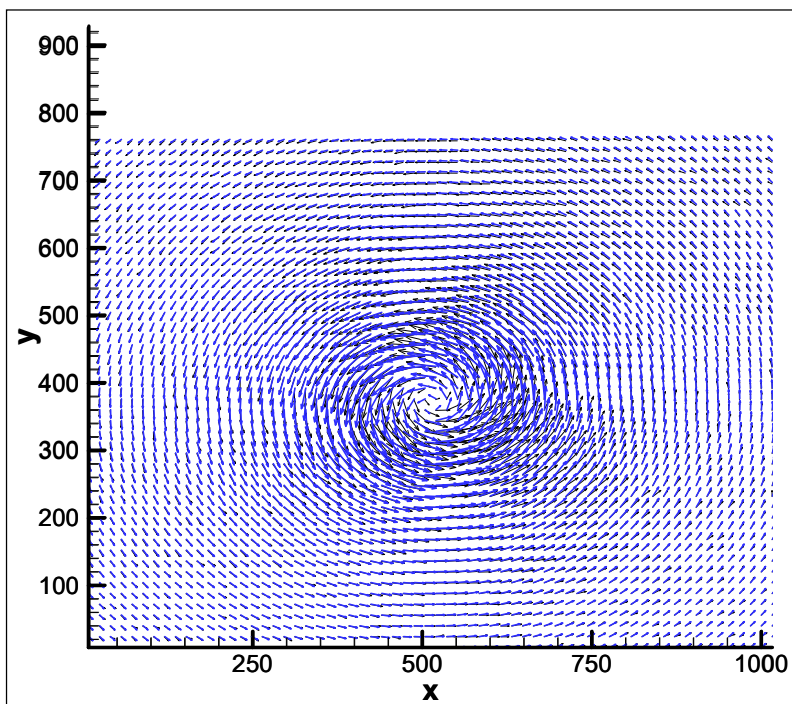


Figure 59. Burger vortex analyzed by artificial images with windows 32×32 pixels: with window offset, with sub-pixel interpolation, with 50% window overlap, iteration 64 ×64 32 ×32. The vectors in blue are the obtained from the exact solution.

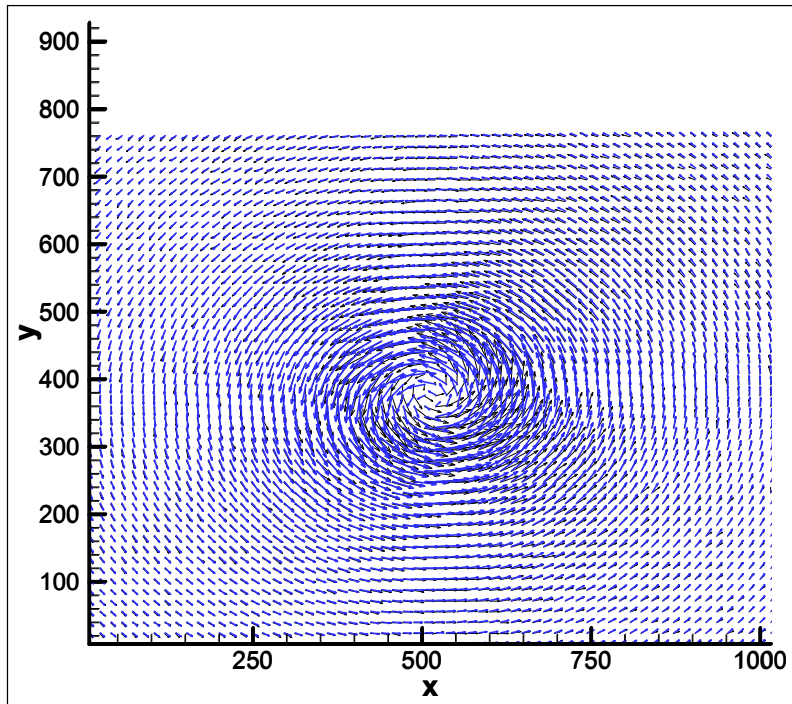


Figure 60. Burger vortex analyzed by artificial images with windows  $32 \times 32$  pixels: with window offset, with sub-pixel interpolation, with 50% window overlap, iteration  $64 \times 64$   $32 \times 32$ , with Gaussian windows. The vectors in blue are obtained from the exact solution.

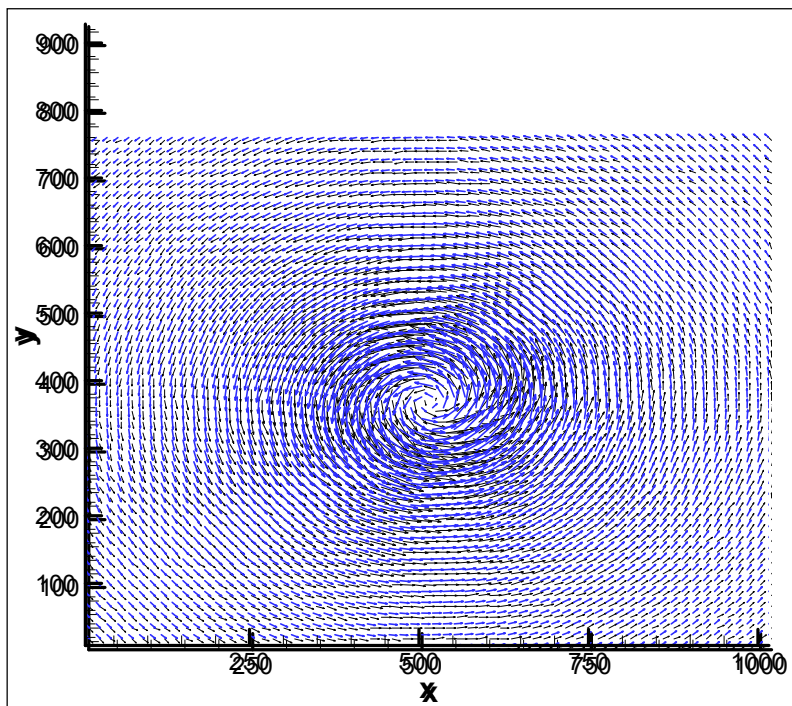


Figura 61. Vortice di Burger da immagini artificiali analizzate con finestre  $32 \times 32$  pixel: analisi immagine ottimizzata. In blu sono riportati i vettori ottenuti dalla soluzione esatta.

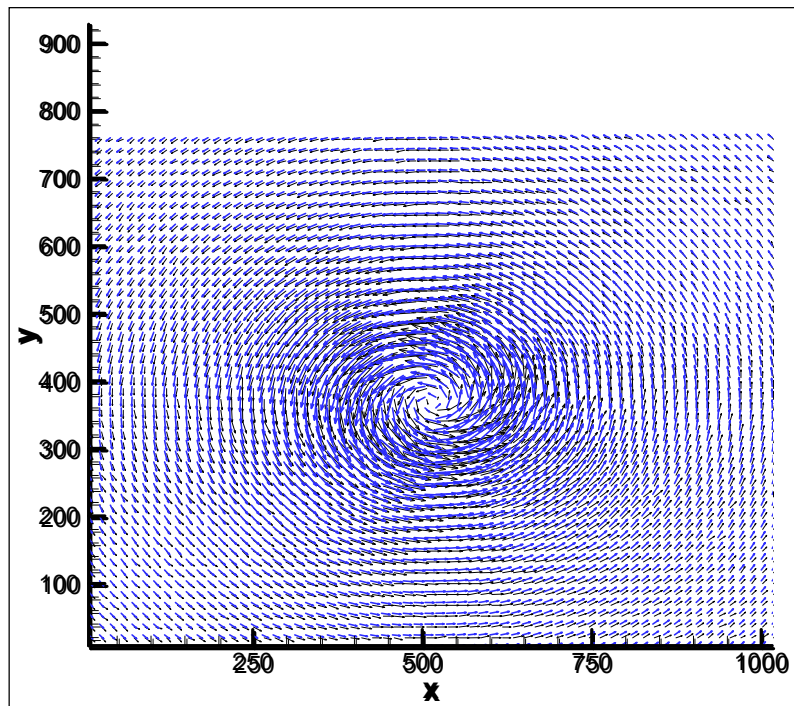


Figure 61. Burger vortex analyzed by artificial images with windows  $32 \times 32$  pixels: optimized image analysis. The vectors in blue are obtained from the exact solution.

### 3.6 METODOLOGIE DI PRE E POST ELABORAZIONE DELLE IMMAGINI

Tra le differenti metodologie di trattamento preliminare delle immagini (prima dell'analisi delle stesse) e di validazione e calcolo a seguito della misura del campo di velocità, si considereranno in dettaglio:

- filtro delle immagini;
- eliminazione delle riflessioni;
- determinazione automatica di una maschera;
- validazione vettori dopo analisi PIV;
- individuazione di strutture vorticosi.

Le prime tre vengono effettuate preliminarmente all'analisi delle immagini, la quarta in teoria dovrebbe essere effettuata successivamente all'analisi, ma in pratica è inserita all'interno della procedura ricorsiva utilizzata nella tecnica PIV o nelle tecniche di tipo "optical flow".

### 3.6 METHODS OF PRE AND POST IMAGE PROCESSING

Among the different preliminary methods of images treatment ( before the analyzing them ) and validation and calculation following the measure of the velocity field measurement, will be considered in detail:

- images filter;
- reflection elimination;
- automatic determination of mask;
- vector validation after using PIV analysis;
- vortex structure identification.

The first three are carried out prior to the images analysis, the fourth in theory should be performed after the analysis, but in practice it is inserted inside the recursive procedure used in PIV technique or in the "optical flow" techniques.

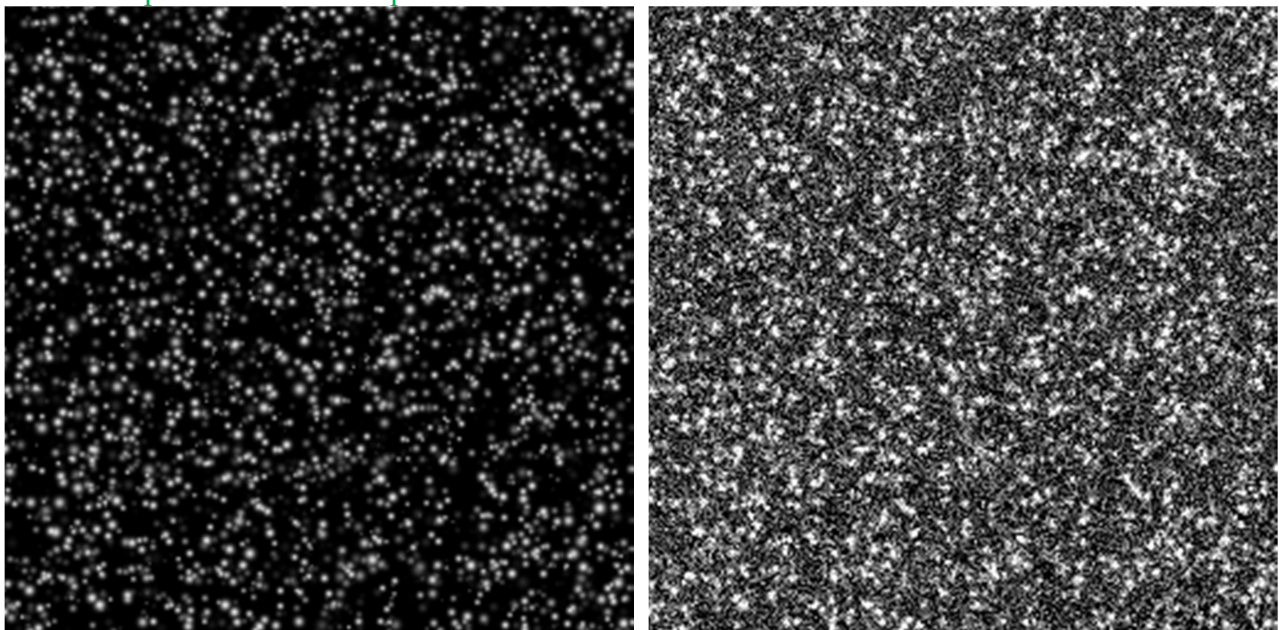


Figura 63. Immagine artificiale di tipo PIV (a sinistra) e immagine con rumore sovrapposto (a destra).

Riguardo l'utilizzo di un filtro, in figura 63 è mostrata una immagine simulata di tipo PIV con sovrapposto del rumore di tipo puntuale (cosiddetto "sale e pepe") e del rumore di tipo gaussiano. Si può chiaramente notare la degradazione dell'immagine.

In generale applicare un filtro ad un'immagine digitale significa moltiplicare iterativamente ciascun elemento della matrice corrispondente (eventualmente in maniera differenziata per i tre colori fondamentali RGB) per un operatore che pesi in maniera differente elementi adiacenti. Per esempio, il filtro medio che assegna valore unitario all'intensità luminosa di ciascuno dei 9 (3x3) primi vicini

$$\left( \frac{1}{9} \right)$$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

applicato all'ipotetico elemento centrale di un'immagine,

1	255	27
38	151	171
100	199	157

fornisce (avendo arrotondato all'intero più vicino)

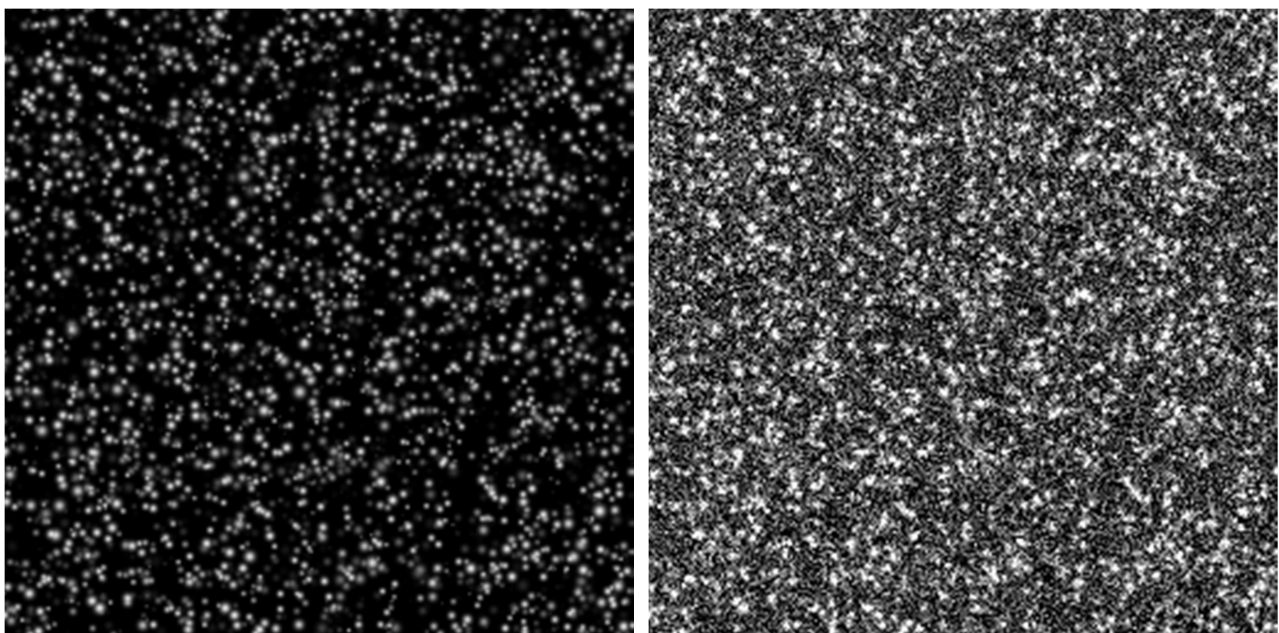


Figure 63. Artificial image of type IV (left) and image with superimposed noise (right).

Considering the use of filter, figure 63 shows a simulated image of PIV type with superimposed point-like type (so-called "salt and pepper") and Gaussian type noise. The degradation of the image can clearly be seen.

In general, applying a filter to a digital image means multiplying iteratively each element of the corresponding matrix (possibly in a differentiated manner for the three primary colors RGB) by an operator which weights in a different manner for adjacent elements. For example, the average filter which assigns a unit value to the light intensity of each of the nine (3×3) first neighbors

$$\left( \frac{1}{9} \right)$$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

applied to the hypothetical central element of an image,

1	255	27
38	151	171
100	199	157

provides (being rounded to the nearest integer)

1	255	27
38	122	171
100	199	157

Mentre il filtro mediano (che come vedremo nella PIV è quello più utilizzato nelle operazioni di validazione post analisi), che sostituisce al valore del pixel considerato quello che ha il valore intermedio tra quelli adiacenti. Applicando il mediano al caso precedente la nuova matrice sarà

1	255	27
38	100	171
100	199	157

Si mostra infine la modalità di operazione di un filtro basato sui gradienti di intensità luminosa (filtro di Sobel) e di un filtro basato sulla derivata (filtro laplaciano). Il primo utilizza una matrice peso differente a seconda della direzione considerata; per esempio il valore di intensità luminosa filtrata dell'elemento centrale della matrice della pagina precedente viene ottenuto moltiplicando ogni elemento della matrice per una matrice peso differente

in verticale

1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

( 1/8 )

1	255	27
1	255	27
38	-15	171
100	199	157

in orizzontale

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

( 1/8 )

1	255	27
38	31	171
100	199	157
1	255	27
38	122	171
100	199	157

While the median filter (which, as can be seen in PIV, is most commonly used in post processing operation) replaces the pixel value considering the one which has intermediate value between adjacent ones. Applying the median (filter) in the previous case, the new matrix will be

1	255	27
38	100	171
100	199	157

Finally the filter operation mode is shown based on light intensity gradients (Sobel filter) and a filter based on the derivative (Laplacian filter). The first uses a different weight matrix depending on the considered direction; for example the filtered light intensity value of the central element of the matrix in the previous page is obtained by multiplying each element of the matrix to a different weight matrix.

in vertical

1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

( 1/8 )

1	255	27
1	255	27
38	-15	171
100	199	157

in horizontal

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

( 1/8 )

1	255	27
38	31	171
100	199	157

(e in effetti i gradienti sono più elevati in orizzontale che in verticale).

Il filtro laplaciano invece utilizza un peso differente per i pixel adiacenti (in maniera simile a quanto si fa nella valutazione delle derivate tramite differenze finite nei metodi numerici), per esempio

( 1/8 )

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

1	255	27
1	255	27
38	-7	171
100	199	157



In figura 64 è mostrato l'effetto di un filtro di Sobel e laplaciano sull'immagine a destra di figura 63; il risultato deve essere confrontato con l'immagine originale (a sinistra nella figura 63). Da questo punto di vista, il filtro laplaciano sembra quello più efficace.

Coppie di immagini come quelle di figura 63, sono state filtrate con due categorie di operatori: filtri di ripristino dell'immagine ("image restoration") e filtri di miglioramento dell'immagine ("image enhancement"). I primi effettuano operazioni di media delle differenze di intensità luminosa che in genere eliminano l'effetto di un rumore concentrato (quale quello "sale e pepe"), mentre i secondi esaltano le differenze di intensità permettendo di migliorare il contrasto e di evidenziare la separazione tra zone differenti del campo. I primi, ai quali appartengono per esempio il filtro medio e mediano, sono quindi filtri passa-basso, mentre i secondi, tra i quali si possono considerare il filtro di Sobel e quello laplaciano, sono invece passa-alto. In generale, per immagini tipo PIV, si può dire che l'effetto dei primi è limitato ma non peggiorativo, quello dei secondi può anche essere peggiorativo nei casi di immagini con molto rumore di tipo puntuale.

(and in fact the gradients are higher in horizontal in respect to vertical).

The Laplacian filter instead uses a different weight for the adjacent pixels (in a similar manner to what is done in the evaluation of the derivatives by finite differences in numerical methods), for example

( 1/8 )			0	-1	0
1	255	27	-1	4	-1
1	255	27	0	-1	0
38	-7	171			
100	199	157			

The effect of a Sobel and Laplacian filter on the image is shown on the left and right of figure 64, respectively; the result should be compared with the original image (on the left in Figure 63). From this point of view, the Laplacian filter seems to be more effective .

Images pairs such as those in Figure 63, were filtered with two categories of operators: filters for image restoration and image enhancing filters. The first filters perform averaging of the in light intensity differences which generally eliminate the effect of a concentrated noise (like the " salt and pepper" ) , while the latter enhance the intensity differences allowing to improve the contrast and highlighting the separation between different zones inside the field. The first , to which for example the mean and median filter belong, are low-pass filters, while the latter, among which the Sobel and Laplacian filters can be considered, are high-pass one. In general, for PIV type image , one can say that the effect of the first ones is limited but not *negative*, while that of the latter ones can also be *pejorative* in cases of images with a lot of punctual type noises.

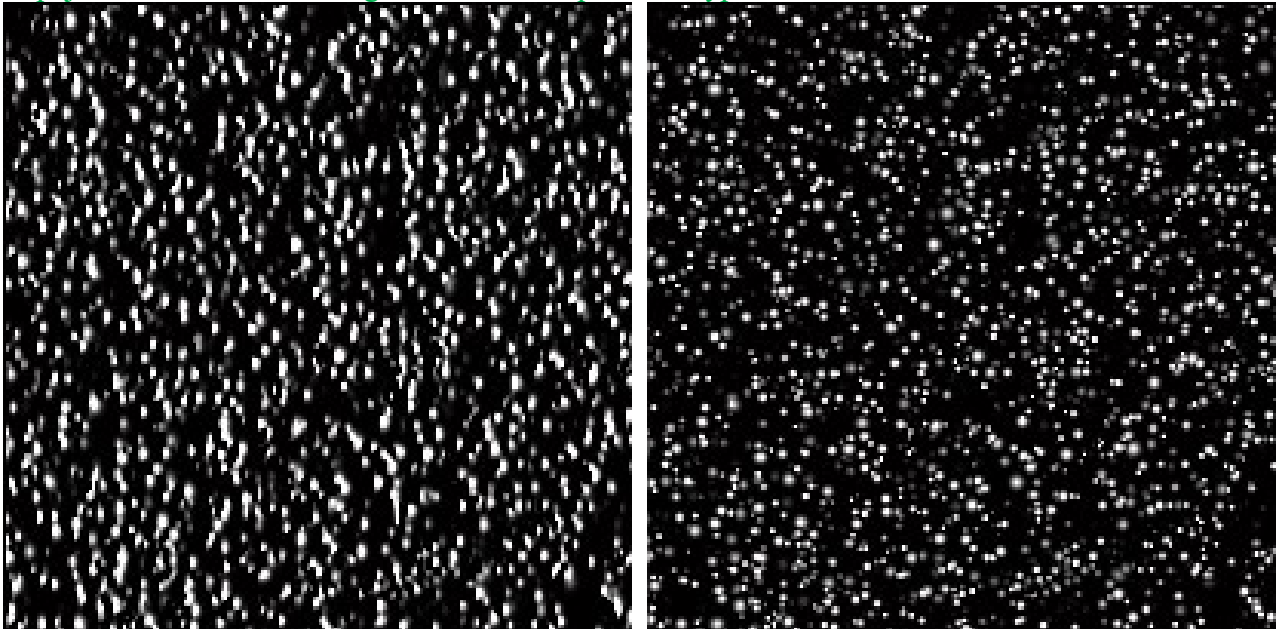


Figura 64. Immagine artificiale di tipo PIV filtrata con filtro di Sobel (a sinistra) e laplaciano (a destra).

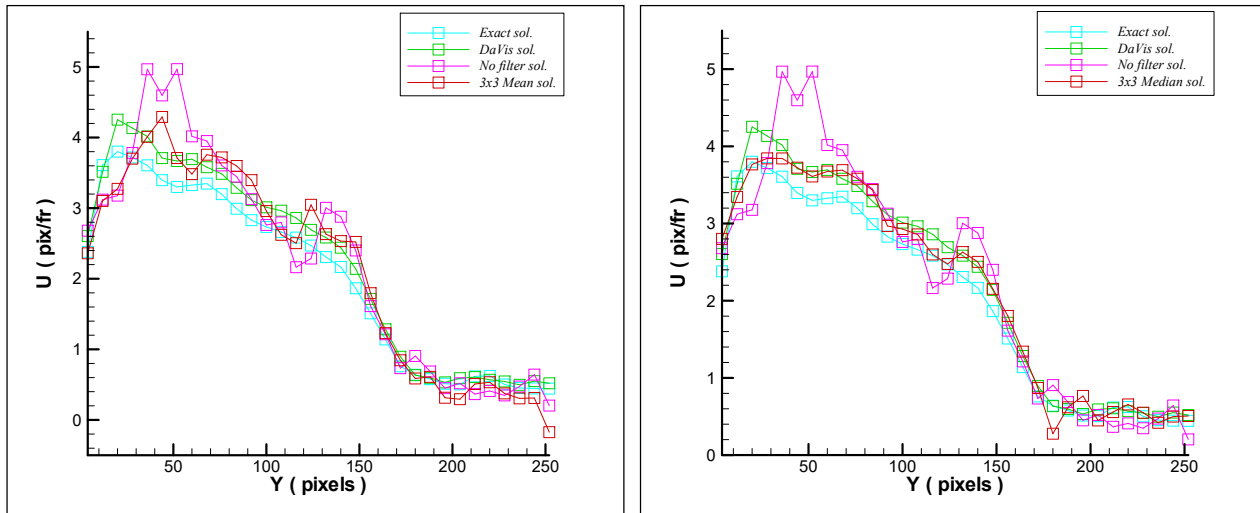


Figura 65. Profilo di velocità ottenuto con filtro medio (a sinistra) e con filtro mediano (a destra).

Nella figura 65 viene mostrato l'effetto dell'uso di filtri medi e mediani su un'immagine di tipo artificiale con soluzione analitica. Il risultato dell'applicazione del filtro consente di migliorare notevolmente la qualità della soluzione (in particolare per il filtro mediano). Per quello che riguarda i filtri di miglioramento, si riportano in figura 66 i risultati ottenuti con filtri di Sobel e laplaciano (la soluzione senza filtro è la stessa riportata in figura 65). Dall'analisi dei risultati si può osservare il miglioramento più pronunciato rispetto all'applicazione dei filtri di ripristino riportati nella figura 64.

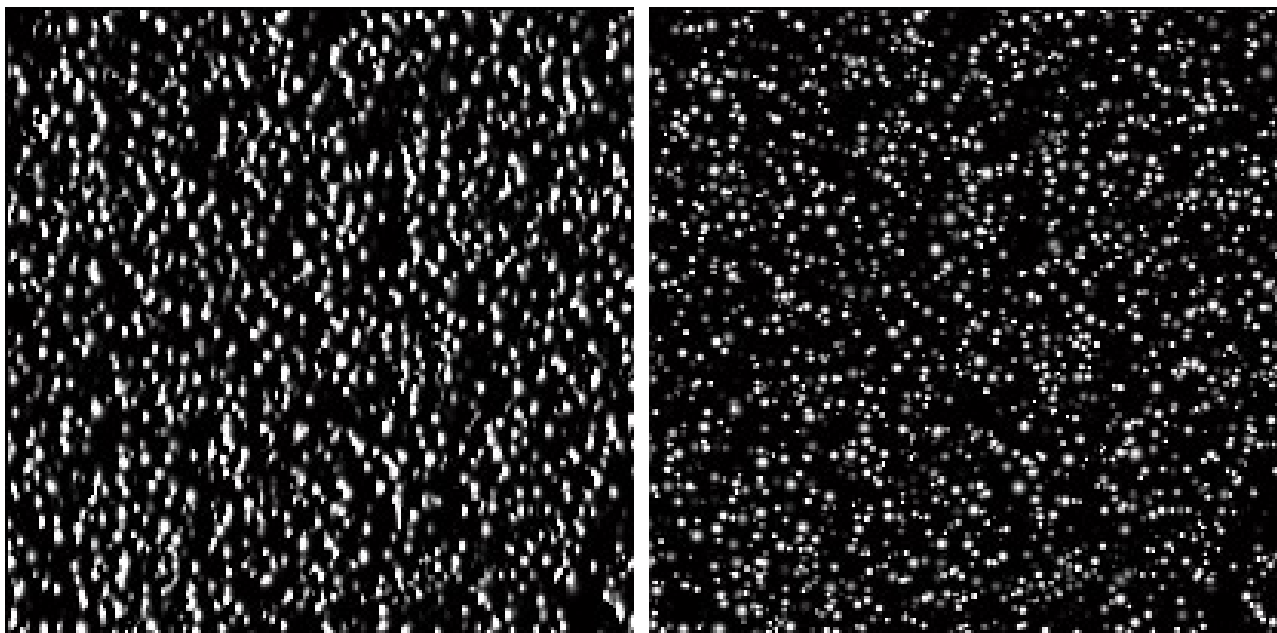


Figure 64. Artificial PIV type image filtered with Sobel filter (left) and Laplacian (right).

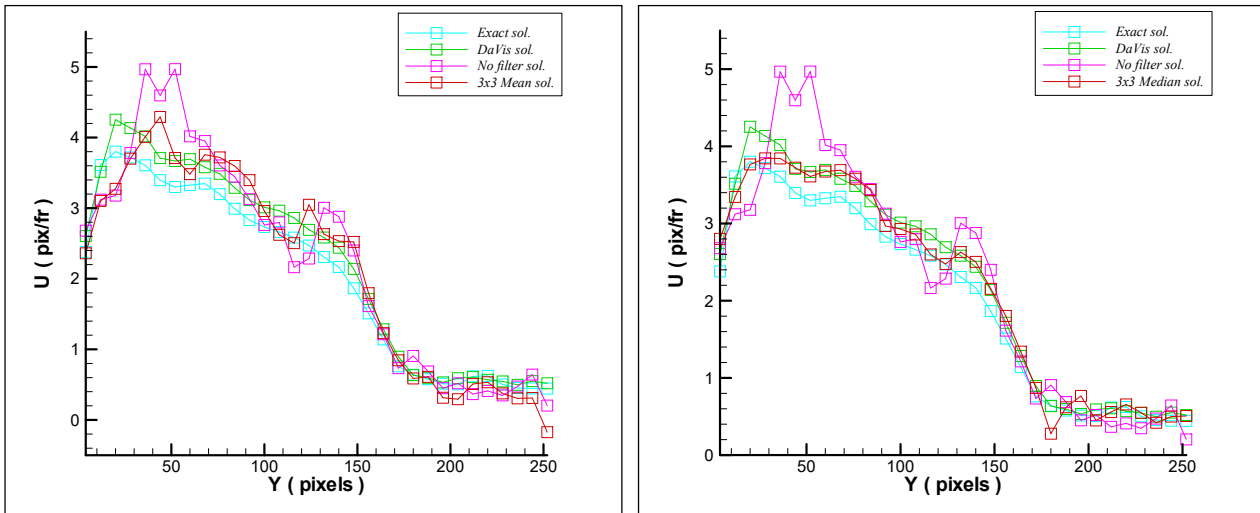


Figure 65. Velocity profile obtained with mean filter (left) and with median filter (right).

Figure 65 shows the effect of the use of mean and median filters on an artificial type image with analytical solution. The result of the filter application improve the quality of the solution significantly (in particular, the median filter). Considering the enhancement filters, the results obtained with Sobel and Laplacian filters as shown in figure 66 (the solution without filter is the same as shown in figure 65). By analyzing the results, more precise improvement can be observed in respect to the application of resortation filters reported in figure 64.

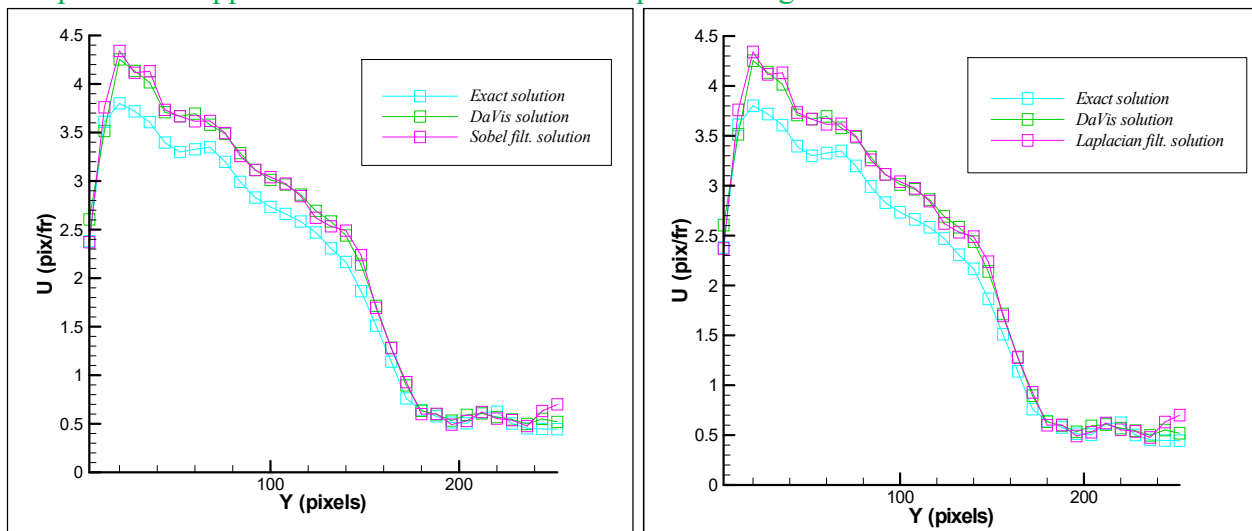


Figura 66. Profilo di velocità ottenuto con filtro di Sobel (a sinistra) e laplaciano (a destra).

Per quanto riguarda l'eliminazione delle riflessioni interne ed esterne al campo (anche in questo caso si potrebbero effettuare delle operazioni di filtro, ma non si riesce a migliorare molto la soluzione), si procede sottraendo il valore minimo o il valore medio di una sequenza di immagini per ciascun elemento dell'immagine. Ad esempio in figura 67 è mostrata un'immagine originale di

un canale idrodinamico di strato limite su fondo ondulato, le immagini minima e media e il risultato ottenuto dalla sottrazione. Si può osservare come siano state eliminate le riflessioni (ma ovviamente in tali zone saturate non è più possibile effettuare la misura della velocità) e che, in particolare nel caso della sottrazione del minimo, l'immagine risulti più contrastata, mentre nel caso di sottrazione del valor medio sembra esserci un minor numero di particelle traccianti. Il risultato dell'operazione dipende anche da quale valore viene sostituito nel caso di valori negativi nel caso in cui si sottragga il valor medio della sequenza (nel caso della sottrazione del valore minimo non è possibile ottenere valori negativi), ma in generale c'è da dire che la sottrazione del minimo sia preferibile. Tale operazione risulta molto vantaggiosa per la successiva analisi delle immagini e viene adottata comunemente. Bisogna anche notare che tale metodo funziona nel caso di modelli in prova o superfici di contorno del campo che siano stazionari durante la misura; in caso di vibrazioni tali metodi non sono più appropriati e bisognerà cercare variabilità all'interno di una singola immagine del campo piuttosto che di una sequenza. Un ulteriore esempio è fornito in figura 68 nel caso della parte iniziale dell'aorta a valle di una valvola cardiaca artificiale. In questo caso la geometria del problema risulta molto più complicata, ma comunque le procedure adottate riescono a migliorare molto la qualità delle immagini.

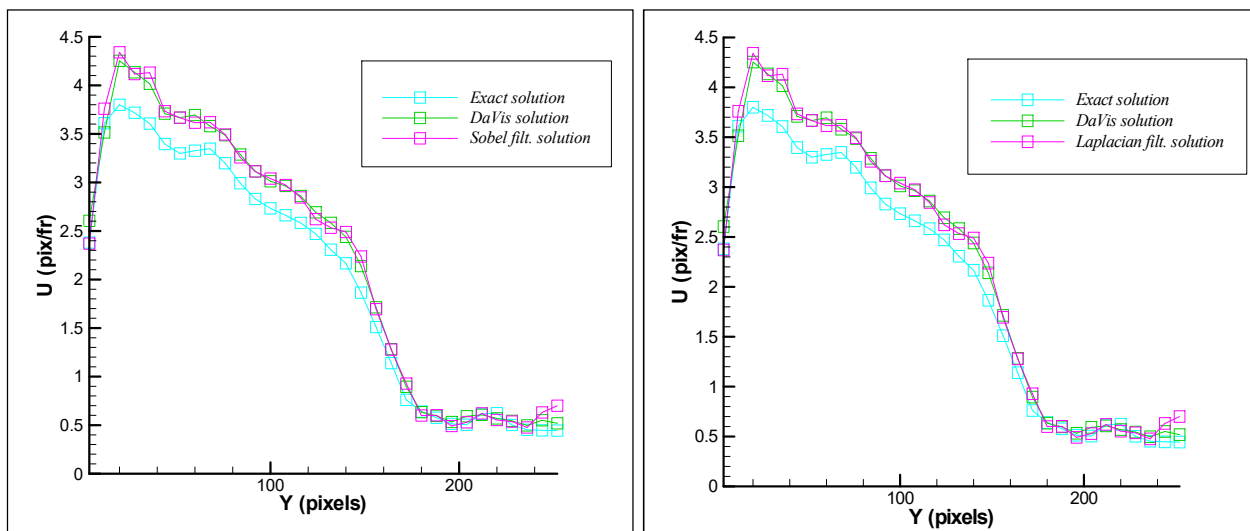
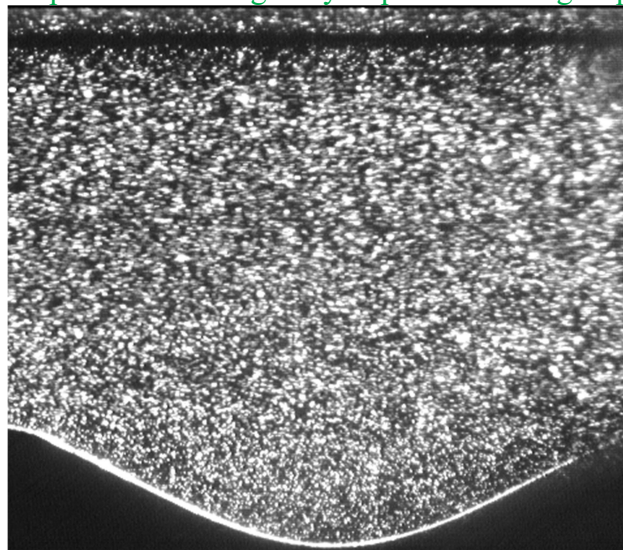


Figura 66. Velocity profile obtained with Sobel filter (left) and Laplacian (right).

Considering the elimination of reflections internal and external to the field ( also in this case could be made of the operations of the filter, but you can not greatly improve the solution ) , it proceeds by subtracting the minimum value or the average value of a sequence of images for each image element. For example, in figure 67 an original image of a hydrodynamic channel for

boundary layer of corrugated wall, minimum and average images and the result obtained from the subtraction is shown. It can be observed how the reflections have been eliminated (but obviously in such saturated areas, is no longer possible to perform the velocity measurement ) and in particular, in the case of minimum subtraction, the image is sharper, while in the case of average value subtraction, it seems that lower number of tracer particles exist. The operation result also depends on the value which is substituted in the case of negative values in the case in which the mean value of the sequence is subtracted (in the case of minimum value subtraction, it is impossible to get negative values) , but it should be noted that minimum subtraction is preferable in general. This operation is very useful for the subsequent image analysis and is commonly adopted. It should also be noted that this method works in the case of test models or surfaces of the field boundary which are stationary during the measurement; in case of vibration such methods are no more appropriate and necessary to look for variability within a single image of the field rather than that of a sequence. A further example is provided in figure 68 in the case of the initial part of the aorta downstream of an artificial heart valve . In this case, the problem geometry is much more complicated but the adopted procedures can greatly improve the images quality.



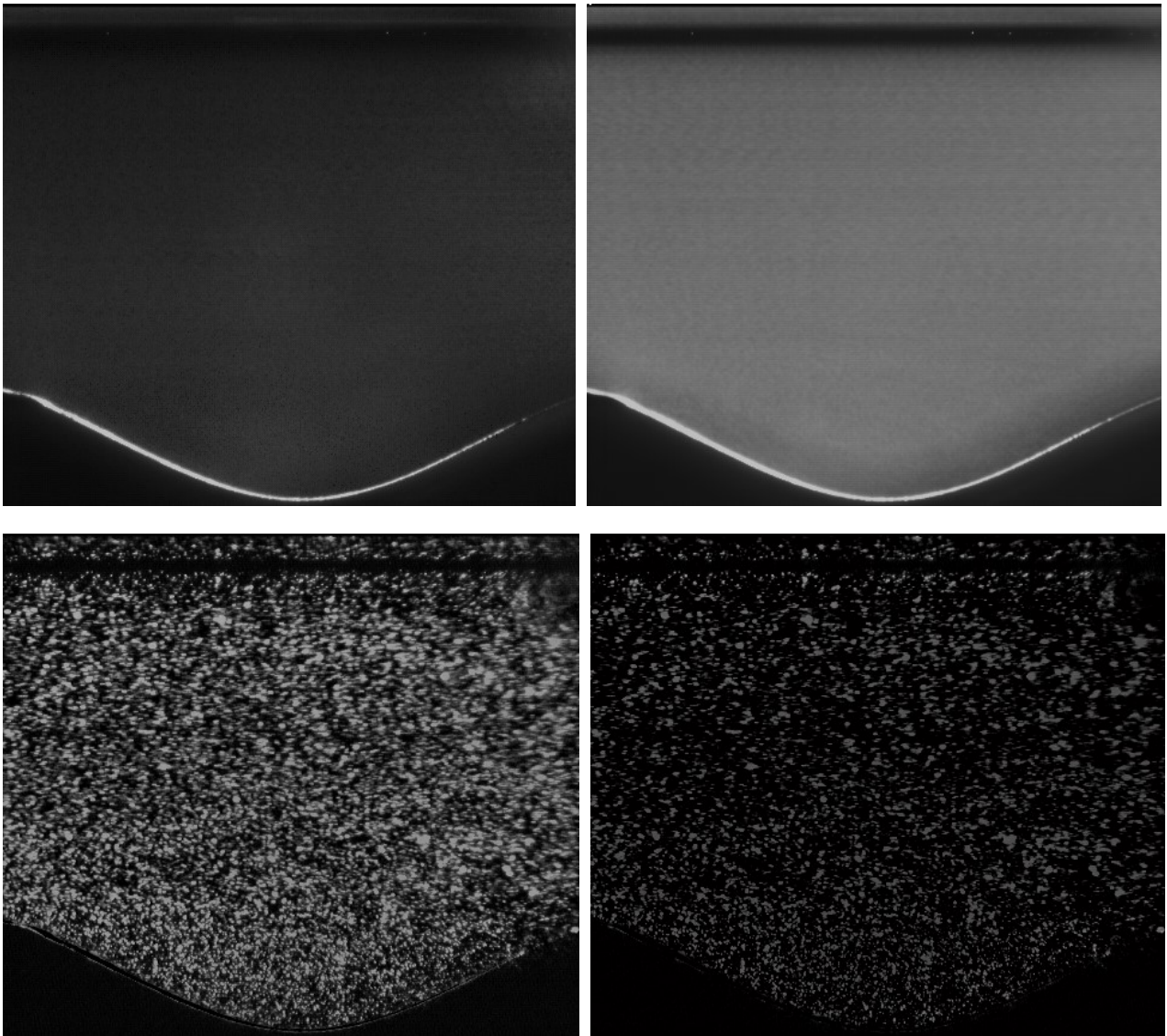
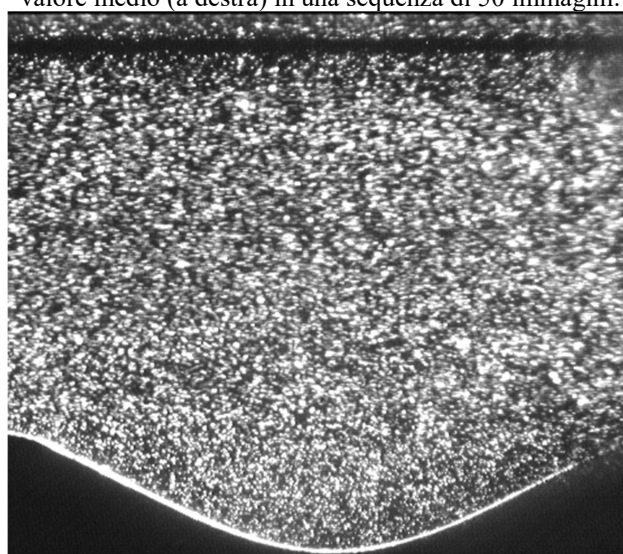


Figura 67. Immagine di un canale con parete ondulata (in alto) con sottrazione del valore minimo (a sinistra) e del valore medio (a destra) in una sequenza di 50 immagini.



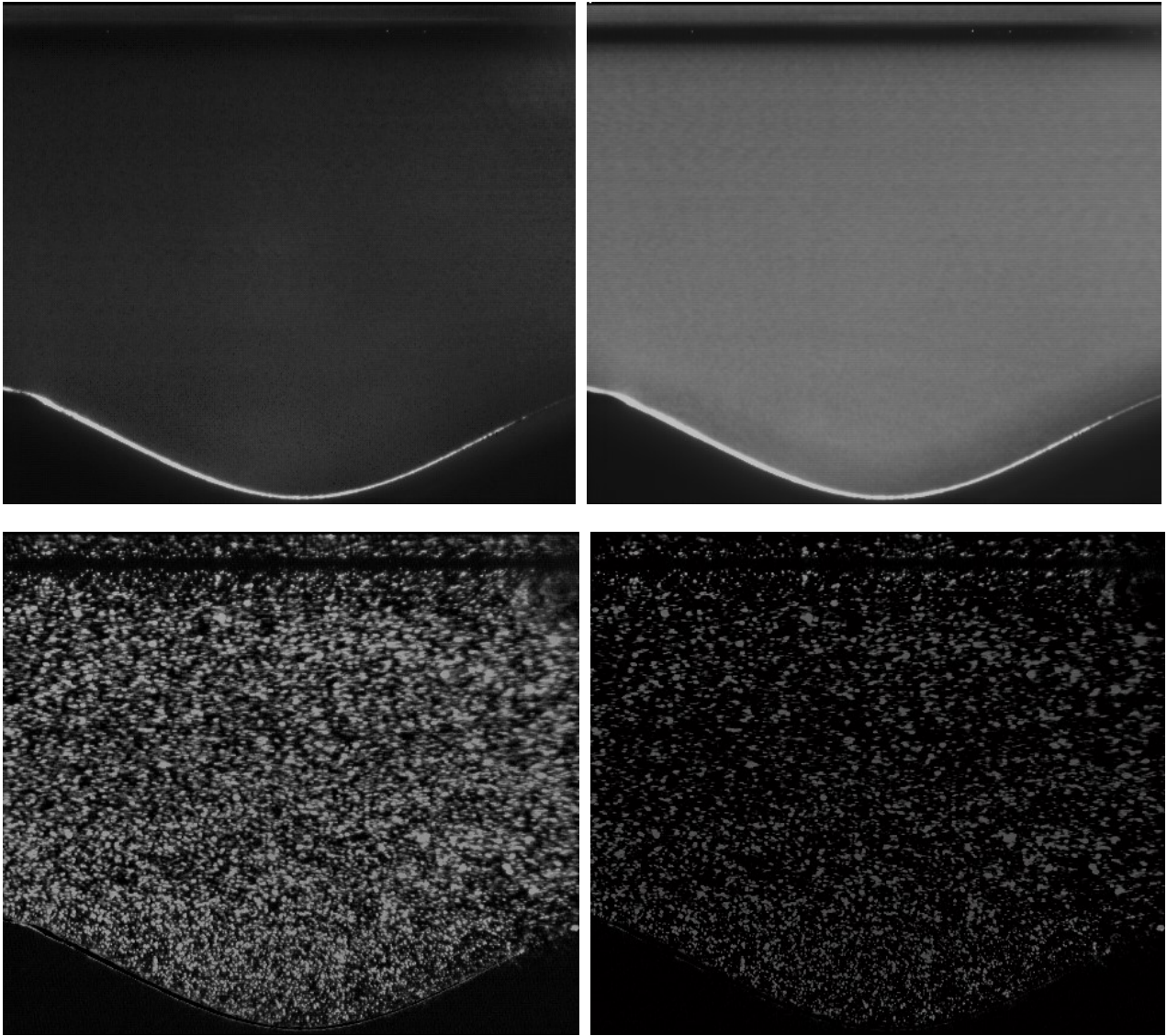
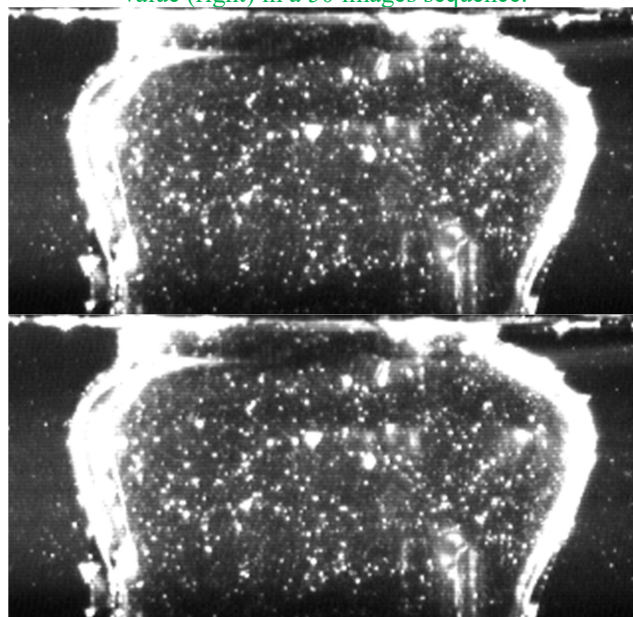


Figura 67. Picture of a channel with corrugated wall (top) with subtraction of the minimum value (left) and the average value (right) in a 50 images sequence.





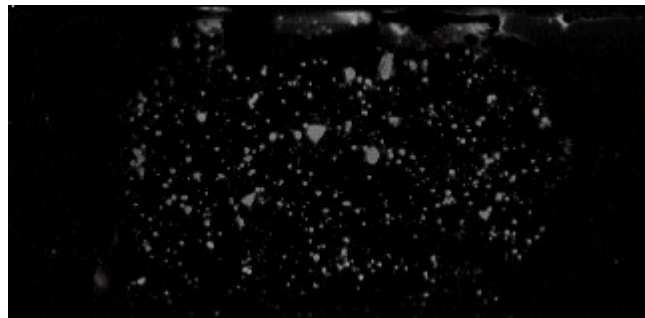
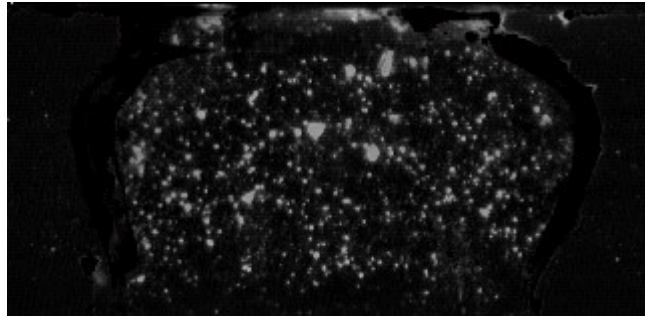
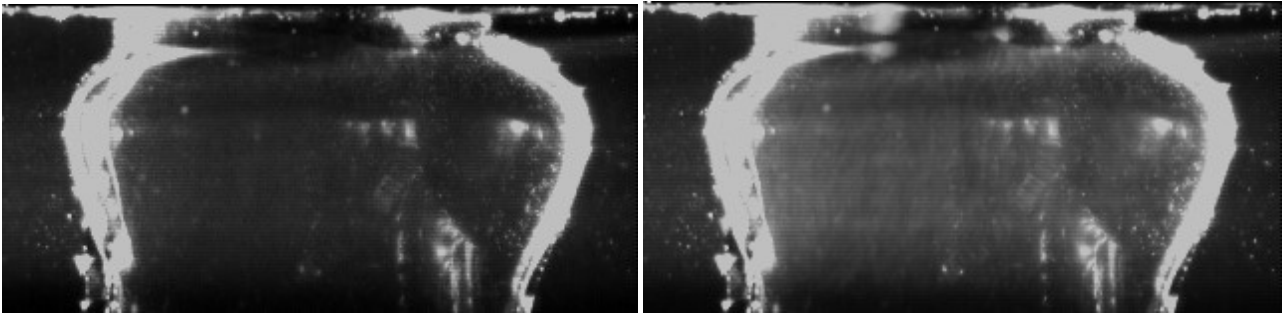
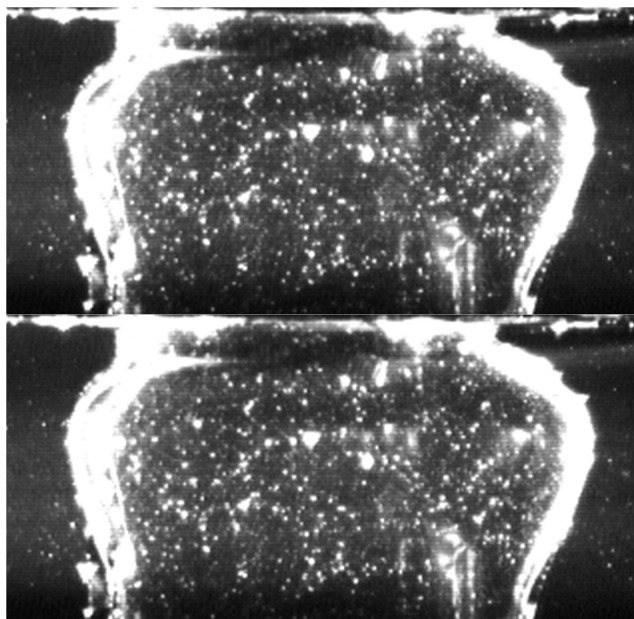


Figura 68. Immagine della parte iniziale dell'aorta a valle di una valvola cardiaca artificiale (in alto) con sottrazione del valore minimo (a sinistra) e del valore medio (a destra) in una sequenza di 50 immagini.



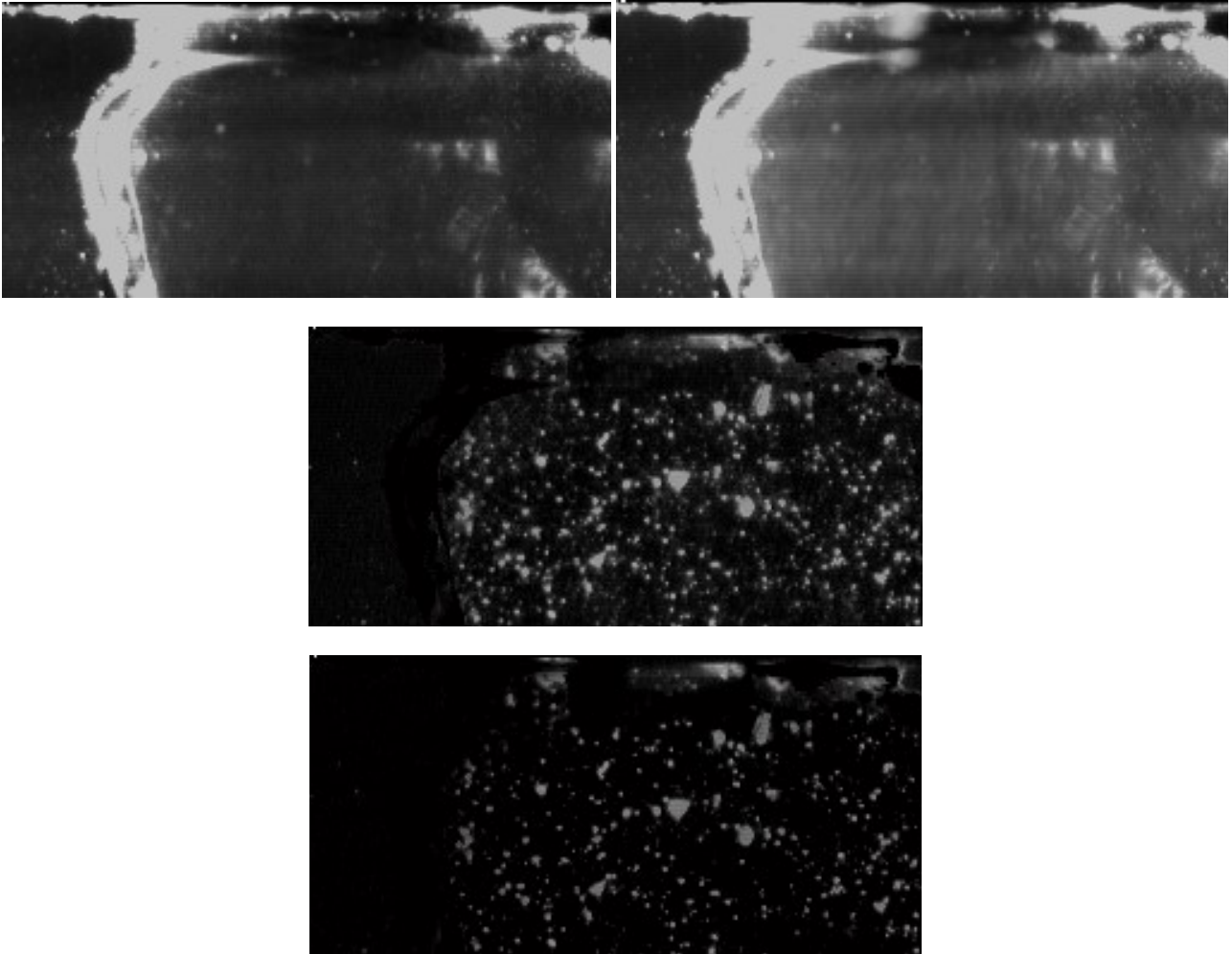


Figure 68. Initial part image of the aorta in downstream of an artificial heart valve (top) with subtraction of the minimum value (left) and the average value (right) in a 50 images sequence.

L'ultima operazione di elaborazione preliminare all'analisi delle immagini è quella di determinazione di una maschera, cioè di una matrice da applicare alle immagini per evitare il calcolo della velocità al di fuori del campo propriamente detto (cioè fuori dai contorni fisici). Tale operazione non apporta alcun miglioramento alla procedura di successiva analisi, ma permette di risparmiare tempo di calcolo in quanto evita l'analisi stessa in zone di non interesse. Come esempio si riporta in figura 69 la determinazione di una maschera per le immagini del canale con parete ondulata già trattate in figura 67.

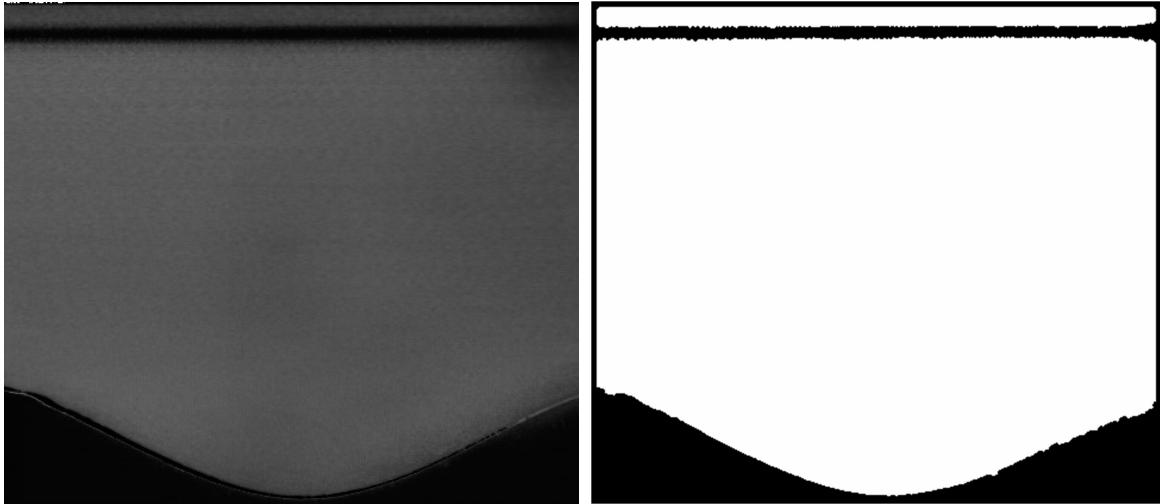
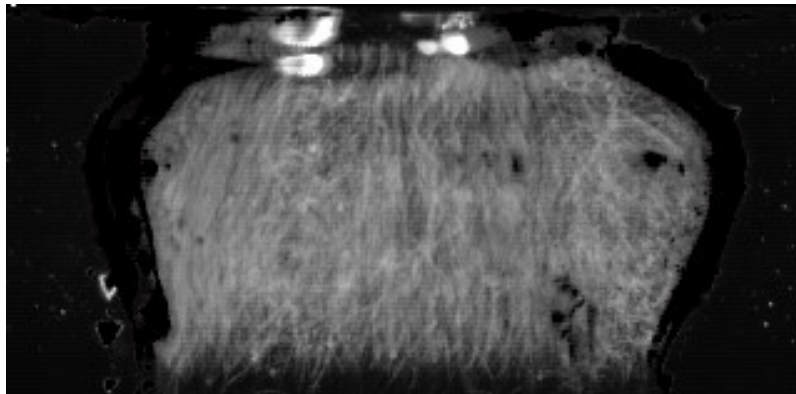


Figura 69. Deviazione standard dell'intensità luminosa di una sequenza di 50 immagini in un canale con parete ondulata (a sinistra) e immagine "maschera" ottenuta dopo un'operazione di soglia (a destra).



The last operation of the preliminary processing in the images analysis is determining a mask, i.e a matrix which should be applied to the images to avoid the velocity calculation outside of the field itself (i.e. outside the physical boundaries). This does not lead to any improvement in the procedure of subsequent analysis, but saves computation time as it avoids the same analysis in non-interesting areas. For example, figure 69 shows the determination of a image mask for channel with corrugated wall already dealt with in figure 67.

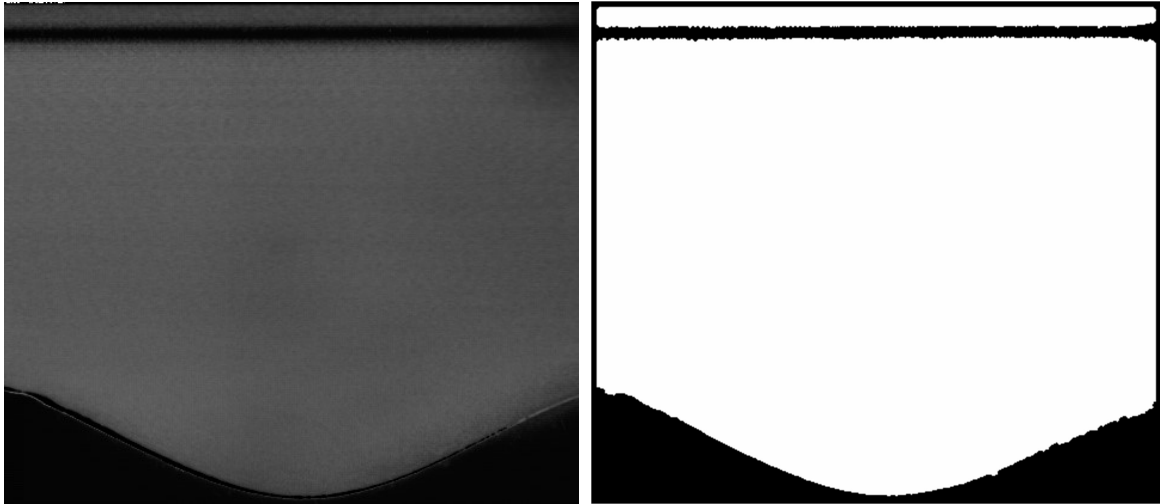


Figure 69. Standard deviation of the luminous intensity of a 50 images sequence in a channel with corrugated wall (left) and image "mask" obtained after a threshold (right).

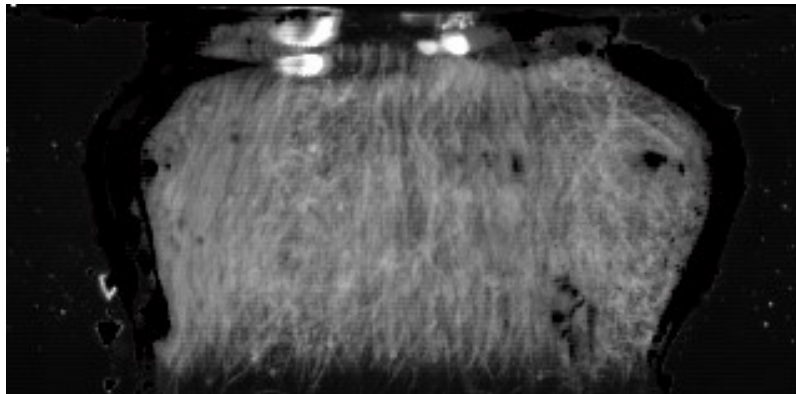


Figura 70. Deviazione standard dell'intensità luminosa di una sequenza di 50 immagini nella zona iniziale dell'aorta con valvola artificiale (a sinistra) e immagine "maschera" ottenuta dopo un'operazione di soglia (a destra).

La maschera viene determinata valutando la variazione di intensità luminosa (deviazione standard) di una sequenza di immagini e verificando se questa sia superiore o inferiore ad un valore di soglia pre-determinato. Si fa l'ipotesi che nelle zone esterni al campo non vi sia passaggio di particelle e

che quindi la variazione di intensità luminosa sia bassa, mentre nelle zone interne questa sia più elevata. Il risultato di figura 69 sembra confermare la bontà della procedura effettuata. Anche per il caso più complesso della valvola cardiaca, riportato in figura 70, si ottengono dei buoni risultati con l'applicazione della procedura sopra indicata.

Per quanto riguarda le operazioni di validazione successiva all'effettuazione della misura PIV, bisogna notare come spesso dall'analisi PIV siano presenti vettori che possono essere classificati come "spuri" (cioè difformi rispetto ai vettori adiacenti) in maniera manifesta. Naturalmente questa osservazione deve essere fatta in modo oggettivo (e non soltanto visuale) e soprattutto l'operazione di successiva sostituzione deve essere effettuata con attenzione. Nella figura 71, è riportata una zona del vortice di Burger con alcuni vettori spuri che andrebbero eliminati e sostituiti per avere un campo più regolare (naturalmente deve essere sempre possibile utilizzare il campo vettoriale non corretto). In passato, prima dell'utilizzo di procedure iterative di analisi di immagini PIV, l'operazione veniva effettivamente svolta a valle dell'analisi delle immagini. Però, bisogna considerare che, in una procedura iterativa, la presenza di un vettore spurio può influenzare la determinazione dei vettori in tutta una zona quando viene diminuita la dimensione della finestra di interrogazione. Di conseguenza è preferibile inserire la procedura di validazione e sostituzione all'interno del ciclo iterativo; la procedura diventa quindi parte integrante dell'analisi dell'immagine.



Figure 70 . Standard deviation of the light intensity of a 50 images sequence in the initial area of the aorta with artificial valve (left) and image "mask" obtained after the threshold operation (right) .

The mask is determined by evaluating the brightness variation (standard deviation) of images sequence and checking whether this is above or below a pre-determined threshold value. It makes

the assumption that in areas external areas of the field, there are not particles movements and therefore, the variation of light intensity is low, while this is higher in internal areas. The result of figure 69 seems to confirm the merit of the performed procedure. Even for the more complex case of heart valve, shown in figure 70, good results can be achieved by the application of the above procedure.

Considering validation process after performing the PIV measurement, it should be noted that often from PIV analysis, there are some vectors which can be classified as "spurious" (i.e. differing with respect to the adjacent vectors) manifestly. Naturally, this observation should be done in an objective manner (not only visual ) and especially the subsequent substitution operation should be made carefully. In figure 71 an area of the vortex Burger is shown with some spurious vectors which should be removed and replaced in order to have a more regular field (of course, it should always be possible to use the not correct vector field). In the past, before the use of iterative procedures for analysis of PIV images, the operation was effectively carried out after the image analysis. However, It should be considered that, in an iterative procedure, when the dimension of the interrogation window is decreased, the presence of a spurious vector can influence the determination of vectors on the entire area. Consequently, it is preferable to insert the validation and replacement procedure within the iterative loop ; therefore, the procedure becomes an integral part of the analysis of the image.

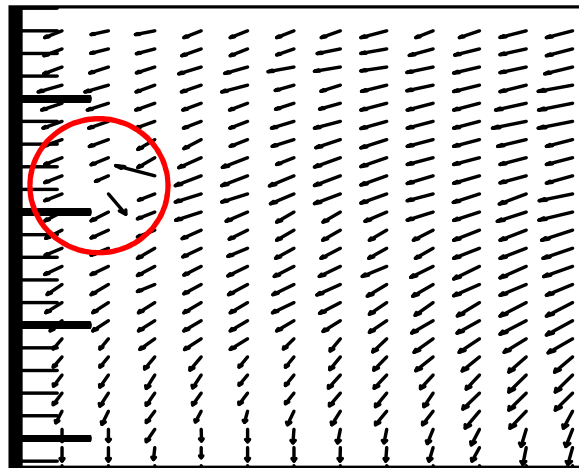


Figura 71. Porzione della figura con evidenziati alcuni vettori spuri.

Come nell'utilizzo di filtri, la procedura di validazione e sostituzione considera ogni elemento della matrice di vettori (nei filtri in realtà si considerava la matrice di pixel dell'immagine, mentre in questo caso si parla della matrice di vettori misurati), per ciascuna componente di velocità,

cercando quando la differenza tra il punto considerato e i primi vicini (in genere gli 8 vettori adiacenti) supera un valore di soglia fissato inizialmente (in questo caso il valore viene considerato come spurio). Quando questo accade entra in gioco la procedura di sostituzione del vettore spurio. Mentre però la procedura di validazione è abbastanza indipendente dal metodo usato (per esempio differenza rispetto al valore medio degli 8 vicini o differenza rispetto al valore mediano), la seconda fornisce risultati abbastanza differenti a seconda del metodo usato. In figura 72 sono mostrati i possibili schemi di sostituzione di un vettore mediante 12 vicini di un vettore spurio (ovviamente ciascun punto può essere pesato in maniera opportuna proprio come nei filtri):

- media pesata a partire dagli 8 vicini;
- media pesata tra spostamenti lineari orizzontali;
- media pesata tra spostamenti lineari verticali;
- combinazione di spostamenti lineari orizzontali e verticali;
- combinazione dei precedenti.

Anche la modalità con cui ci si sposta da un punto a quello adiacente può alterare il risultato. Ad esempio nella figura 73 sono mostrate due possibili modalità con spostamento lungo la direzione orizzontale o verticale (nella quale vengono coinvolti almeno 3 vettori già validati) e quella con spostamento “a macchia” (nella quale vengono coinvolti almeno 4 vettori già validati). Per dare

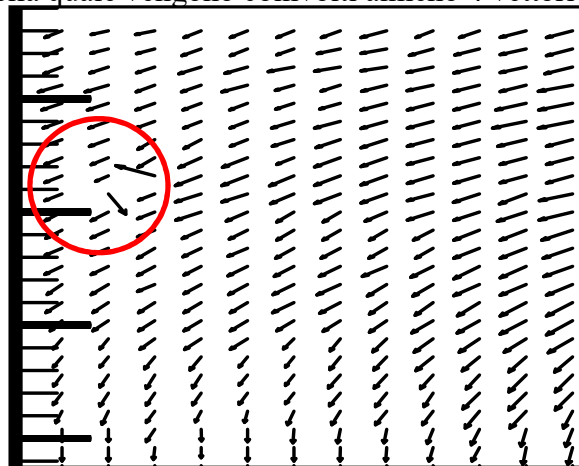


Figure 71. Figure position with some highlighted spurious vectors.

As in the use of filters, the validation and replacement procedure considers each element of the vectors arrays (actually, image's pixels matrix was considered in the filters, while in this case, measured vector matrix is discussed), for each velocity component, when the difference between

the considered point and the first neighbors (typically 8 adjacent vectors ) exceeds the initially fixed threshold value (in this case, the value is considered as spurious). When this happens, procedure of replacing the spurious vectors comes into play. Therefore, while the validation procedure is quite independent of the method used (e.g, difference respect to the average value of the 8 neighbors or difference respect to the median value), the second provides quite different results depending on the method used. The possible patterns of substitution of a vector through 12 neighbors of a spurious vector is shown in figure 72 (obviously each point can be weighed in an appropriate manner like in the filters):

- Weighted average from 8 neighbors;
- Weighted average of the horizontal linear displacements ;
- Weighted average of linear vertical displacements ;
- Linear combination of horizontal and vertical displacements ;
- Combination of the aforementioned cases.

Even the way in which you move from one point to an adjacent one, can change the results. For example, in figure 73 two possible modes with displacement along the horizontal or vertical direction are shown (in which at least three vectors they are already validated ) and the one with "scrub" displacement (in which at least 4 vectors are already validated). In order to give un'idea del risultato che è possibile ottenere, nella figura 74 è riportato il confronto tra differenti procedure di individuazione e sostituzione di vettori spuri (e anche cosa succede in assenza di alcuna procedura) per immagini artificiali con soluzione nota, per le quali è possibile valutare l'errore commesso (indicato con  $\epsilon$ , che rappresenta l'errore quadratico medio su tutti i vettori considerati per ciascuna componente di velocità lungo x o y). Si osserva chiaramente che, anche un semplice filtro mediano (sia per l'individuazione che per la sostituzione dei vettori spuri) porti già ad un dimezzamento dell'errore. L'uso di una procedura di individuazione basata su 12 vicini (quale quella di figura 72) e la sostituzione dei vettori spuri con un peso variabile su 24 vicini porta ad una diminuzione dell'errore di un ulteriore fattore 4. E' importante notare che l'utilizzo di queste procedure di individuazione e sostituzione dei vettori spuri si rifletta in un aumento dei tempi di calcolo di un fattore circa pari a 2.

Infine, per fornire una valutazione completa dell'importanza di tali schemi, nella figura 75 viene mostrato il risultato ottenuto (sempre su immagini artificiali) a partire da analisi senza spostamento finestra (window offset), analisi con spostamento (con dimezzamento dell'errore),



analisi con individuazione e rimozione vettori spuri (riduzione dell'errore di un fattore 5 rispetto al precedente), analisi utilizzando differenze centrate tra le immagini (in vece che in avanti; riduzione poco consistente dell'errore), analisi con funzione peso applicata alla finestra e deformata (riduzione errore di un fattore 10 rispetto al precedente) e deformazione di tutta l'immagine (riduzione ulteriore di un fattore circa 2). Da ciò si deduce come, insieme alle procedure di deformazione della finestra (o di tutta l'immagine), l'individuazione e la sostituzione dei vettori spuri costituisca una fase molto importante nell'analisi di immagini con procedure PIV.

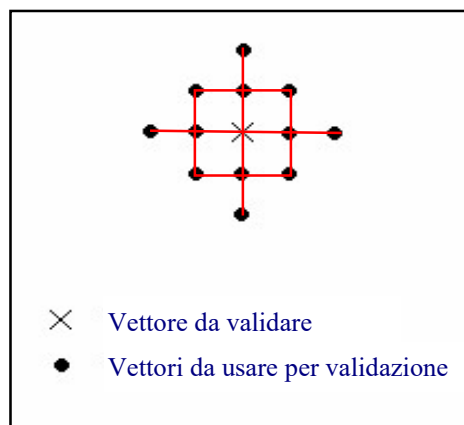


Figura 72. Vettore da validare e utilizzo di 12 primi vicini come schema di validazione.

an idea of the possible results to obtain, the comparison among different procedures for identifying and replacing spurious vectors are shown in figure 74 ( and also what happens in the absence of any procedure) for artificial images with known solution, for which it is possible to evaluate the error committed ( indicated with  $\epsilon$  , which represents the mean square error on all considered vectors for each velocity component along the x or y). It is observed that even a simple median filter (both for detecting and for substitution of spurious vectors) leads already to the error halving. The use of an identification procedure based on 12 neighbors (such as that of figure 72) and the replacement of spurious vectors with a variable weight on 24 neighbors leads to the error reduction by a further factor of 4. It is important to note that the use of these procedures for identifying and replacing spurious vectors is reflected in an increase in computation time by a factor approximately equal to 2.

Finally, to provide a complete assessment of the importance of these schemes , the obtained result is shown in figure 75 (always on artificial images) from analysis without window offset, with displacement analysis (with error halving), analysis with detection and removing of spurious

vectors (error reduction by a factor of 5 compared to the previous one), analysis using centered differences between the images (instead of forwards; not very consistent error reduction), with weight function analysis applied to **window and deformed** (error reduction by a factor of 10 compared to the previous one) and deformation of the whole image (further reduction by a factor of about 2). From this, it is deduced that, together with procedures for window deformation (or any image), the identification and replacement of spurious vectors is a very important step in the images analysis with PIV procedures.

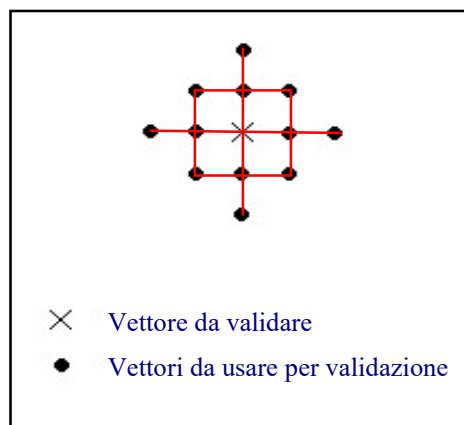


Figure 72. Validating vector and use of 12 nearest neighbors as a validation scheme.

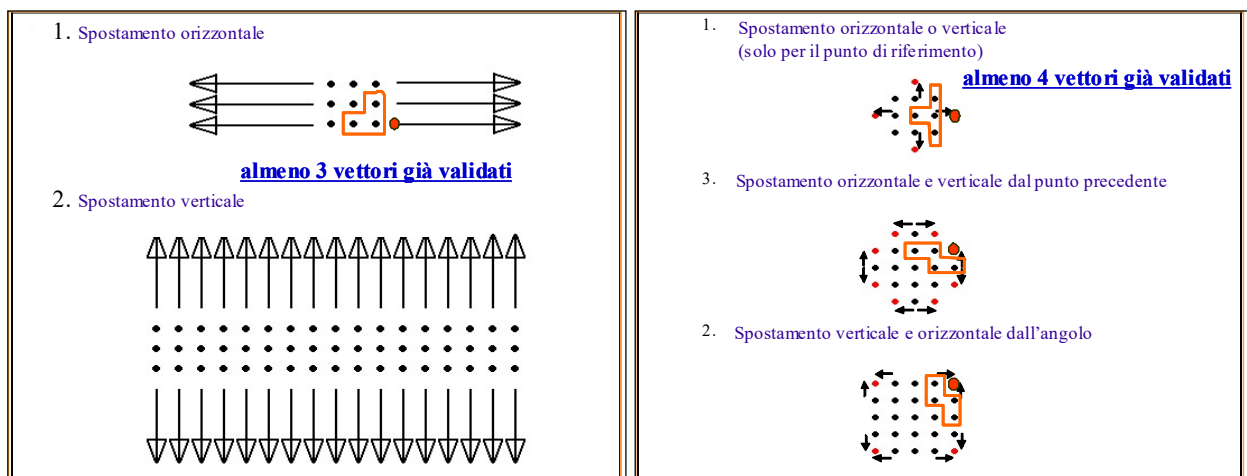


Figura 73. Possibili procedure di spostamento per il riconoscimento e la sostituzione di vettori spuri: orizzontale-verticale (a sinistra) e “a macchia” (a destra).

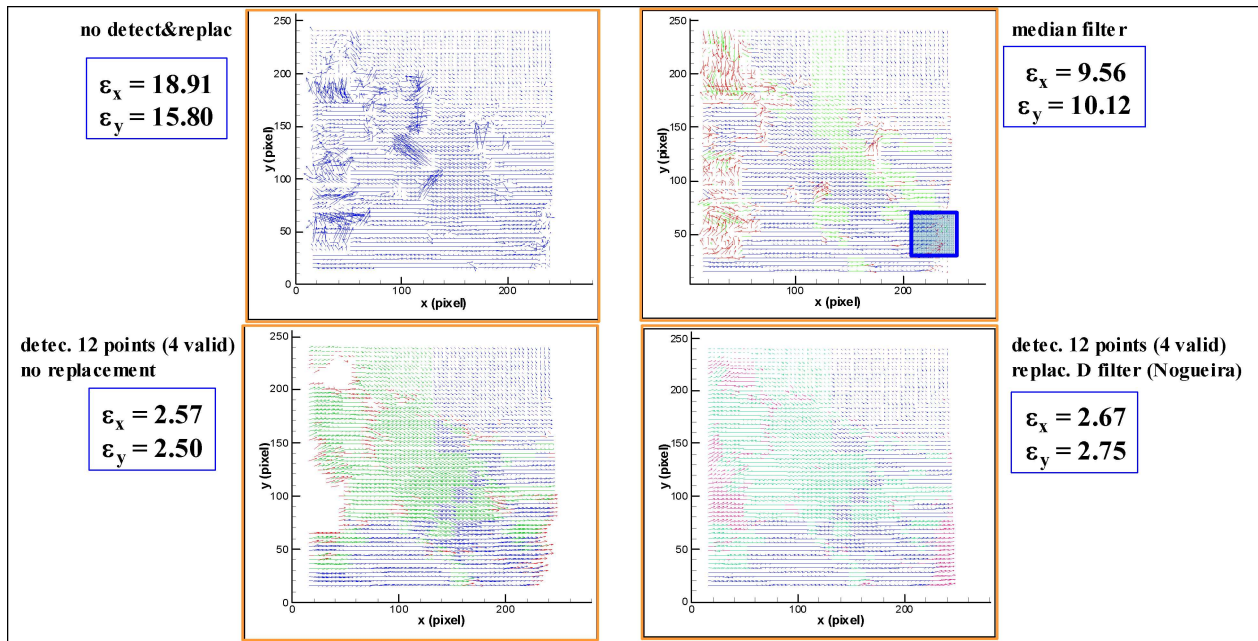


Figura 74. Andamento dell'errore quadratico medio per le due componenti di velocità per differenti modalità di individuazione e sostituzione dei vettori spuri.

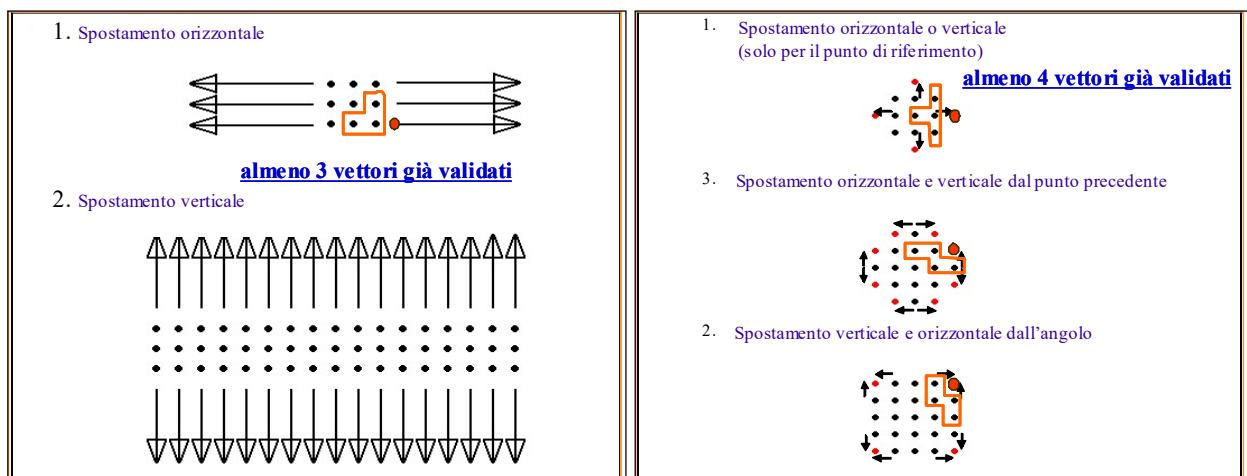


Figure 73. Possible displacement procedures for the identification and replacement of spurious vectors: horizontal-vertical (left) and "scrub" (right).

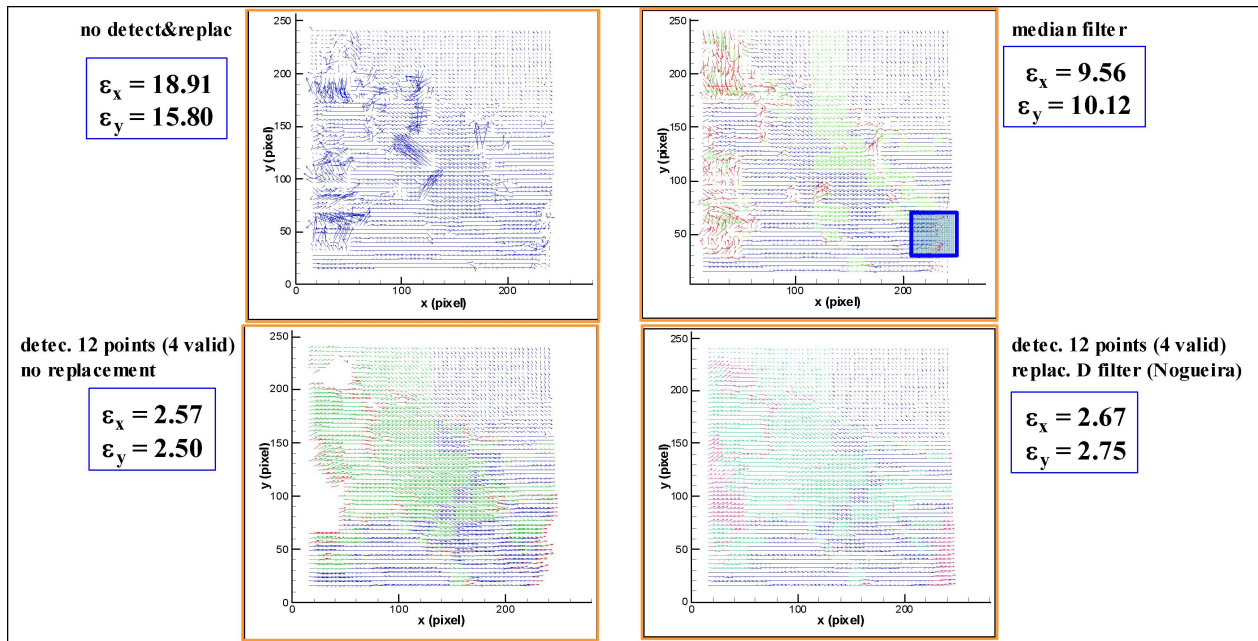


Figure 7 Mean square error for two velocity components for different modes of identification and replacement of spurious vectors

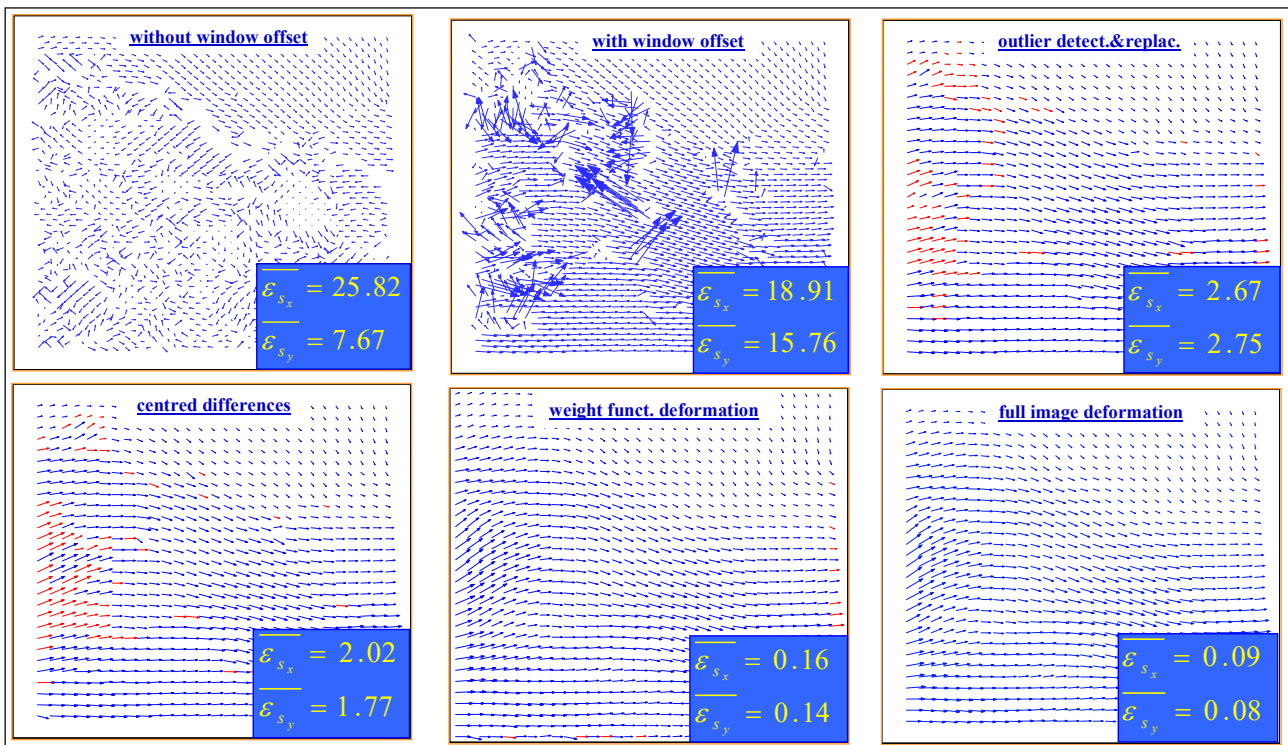


Figura 75. Andamento dell'errore quadratico medio per le due componenti di velocità per differenti procedure operative di analisi immagini PIV.

### 3.7 INDIVIDUAZIONE STRUTTURE VORTICOSE

Viene dato un breve accenno ad una procedura per l'individuazione di strutture vorticose a partire da campi vettoriali (che possono essere ottenuti tramite PIV o altri metodi sperimentali, ma anche da dati numerici). Il metodo si basa sul fatto che l'individuazione di strutture vorticose mediante una semplice sottrazione di velocità media o attraverso il calcolo della vorticità può essere o dipendente dai parametri (nel primo caso) o fuorviante in quanto la vorticità stessa fornisce minimi e massimi relativi anche in assenza di strutture vorticose vere e proprie. Per esempio in figura 76 viene mostrato un vortice in uno strato limite turbolento (misurato con PIV, la parete si trova sulla zona inferiore) individuato mediante sottrazione di 0.85 volte (a sinistra) e di 0.75 volte (a destra) la velocità media. L'individuazione dipende dal valore scelto e non è universale a meno di utilizzare una velocità variabile con la distanza dalla parete. Nella stessa figura viene mostrata una mappa di vorticità dalla quale anche risulta difficile individuare le strutture vorticose (pur evidenziate da massimi o minimi di vorticità) perché immerse in un insieme di valori differenti da zero (la vorticità è infatti sensibile alle variazioni di velocità nelle varie direzioni).

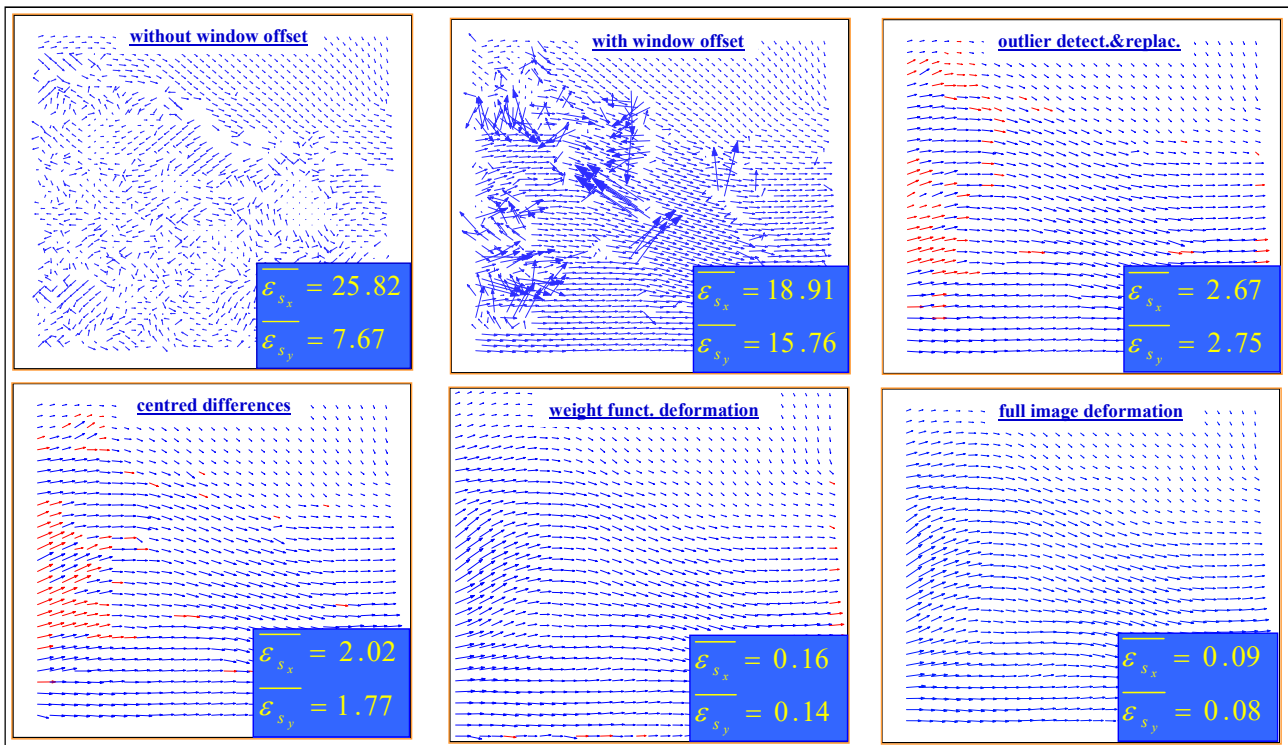


Figure 75 Mean square error trend for two velocity components for different operating procedures for PIV image analysis.

### 3.7 VORTICAL STRUCTURE IDENTIFICATION

A brief hint is given to the procedure of vortical structures identification from vector fields (which may be obtained by PIV or other experimental methods, but also by numerical data). The method is based on the fact that identification of vortical structures through a simple average velocity subtraction or through calculation of vorticity calculation can be dependent to parameters (in the first case) or can be confusing since the vorticity in itself provides relative minimum and maximum also in the absence of real vortical structures. For example in figure 76, a vortex in a turbulent boundary layer is shown (measured with PIV, the wall is located on the bottom area) identified by subtraction of 0.85 times (left) and 0.75 times (on the right) of the average velocity. The detection depends on the chosen value and is not universal unless using a variable velocity with the distance from the wall. In the same figure a vorticity map is shown from which it is also difficult to identify the vortical structures (although highlighted by maximum or minimum vorticity) because they are immersed in a series of values different from zero (the vorticity is in fact sensitive to velocity change in the various directions).

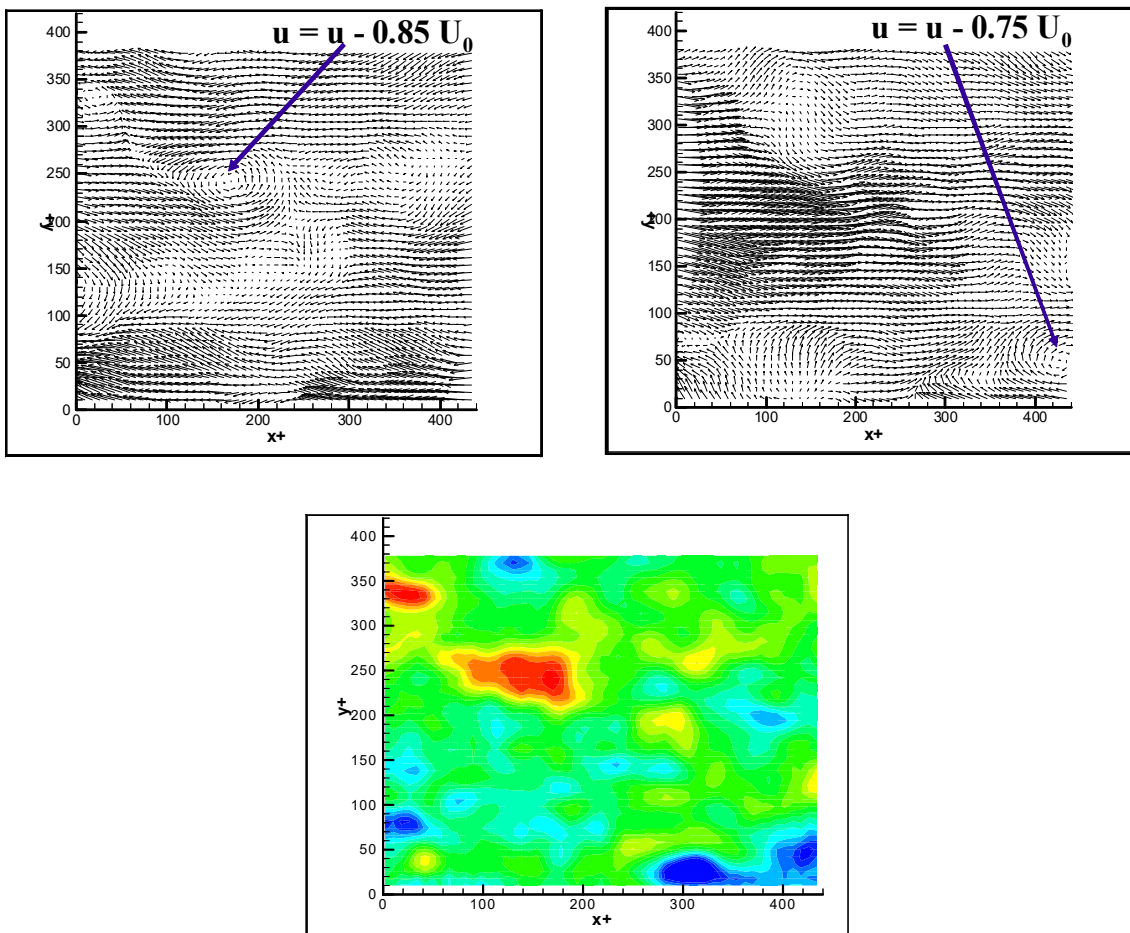


Figura 76. Individuazione di strutture vorticosi in uno strato limite turbolento da misure PIV. Sottrazione di velocità costante (in alto) e vorticità (in basso). La parete si trova nella parte inferiore dell'immagine.

Per superare questi inconvenienti, è stato proposto nel 1995 da Jeong & Hussain un metodo generale basato sulla valutazione del tensore gradiente di velocità. Il metodo può essere applicato ad un campo vettoriale nel quale siano state misurate tutte e tre le componenti di velocità in un dominio tridimensionale. Per il caso semplificato di misura di due componenti della velocità su un piano (come nella PIV), il metodo si riduce alla valutazione degli invarianti P (traccia) e Q (determinante) della matrice gradiente di velocità (in questo caso il metodo si dimostra equivalente

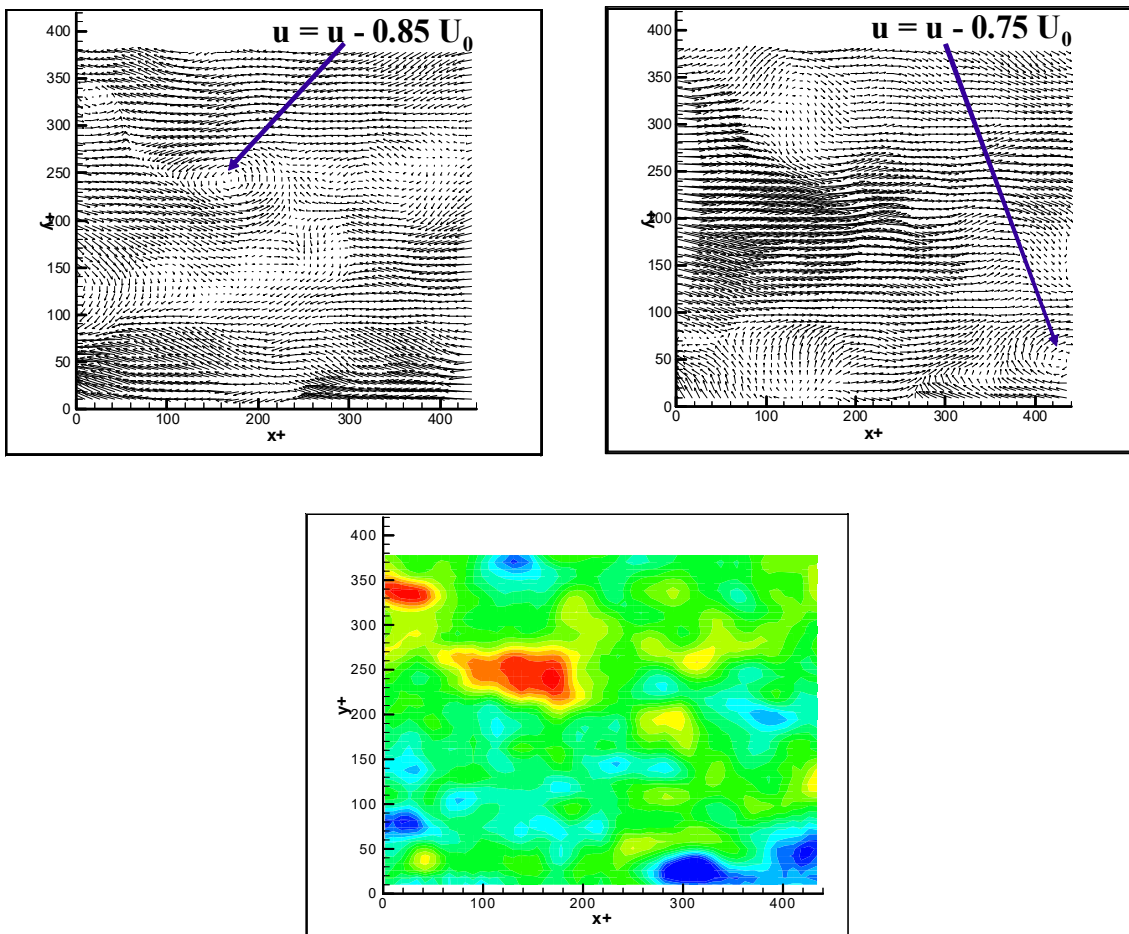


Figure 76. Identification of vortical structures in a turbulent boundary layer from PIV measurements. Subtraction of constant velocity (top) and vorticity (bottom). The wall is located in the lower part of the image.

To overcome these drawbacks, a general method based on the evaluation of the velocity gradient tensor was proposed in 1995 by Jeong & Hussain. The method can be applied to a vector field in which all three velocity components are measured in a three-dimensional domain. For the simplified case of measurement of two velocity components on a plane (as in the PIV), the method reduces to the evaluation of the invariants P (track) and Q (determinant) of the velocity gradient matrix (in this case, the method proves the other equivalent methods

ad altri proposti in passato ma ha il pregio di fornire una visualizzazione migliore) e nella determinazione delle zone in cui una combinazione di tali invarianti fornisce valore nullo:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \left[ Q = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad P = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = P^2 - 4Q = 0$$

Il valore  $\Delta=0$  costituisce quindi un limite tra le zone in cui sono presenti strutture vorticosi e quelle in cui c'è solo turbolenza diffusa. Nella figura 77 viene mostrato il metodo applicato all'immagine già utilizzata nella figura 76: si può immediatamente notare come il metodo risulti particolarmente efficace nell'individuazione di strutture vorticosi (zone in giallo-verde) inizialmente non bene identificabili e come risulti invece immune dalla zona con alti gradienti di velocità nella parte inferiore dell'immagine.

proposed in the past but has the advantage of providing the better visualization) and in the determination of the areas where a combination of these invariants provides zero value:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \left[ Q = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad P = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = P^2 - 4Q = 0$$

The value  $\Delta=0$  is thus a limit among the zones in which the vortical structures are present and those in which there is only diffused turbulence. In figure 77, the method which is already applied to the image used in figure 76 is shown: It can be immediately seen that the method is particularly effective in the identification of vortex structures (areas in yellow-green) which are not initially



identifiable and as a result immune from area with high velocity gradients in the lower part of the image

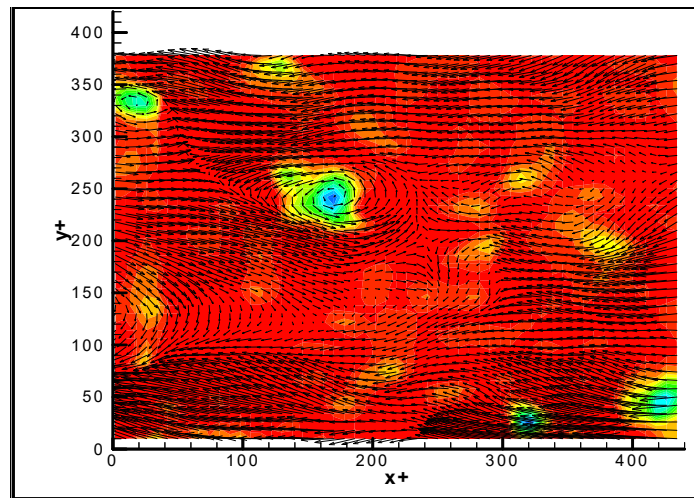


Figure 77 . Identification of vortical structures in a turbulent boundary layer from PIV measurements using the method of Jeong & Hussain (1995). The wall is located in the lower part of the image.

# Capitolo 4:

## ANALISI DI SEGNALI FLUIDODINAMICI

### 4.1 GENERALITA'

A valle di un sistema di misura si otterrà un'insieme di dati (segnale) che deve essere analizzato per estrarre le informazioni utili alla comprensione del fenomeno fluidodinamico in esame. In teoria, tali insiemi di dati dovrebbero avere durata illimitata, ma nella pratica hanno durata finita; ci occuperemo soltanto di questi ultimi (segnali limitati).

Si può effettuare la seguente classificazione (cfr. figura 84):

- segnali periodici o aperiodici;
- segnali continui o discreti;
- segnali campionati con regolarità o casualmente;

(quest'ultima divisione vale soltanto per i segnali discreti). Di solito tali segnali rappresentano l'evoluzione temporale della grandezza in esame, ma la classificazione, così come le considerazioni seguenti, possono essere estese anche all'evoluzione spaziale (nei casi 1D, 2D e 3D).

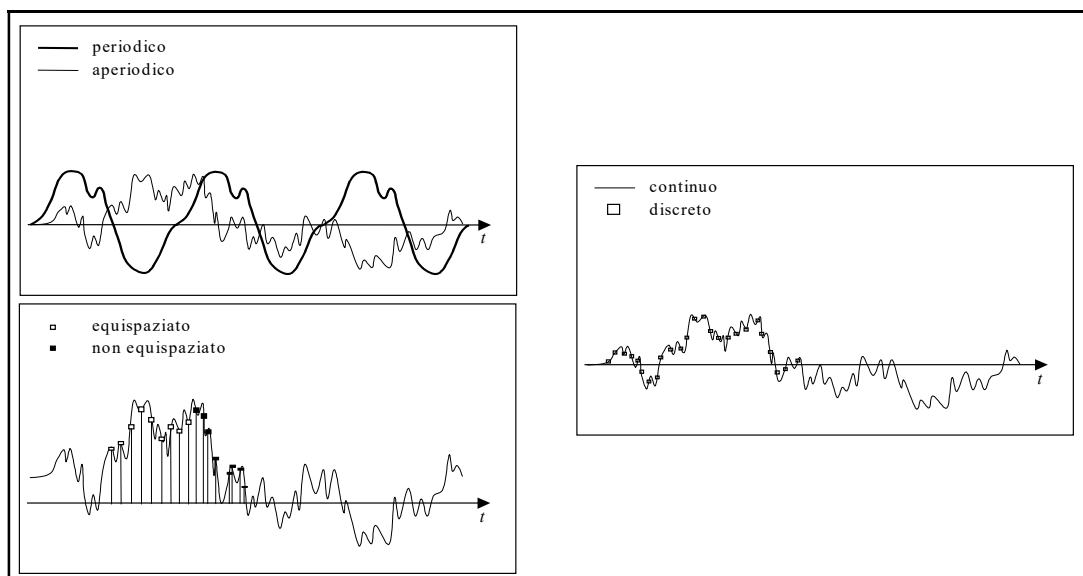


Figura 84. Differenti tipi di segnali e di insiemi di dati.

Nelle applicazioni fluidodinamiche si presentano tutti i tipi di segnali descritti in precedenza:

- segnale periodico  $\Rightarrow$  misure nella scia di corpi e a valle di sistemi propulsivi;
- segnali aperiodici  $\Rightarrow$  misure in strato limite e in zone con forti gradienti;
- segnali continui  $\Rightarrow$  misure con anemometria a filo caldo, con LDA con "tracker", uscita della bilancia dinamometrica;
- segnali discreti  $\Rightarrow$  misure con tecnica LDA, misure con tecnica PIV, misure con interferometria;
- segnali campionati regolarmente  $\Rightarrow$  misure con anemometria a filo caldo;
- segnali campionati casualmente  $\Rightarrow$  misure LDA e PIV.

Il problema è come estrarre le informazioni relative al campo di moto da tali segnali. Come si è descritto nel capitolo relativo alle equazioni valide per flussi turbolenti, la trattazione di tali campi può essere effettuata per mezzo di un approccio di tipo statistico considerando che ciascuna grandezza varia rapidamente nel tempo e nello spazio. Si richiameranno perciò alcune nozioni di calcolo delle probabilità e analisi di dati statistici.

## 4.2 RICHIAMI DI CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Lo studio statistico del comportamento di una variabile caratteristica del sistema in esame parte dalla nozione della probabilità che si verifichi un dato evento cioè che venga ottenuto un dato valore della variabile in esame.

### 4.2.1 Definizione di probabilità

La probabilità può essere definita in vari modi. Nelle applicazioni ingegneristiche spesso si definisce come probabilità  $P(A)$  di un evento  $A$  l'espressione:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{N}$$

in cui  $N$  è il numero totale di prove effettuate ed  $n_A$  il numero di quelle in cui si verifica l'evento  $A$ . Questa definizione presuppone che si faccia un numero infinito di prove, altrimenti essa fornisce

solamente un'indicazione sulla *frequenza relativa* dell'evento considerato. La probabilità può essere definita anche mediante il rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento  $A$  ed il numero di casi possibili. Entrambi i numeri in questo caso sono calcolati a priori, ma non è sempre chiaro il modo con cui calcolarle senza dare luogo ad ambiguità.

Il modo più generale per definire la probabilità è quello assiomatico. In questo caso la probabilità dell'evento  $A$  è un numero associato ad esso, che soddisfa i 3 seguenti postulati:

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$
2.  $P(S) = 1$ , dove  $S$  è l'evento certo.
3.  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ , dove  $A$  e  $B$  sono eventi che si escludono a vicenda.

con le quali è possibile costruire l'intera teoria delle probabilità senza alcuna ambiguità.

#### 4.2.2 Variabile aleatoria e densità di probabilità

È possibile associare un numero al risultato di un esperimento, definendo così una *variabile aleatoria*  $X$  funzione del risultato. Si definisce *funzione di ripartizione* (o *funzione della distribuzione* o più semplicemente *distribuzione*) della variabile aleatoria  $X$  la funzione:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

dove  $x$  è un numero reale mentre  $F(x)$  rappresenta la probabilità che la variabile aleatoria  $X$  sia minore o uguale ad  $x$ . Si definisce *funzione densità di probabilità* (o PDF: Probability Density Function) di  $X$ :

$$p(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

In termini di frequenza relativa si può scrivere un'espressione approssimata per la densità di probabilità. Si supponga di ripetere un esperimento un numero  $N$  di volte e di trovare per  $\Delta n(x)$  volte un risultato tale che  $x \leq X \leq x + \Delta x$  (ad esempio la misura di una grandezza compresa nel suddetto intervallo). Si ottiene:

$$p(x) \cong \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} \cong \frac{\Delta n(x)}{\Delta x \cdot N} \tag{3.1}$$

Si dice che una variabile aleatoria  $x$  è distribuita *normalmente* (*gaussiana*) se la sua densità ha la forma gaussiana:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}$$

dove  $\bar{x}$  è la *media* di  $x$  e  $\sigma_x$  la sua *deviazione standard*. Il loro significato sarà chiarito nel seguito.

Molti processi fisici sono descritti da variabili che hanno densità gaussiana. Il motivo può essere spiegato con il *teorema del limite centrale*. Si consideri una successione di variabili aleatorie indipendenti  $X_1, X_2, \dots, X_n$  e la variabile somma  $X=X_1+X_2+\dots+X_n$ . Il teorema del limite centrale dimostra che, qualunque siano le densità delle singole variabili  $X_i$ , la densità della variabile somma tende, al crescere di  $n$ , alla curva gaussiana.

In generale, le grandezze fluidodinamiche tendono ad assumere una densità di probabilità gaussiana nelle regioni del campo fluidodinamico lontane dai corpi o dalle superfici, mentre si allontanano da tale curva nello strato limite, nelle scie e nelle zone che presentano elevati gradienti di velocità.

Tutti quei processi fisici nei quali una data grandezza si ottiene dalla somma di molte altre grandezze casuali indipendenti, sono caratterizzati da una *PDF* gaussiana.

#### 4.2.3 Medie e momenti statistici

Si definisce media di insieme di una variabile aleatoria  $X$ :

$$E[X] = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \tag{3.2}$$

Questa definizione sembra lontana dal concetto di media aritmetica di  $N$  numeri, ma in realtà la media aritmetica è proprio l'interpretazione della relazione precedente in termini di frequenza relativa. Infatti, se dividiamo l'asse  $X$  in intervalli  $(x_k, x_{k+1})$  di ampiezza  $\Delta x$ , la relazione precedente può essere approssimata con la:

$$\bar{x} \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k p(x_k) \Delta x$$

sostituendo in questa la (3.1) si ottiene:

$$\bar{x} \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\Delta n(x_k)}{N}$$

Ricordiamo che  $\Delta n(x_k)$  è il numero di valori che cadono nell'intervallo  $(x_k, x_{k+1})$  e che sono approssimate con il valore  $x_k$  per cui la relazione precedente rappresenta proprio la media aritmetica.

Se la (3.2) viene riscritta divisa per  $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx$  (qualora sia differente da 1):

$$E[x] = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx}$$

diviene evidente il suo significato di media ponderale delle  $X$ , in cui le densità di probabilità rappresentano i pesi. La definizione di media data per  $X$  può essere estesa anche alla sua potenza  $X^k$  ottenendo il momento  $k$ -esimo:

$$E[X^k] = \overline{x^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)dx \quad (3.3)$$

Il momento primo è la media, il momento secondo è invece il *valore quadratico medio*. Considerando gli scarti rispetto alla media si definiscono i *momenti centrali*:

$$\mu_k = E[(X - \bar{x})^k] = \overline{(x - \bar{x})^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^k p(x)dx \quad (3.4)$$

Il momento centrale secondo viene chiamato *varianza* ed è indicato con il simbolo  $\sigma^2$ , la sua radice quadrata è la *deviazione standard*. I momenti pari quantificano l'allargamento della PDF attorno al valore medio. I momenti di ordine dispari, invece, danno indicazioni sulla asimmetria della PDF attorno alla media. Dalla definizione di momento del secondo ordine si ottiene inoltre:

$$\sigma_x^2 = \overline{x'^2} = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} + \overline{\bar{x}^2} - 2\overline{x\bar{x}} \quad \Rightarrow \quad \overline{x^2} = \overline{x'^2} + \bar{x}^2$$

e cioè il valore quadratico medio è pari alla somma della varianza (secondo momento centrale) e del quadrato della media. Sia il valore quadratico medio che la varianza, essendo pari a delle

somme algebriche tra valori al quadrato, non risentono di alcuna asimmetria rispetto alla media. Il terzo momento centrale invece da informazioni sull'asimmetria della *PDF*. Se la *PDF* è simmetrica (ad esempio il caso della distribuzione gaussiana) allora il momento terzo risulta identicamente nullo. Molto spesso si utilizza il valore adimensionalizzato del terzo momento centrale, lo *skewness*  $s = \overline{x'^3} / (\sigma_x^2)^{3/2}$ . La figura 85 riporta un esempio di *PDF* con skewness positivo. La *PDF* della figura 85 ha skewness maggiore di zero poiché la coda nel semipiano positivo è più allungata rispetto a quella del semipiano negativo. La figura 86 riporta due esempi di *PDF* asimmetriche: quella a sinistra ( $s > 0$ ) è caratterizzata da bassi valori negativi della variabile, ma molto probabili, ed elevati valori positivi poco probabili (l'ordinata dei valori con  $x > 0$  è in genere minore rispetto a quella del semipiano negativo). Discorso analogo ma invertito nel caso di  $s < 0$ . In entrambi i casi, il valore più probabile della *PDF* (massimo della curva) non coincide con la media. Lo skewness quantifica l'asimmetria della *PDF* rispetto alla media.

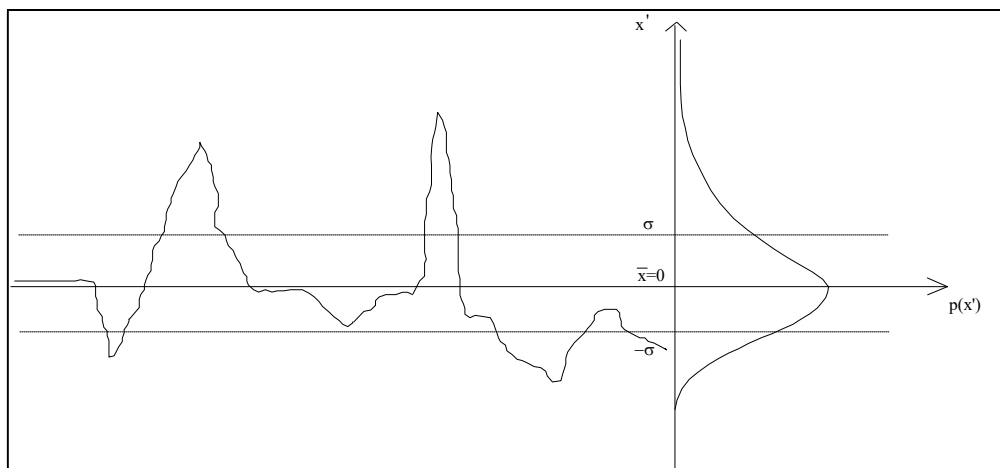


Figura 85. Segnale aleatorio asimmetrico con valore dello skewness positivo.

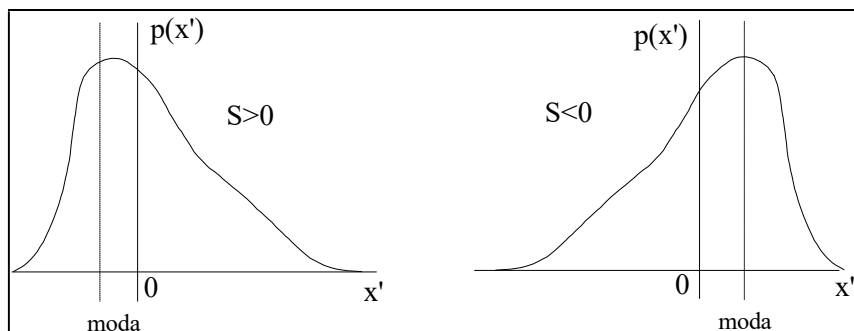


Figura 86 . Esempi di funzioni con *PDF* asimmetriche e valori di skewness opposti.

Il quarto momento centrale, adimensionalizzato con il quadrato della varianza, è detto *kurtosis* o *flatness*:

$$K = \frac{\overline{x^4}}{(\sigma_x^2)^2} \cong \frac{1}{(\sigma_x^2)^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^4$$

e quantifica la *piattezza* della *PDF* (figura 87). Il *kurtosis* è grande se le code della *PDF* sono lunghe rispetto alla deviazione standard, è piccolo se le code sono invece molto ristrette. L'influenza delle code sui valori dei momenti è tanto maggiore quanto più è elevato l'ordine del momento considerato. Ovviamente, in sede di calcolo dei momenti statistici, al crescere dell'ordine del momento desiderato deve necessariamente essere incrementato il numero dei campioni che interviene nel computo dei momenti, poiché sono sufficienti pochi valori isolati dagli altri per alterare in maniera drastica il risultato.

Nel caso particolare di distribuzione gaussiana la media coincide con la moda. Le ascisse dei flessi della *PDF* corrispondono alle deviazioni standard. In particolare, nell'intervallo  $\bar{x} - \sigma_x \leq x \leq \bar{x} + \sigma_x$  cade circa il 68% dei campioni, nell'intervallo  $\bar{x} - 2\sigma_x \leq x \leq \bar{x} + 2\sigma_x$  circa il 94% mentre per  $\bar{x} - 3\sigma_x \leq x \leq \bar{x} + 3\sigma_x$  circa il 99%. Per la distribuzione gaussiana lo skewness è nullo mentre il *kurtosis* è pari a 3.

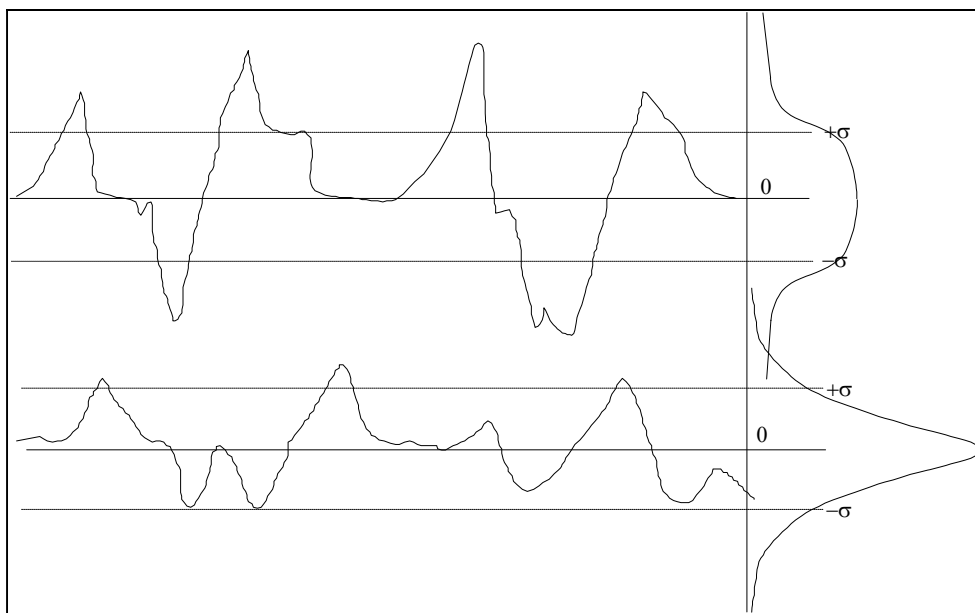


Figura 87. Esempi di segnali e relative *PDF* con differente *kurtosis*.



#### 4.2.4 Medie di insieme e temporali

Le medie e i valori statistici descritti in precedenza possono essere ottenuti dai dati in due modalità (*cfr.* figura 88):

- *medie di insieme*, effettuate sull'insieme di differenti prove dello stesso esperimento (saranno funzioni del tempo e del punto considerato); per il valore medio si può scrivere:

$$E[X(t_1, \underline{x}_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t_1, \underline{x}_1) p(X, t_1, \underline{x}_1) dX$$

- *medie temporali (o spaziali)*, effettuate sullo stesso segnale nel tempo (o nello spazio) (potranno essere funzione del punto (o dell'istante considerato); per il valor medio, nel caso di equiprobabilità, si può scrivere:

$$\bar{X}(\underline{x}_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \underline{x}_1) dt \quad \text{nel tempo;}$$

$$\bar{X}(t_1) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_0^V X(t_1, \underline{x}) d\underline{x} \quad \text{nello spazio.}$$

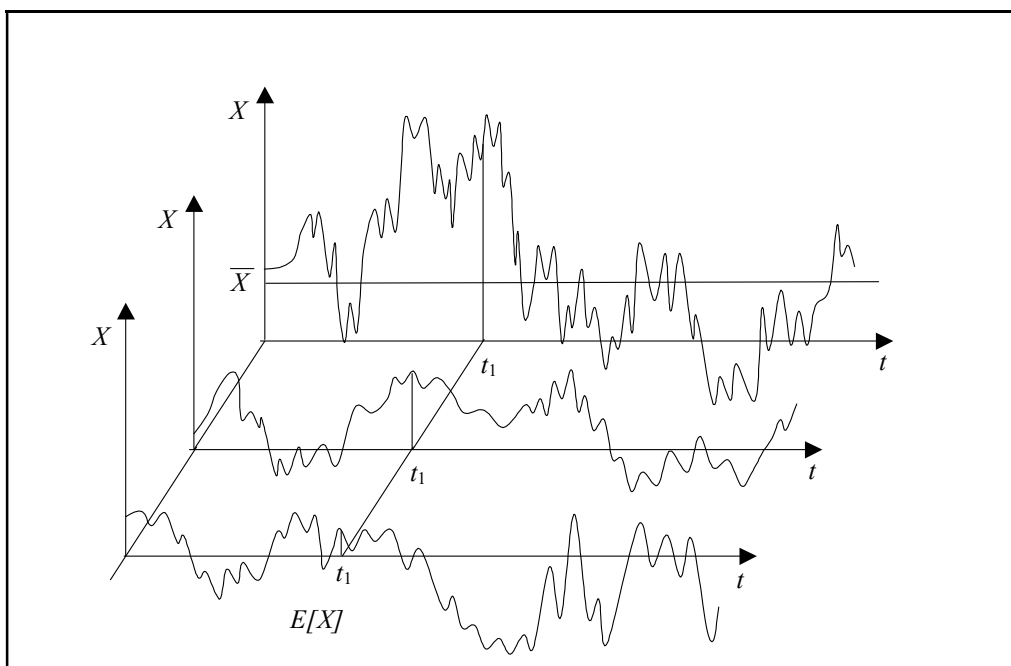


Figura 88. Operazioni statistiche effettuate sull'insieme delle prove e nel tempo.

La media temporale o spaziale può anche essere effettuata sul prodotto o sulla differenza di più segnali. Le medie di insieme devono essere effettuate quando non è possibile assumere la stazionarietà del segnale (p.e. quando si ha un segnale periodico bisogna effettuare la media in corrispondenza della stessa fase del segnale e si ha il cosiddetto campionamento in fase). Nel caso in cui la distribuzione di probabilità sia la stessa lungo l'insieme delle prove e nel tempo, cioè quando è possibile sostituire l'insieme delle prove con l'intervallo temporale, allora qualsiasi statistica lungo l'insieme può essere sostituita da una statistica nel tempo (*processo ergodico*); p.e. per il valor medio:

$$E[X] = \frac{\int_0^{\infty} X(t, \underline{x}_1) p(X, t, \underline{x}_1) dt}{\int_0^{\infty} p(X, t, \underline{x}_1) dt} = \frac{\int_0^{\infty} X(t, \underline{x}_1) dt}{\int_0^{\infty} dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \underline{x}_1) dt = \bar{X}$$

E' importante notare che l'ergodicità implica la stazionarietà del segnale. Nel caso spaziale valgono le stesse considerazioni pur di sostituire la parola stazionario con la parola omogeneo.

Nel caso delle medie temporali (o spaziali) non è ovviamente possibile nella pratica effettuare le medie su tempi (o volumi) infiniti. Di conseguenza, si sceglierà un tempo  $T$  (o un volume  $V$ ) finito che sia:

- sufficientemente grande rispetto a tutte le scale temporali (spaziali) del fenomeno in esame (almeno un fattore 100);
- sufficientemente piccolo rispetto alle eventuali non stazionarietà (disomogeneità) presenti nel flusso (almeno un fattore 10).

Se il segnale è periodico questo secondo requisito sarà valido se si vuole effettuare un campionamento in fase, mentre dovrà essere  $T \gg T_0$  (essendo  $T_0$  il periodo del segnale) se si vogliono ottenere quantità mediate su più periodi.

I requisiti precedenti, che quindi richiedono una conoscenza preventiva dei tempi (o dimensioni) caratteristici del fenomeno, devono essere considerati insieme a quelli necessari per avere il richiesto errore statistico sul momento considerato. Prima però si vogliono introdurre altre funzioni che possono essere derivate dall'analisi dei dati e dalle quali si possono anche ottenere delle valutazioni dei tempi e dimensioni caratteristiche del fenomeno fluidodinamico.

#### 4.2.4 Funzione di auto-correlazione

Si è già introdotta nella metodologia di misura PIV la funzione di correlazione spaziale. La funzione di auto-correlazione è definita come (*cf.* figura 89):

$$R_x(\underline{x}_1, \underline{r}, t_1, \tau) = E[X'(\underline{x}_1, t_1)X'(\underline{x}_2, t_2)] = E[X'(\underline{x}_1, t_1)X'(\underline{x}_1 + \underline{r}, t_1 + \tau)]$$

essendo  $X'$  la parte fluttuante ( $X' = X - E[X]$ ) ed  $(\underline{r}, \tau)$  gli intervalli spaziale e temporale ( $\underline{r} = \underline{x}_2 - \underline{x}_1$ ,  $\tau = t_2 - t_1$ ). Le medie di insieme possono essere sostituite, nel caso stazionario, da medie temporali. La funzione di correlazione esprime il legame lineare tra due funzioni ( $u$  e  $v$  nella figura 89). La dipendenza della funzione di correlazione dalle quattro variabili ( $\underline{x}_1, \underline{r}, t, \tau$ ) può essere ridotta nei casi particolari di campo di moto omogeneo ( $R_x = R_x(\underline{r}, t, \tau)$ ) o di campo di moto stazionario ( $R_x = R_x(\underline{x}_1, \underline{r}, \tau)$ ). La dipendenza può essere ulteriormente ridotta introducendo le correlazioni puramente temporale (caso omogeneo e stazionario) e puramente spaziale:

$$R_x(\tau) = \overline{X'(t)X'(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X'(t)X'(t+\tau)dt$$

$$R_x(\underline{r}) = \overline{X'(\underline{x})X'(\underline{x}+\underline{r})} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X'(\underline{x})X'(\underline{x}+\underline{r})dt$$

(nel caso in cui il calcolo fosse effettuato su tempi finiti allora al posto di  $T$  bisogna sostituire  $T - \tau$  e si elimina il limite).

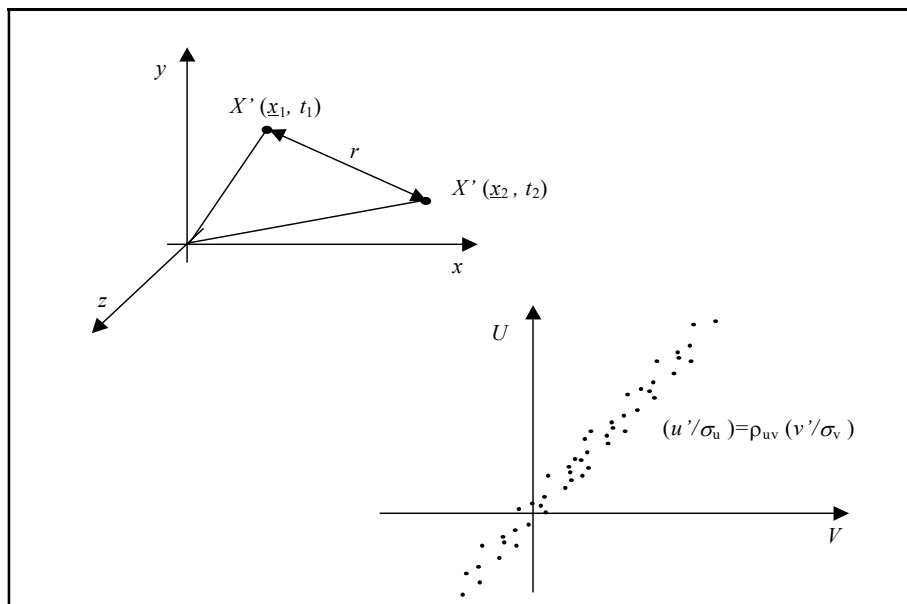


Figura 89. Posizione di due punti correlati e significato del coefficiente di correlazione.

Per entrambe queste funzioni (che hanno dimensioni pari al quadrato della grandezza  $X$ ) valgono le seguenti proprietà:

-sono funzioni simmetriche ( per esempio  $R(\tau) = R(-\tau)$ , infatti

$$R(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X'(t) X'(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T-\tau} X'(t') X'(t' + \tau) dt' = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X'(t) X'(t + \tau) dt = R(\tau)$$

essendo il fenomeno stazionario, e così' per l'autocorrelazione spaziale nell'ipotesi di omogeneità);

- introdotto il coefficiente di autocorrelazione:  $\rho_x(\tau) = R_x(\tau) / \sigma_x^2$  (e identicamente nel caso spaziale), valgono le seguenti proprietà:

$$-1 \leq \rho_x(\tau) \leq 1 \quad , \quad \rho_x(0) = 1 \quad , \quad \rho_x(\infty) \rightarrow 0$$

(infatti, quando  $X'(t+\tau)$  è esattamente uguale a  $\pm X'(t)$ , il numeratore in  $\rho_x(\tau)$  sarà esattamente uguale al denominatore ed il valore numerico sarà uguale a  $\pm 1$ ; in particolare per  $\tau=0$  avremo che tutti i contributi sommati a numeratore saranno uguali proprio a  $\sigma_x^2$  e quindi  $\rho_x(0) = 1$ ; per  $\tau \rightarrow \infty$ , a meno che il segnale non sia periodico, il contributo medio sarà nullo perchè ogni prodotto  $X'(t) X'(t+\tau)$  potrà essere positivo o negativo).

La forma risultante di un coefficiente di autocorrelazione sarà quindi come raffigurato in figura 90 (la tangente nell'origine è nulla come si dimostrerà nel seguito). In questa funzione è racchiusa una notevole informazione sulle caratteristiche del segnale (e quindi del campo misurato). In particolare, si farà riferimento al campo di velocità ( $X = \underline{U}$ ), ma le considerazioni saranno equivalenti per qualsiasi quantità misurata.

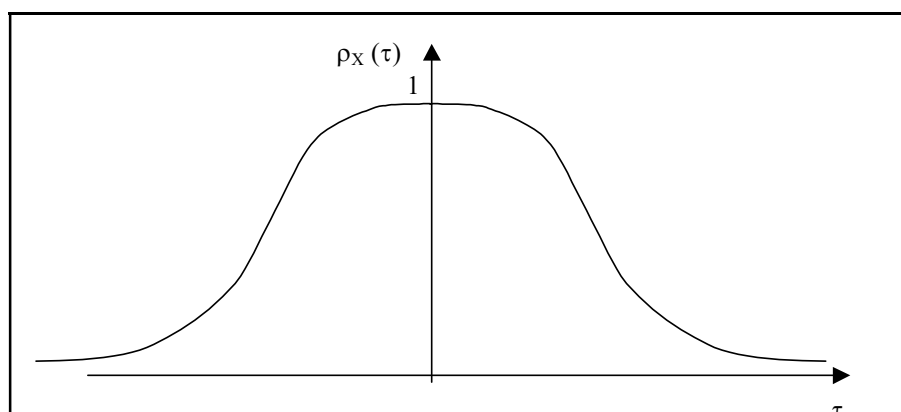


Figura 90. Forma caratteristica del coefficiente di auto-correlazione.

Per capire quali sono tali informazioni, si considerino le seguenti situazioni particolari:

- *flusso laminare:*

$$X'(t + \tau) = X'(t) \Rightarrow \rho_x(\tau) = 1 \text{ (massima correlazione);}$$

- *flusso oscillante sinusoidalmente:*

$$X'(t + \tau) = \text{sen}\left(\frac{2\pi(t + \tau)}{T_0}\right)$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi(t + \tau)}{T_0}\right) \right\} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \left\{ \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(2t + \tau)}{T_0}\right) \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right)$$

(essendo  $T \gg T_0$ , con  $T_0$  periodo del segnale)

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{sen}^2\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \left\{ 1 - \cos\left(\frac{4\pi t}{T_0}\right) \right\} dt = \frac{1}{2}, \quad \rho_x(\tau) = \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right),$$

cioè una correlazione oscillante a sua volta tra 1 (massima correlazione) e -1 (massima anticorrelazione);

- *impulso al tempo  $t_0$ :*

$$X'(t) = \delta(t - t_0), \quad X'(t + \tau) = \delta(t + \tau - t_0), \quad \rho_x(\tau) = \delta(\tau) \text{ (delta di Dirac}$$

nell'origine);

- *rumore:*

poiché  $X'(t + \tau)$  e  $X'(t)$  oscillano intorno allo zero in maniera del tutto casuale si ha che

$$\rho_x(\tau) = \delta(\tau).$$

Questi risultati sono riassunti nella figura 91.

Un segnale proveniente da un flusso in condizioni turbolente avrà un coefficiente di autocorrelazione con un comportamento intermedio tra questi: in particolare sarà più correlato di un impulso (rumore), ma meno correlato di una sinusoide.

E' bene notare che nel caso di un segnale di durata finita (*p.e.* da 0 a  $t_1$ ) la funzione di autocorrelazione è definita come:

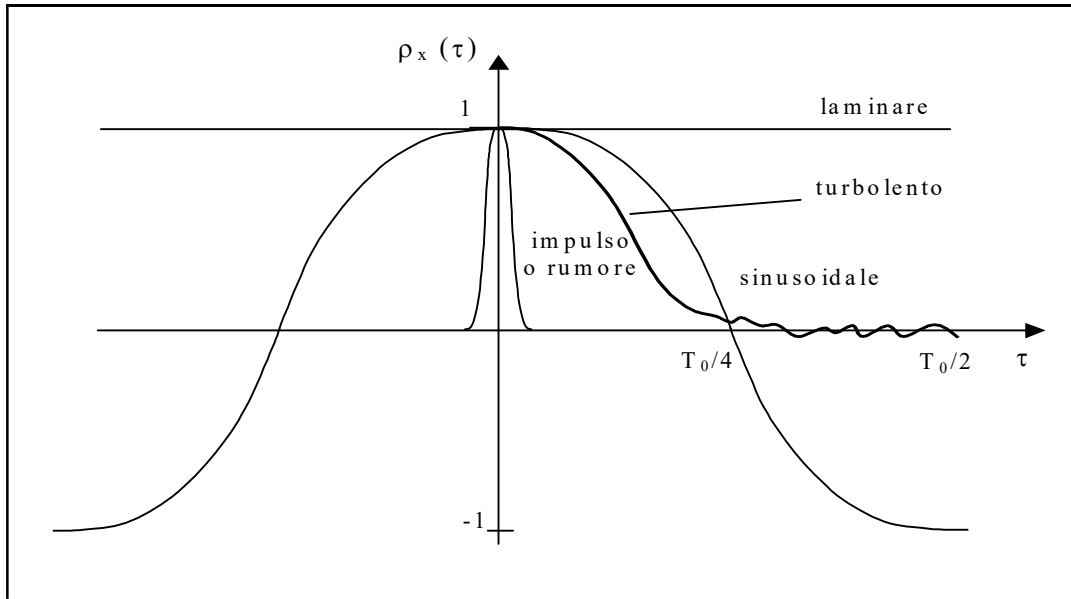


Figura 91. Andamento del coefficiente di auto-correlazione per differenti segnali.

$$R_x(\tau) = \frac{I}{(t_I - \tau)} \int_0^{t_I - \tau} X'(t)X'(t + \tau)dt$$

Da un punto di vista quantitativo, dalla funzione di auto-correlazione si possono derivare:

- l'intervallo temporale (o dimensione spaziale) massimo, detto anche *scala integrale*:

$$\tau_{0x} = \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau \quad , \quad L_i = \int_0^{\infty} \rho_x(r_i) dr_i$$

(dove nel caso spaziale  $r_i$  indica il generico asse ( $x$ ,  $y$  o  $z$ )); questa scala (nella quale l'integrale fino all'infinito é spesso sostituito dal punto nel quale  $\rho_x(\tau)$  raggiunge il primo zero o il primo minimo) é rappresentabile come quell'intervallo per il quale le due aree tratteggiate, rappresentate in figura 92, si equivalgono; in un flusso turbolento tale tempo (lunghezza) indica rispettivamente il tempo (dimensione) massimo caratteristico delle strutture vorticosi del campo di moto considerato (p.e. in un condotto sará  $L_i \approx d$ , essendo  $d$  la dimensione del condotto, e  $\tau_{0x} \approx L_x/U$ , essendo  $U$  la velocitá media nel condotto): tali strutture di larga scala sono quelle nelle quali viene immagazzinata l'energia applicata dall'esterno (moto medio, forzanti esterne) e sono quindi fortemente influenzate dalle condizioni specifiche del singolo esperimento;

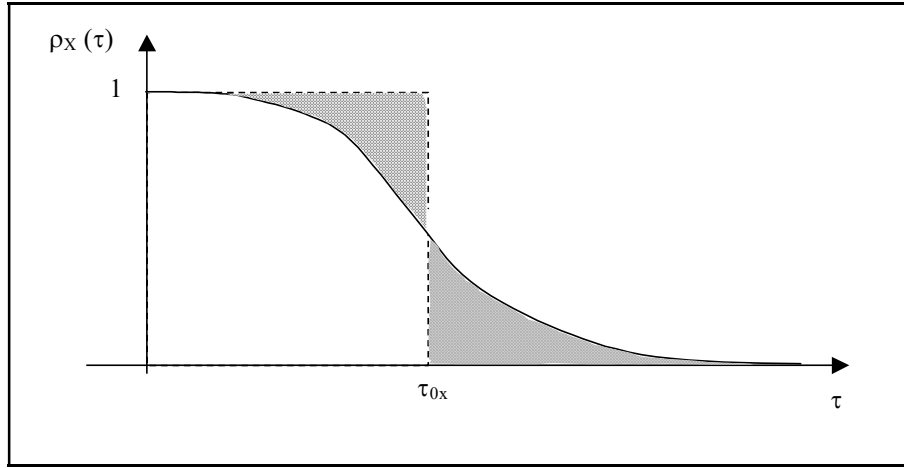


Figura 92. Significato della scala integrale.

- l'intervallo temporale (o dimensione spaziale) intermedio, detto anche *scala di Taylor*:

$$\tau_{\lambda_i} = \frac{\sqrt{2}\sigma_{u_i}}{\left[\left(\frac{\partial u_i'}{\partial t}\right)^2\right]^{1/2}}, \quad \lambda_i = \frac{\sqrt{2}\sigma_{u_i}}{\left[\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}}$$

che può essere derivata dall'interpolazione del coefficiente di autocorrelazione nei pressi dell'origine. Infatti, sviluppando in serie, (e ponendo  $u_i' = u'$ ):

$$u'(t + \tau) = u'(t) + \left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}\right)\tau^2 + o(\tau^3)$$

$$\overline{u'(t)u'(t + \tau)} \cong \overline{u'^2} + u'\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)\tau} + \frac{1}{2}\overline{u'\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}\right)\tau^2} = \sigma_u^2 - \frac{\tau^2}{2}\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)^2}$$

avendo assunto la stazionarietà ed essendo

$$\overline{u'\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}\right)} = \frac{1}{2}\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(2u'\frac{\partial u'}{\partial t}\right)} - \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)^2} = -\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)^2},$$

quindi, per il coefficiente di auto-correlazione,

$$\rho_x(\tau \cong 0) \approx 1 - \frac{\tau^2}{2\sigma_u^2}\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)^2} = 1 - \left(\frac{\tau}{\tau_\lambda}\right)^2$$

con  $\tau_\lambda$  definito come in precedenza (rappresenta l'intersezione con l'asse  $\tau$  della parabola che approssima il coefficiente di correlazione nell'origine (cfr. figura 93));

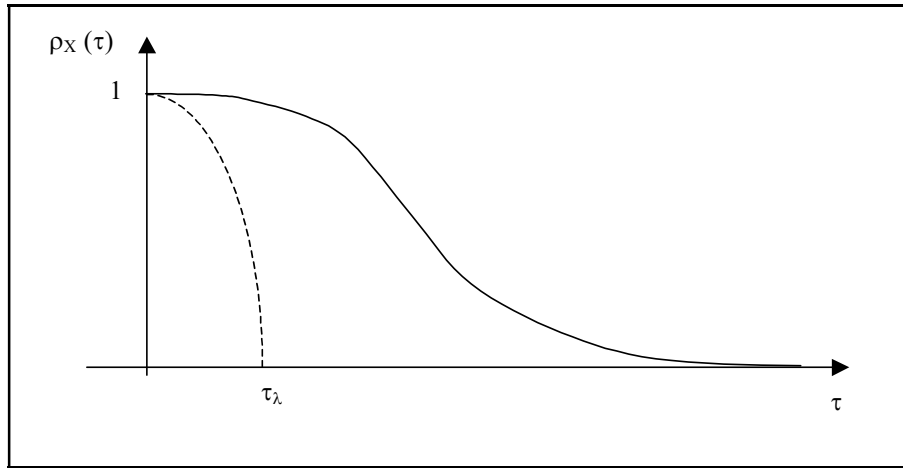


Figura 93. Significato della scala di Taylor.

di conseguenza, come detto, la tangente nell'origine del coefficiente di autocorrelazione assume valore nullo (stesse considerazioni valgono nel caso spaziale); la scala di Taylor ha valore inferiore di quella integrale (rappresentando uno sviluppo in prossimità dell'origine), e nella forma data dalla definizione è difficilmente valutabile (perché è necessario effettuare un'interpolazione quadratica dei dati dal coefficiente di autocorrelazione o valutare il valore quadratico medio delle derivate ed entrambe queste operazioni risentono fortemente del rumore nelle misure); di conseguenza si ricorre spesso all'espressione empirica:

$$\tau_\lambda \cong \frac{\sqrt{2}}{\pi N_0} \quad , \quad \lambda = \bar{U} \tau_\lambda$$

essendo  $N_0$  il numero di attraversamenti del livello zero del segnale di velocità fluttuante nell'unità di tempo ( $N_0 = N_{\text{tot}}/T$ , essendo  $N_{\text{tot}}$  il numero totale degli attraversamenti nel tempo  $T$ ); l'espressione precedente si può ricavare esattamente per il caso di un segnale sinusoidale oscillante  $u' = A \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

$$\overline{u'^2} = \sigma_u^2 = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \text{sen}^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{A^2}{2} \quad , \quad \overline{\left(\frac{du'}{dt}\right)^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{2A\pi}{T}\right)^2 \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{2A\pi}{T}\right)^2 \quad ,$$

ed essendo il numero di zeri per unità di tempo  $N_0 = 2/T$ , si ha



$$N_0 = \frac{\left[ \overline{\left( \frac{du'}{dt} \right)^2} \right]^{1/2}}{\pi \sigma_u} \quad \text{e} \quad \tau_\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\pi N_0} ;$$

la scala di Taylor rappresenta il centro dell'intervallo di strutture vorticosi intermedie, cosiddette universali, la cui dinamica é in effetti poco influenzata sia dai meccanismi relativi alle scale maggiori (integrali), sia da quelli relativi alle scale più piccole dissipative (si veda la parte relativa agli spettri).

- l'intervallo temporale (o dimensione spaziale) minimo o *scala dissipativa di Kolmogorov*:

$$\tau_\eta = \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}, \quad \eta = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}$$

essendo  $\varepsilon$  l'energia cinetica media dissipata:

$$\varepsilon = \nu \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)} \stackrel{(1)}{\cong} 15 \nu \overline{\left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} \stackrel{(2)}{\cong} \frac{15 \nu}{U^2} \overline{\left( \frac{\partial u'}{\partial t} \right)^2}.$$

(dove nelle ultime due relazioni si è fatto uso dell'ipotesi di omogeneità e isotropia della turbolenza, (1), e dell'ipotesi della turbolenza congelata o di Taylor per la quale  $U (\partial/\partial x) = \partial/\partial t$  cioè il trasporto delle fluttuazioni nello spazio equivale alle fluttuazioni temporali, (2)); tali scale sono quelle alle quali avviene la dissipazione viscosa dell'energia e costituiscono quindi il limite inferiore dell'intervallo di strutture vorticosi (strutture di piccola scala): infatti, per queste scale il numero di Reynolds é unitario e quindi le forze viscosi sono mediamente uguali a quelle di inerzia:

$$Re_\eta = \frac{\eta V_\eta}{\nu} = \frac{\eta \eta}{\nu \tau_\eta} = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \left( \frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} \frac{1}{\nu} = 1.$$

É possibile mettere in relazione tra loro le scale definite in precedenza. Dalle equazioni di Navier - Stokes imponendo l'uguaglianza tra termini inerziali e viscosi, si ha:

$$U_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \cong \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}$$

che dimensionalmente può essere scritta come:

$$\frac{U^2}{L} \cong \frac{\nu U}{\lambda^2}$$

(essendo  $L$  riferita a termini inerziali forzanti e  $\lambda$  riferita alle derivate). Quindi,

$$\frac{L}{\lambda} \cong \left( \frac{LU}{\nu} \right)^{1/2} = Re^{1/2}. \quad (3.5)$$

Così, considerando l'equilibrio tra produzione e dissipazione di energia cinetica turbolenta

$$U_i \frac{\partial U^2}{\partial x_i} \cong \varepsilon,$$

cioè dimensionalmente  $\varepsilon \approx U^3/L$ , e quindi

$$\eta \cong \left( \frac{L\nu^3}{U^3} \right)^{1/4} = L \left( \frac{\nu^3}{L^3 U^3} \right)^{1/4} = \frac{L}{Re^{3/4}} \quad \text{cioè}$$

$$\frac{L}{\eta} \cong Re^{3/4} \quad \text{e} \quad \frac{\lambda}{\eta} \cong Re^{1/4} \quad (3.6)$$

(quest'ultima relazione ci porta anche a determinare il cosiddetto numero di Reynolds  $Re_\lambda$ , dove

$$Re_\lambda \equiv \frac{\sigma_u \lambda}{\nu} \cong \frac{\sigma_u}{U} \left( \frac{UL}{\nu} \right) \frac{\lambda}{L} \cong I Re^{1/2}$$

essendo  $I = \sigma_u/U$  l'intensità turbolenta). Gli andamenti (3.5) e (3.6) sono riassunti nella figura 94.

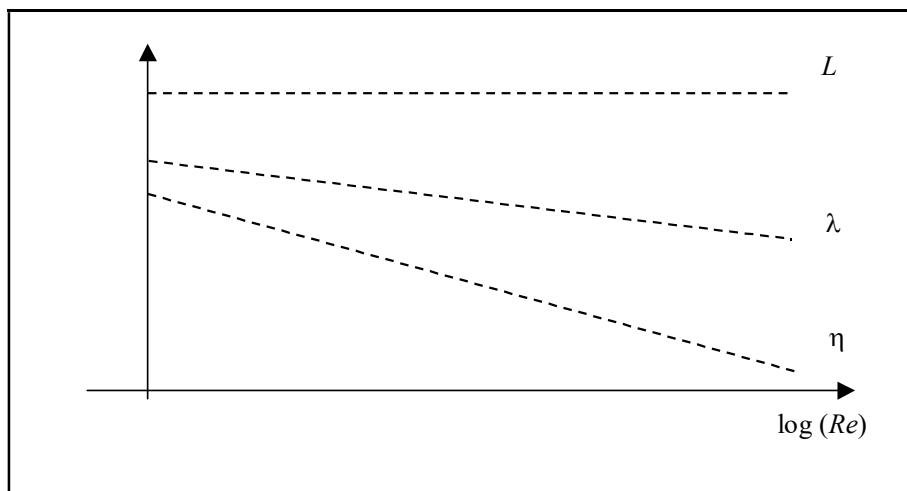


Figura 94. Andamento delle scale della turbolenza con il numero di Reynolds.

#### 4.2.5 Funzione di cross-correlazione

La funzione e il coefficiente di auto-correlazione forniscono informazioni sulle variazioni temporali o spaziali della grandezza in esame, ma non dicono nulla sulla relazione tra differenti grandezze (p.e. può essere più interessante in una struttura vorticoso conoscere la relazione tra le fluttuazioni di due componenti di velocità diverse piuttosto che della stessa componente). Si introduce, a questo scopo, la funzione di cross-correlazione:

$$R_{xy}(\underline{x}_1, \underline{r}, t_1, \tau) = E[X'(\underline{x}_1, t_1)Y'(\underline{x}_2, t_2)] = E[X'(\underline{x}_1, t_1)Y'(\underline{x}_1 + \underline{r}, t_2 + \tau)]$$

per la quale valgono le stesse considerazioni sui campi di moto fatte in precedenza. Si potranno quindi definire la funzione di cross-correlazione puramente temporale (caso omogeneo e stazionario) e puramente spaziale:

$$R_{xy}(\tau) = \overline{X'(t)Y'(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X'(t)Y'(t+\tau) dt$$

$$R_{xy}(\underline{r}) = \overline{X'(\underline{x})Y'(\underline{x} + \underline{r})} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X'(\underline{x})Y'(\underline{x} + \underline{r}) dt$$

e il coefficiente di cross-correlazione:

$$\rho_{xy}(\tau) = R_x(\tau) / (\sigma_x \sigma_y)$$

(e lo stesso nel caso spaziale). Per le funzioni di cross-correlazione valgono le seguenti proprietà:

- non sono funzioni simmetriche; per esempio nel caso temporale:

$$R_{xy}(-\tau) = \overline{X'(t)Y'(t-\tau)} = \overline{X'(t'+\tau)Y'(t')} = R_{yx}(\tau);$$

- il coefficiente di cross-correlazione oscilla tra -1 e 1, e tende a zero per intervalli molto grandi, ma non vale 1 nell'origine;

- di conseguenza, esistono le disuguaglianze:

$$E^2[X'Y'] \leq E[X']E[Y'], \quad R_{xy}^2(\tau) \leq R_x(0)R_y(0) = \sigma_x^2 \sigma_y^2$$

(dove l'uguaglianza vale quando  $X'$  e  $Y'$  sono completamente correlati e per  $X' \equiv Y'$  si ha  $R_x(\tau) \leq R_x(0) = \sigma_x^2$ ).

Ne consegue un andamento come quello riportato in figura 95.

Se, per esempio, si ha un impulso al tempo  $t_0$  ( $X' = \delta(t-t_0)$ ) e uno al tempo  $t_0 + \tau_0$  ( $Y' = \delta(t-t_0-\tau_0)$ ), allora:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \delta(\tau - \tau_0) \quad , \quad \sigma_x = \sigma_y = \left(\frac{1}{T}\right)^{1/2} \quad , \quad \rho_{xy}(\tau) = \delta(\tau - \tau_0)$$

cioè abbiamo informazioni sull'eventuale sfasamento temporale tra un segnale e l'altro. In questo esempio la determinazione del picco del coefficiente di cross-correlazione permette la determinazione dell'intervallo  $\tau_0$  (e abbiamo già visto, nella descrizione della tecnica PIV, che tale intervallo temporale nel caso spaziale, diventa uno spostamento e che l'indagine della funzione di cross-correlazione permette la determinazione di tale spostamento).

Se invece si ha  $X' = \text{sen}(2\pi t/T_0)$  e  $Y' = \text{sen}[(2\pi t/T_0) + \varphi]$ , allora

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T_0} + \varphi\right) \quad , \quad \sigma_x = \sigma_y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \quad , \quad \rho_{xy}(\tau) = \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T_0} + \varphi\right)$$

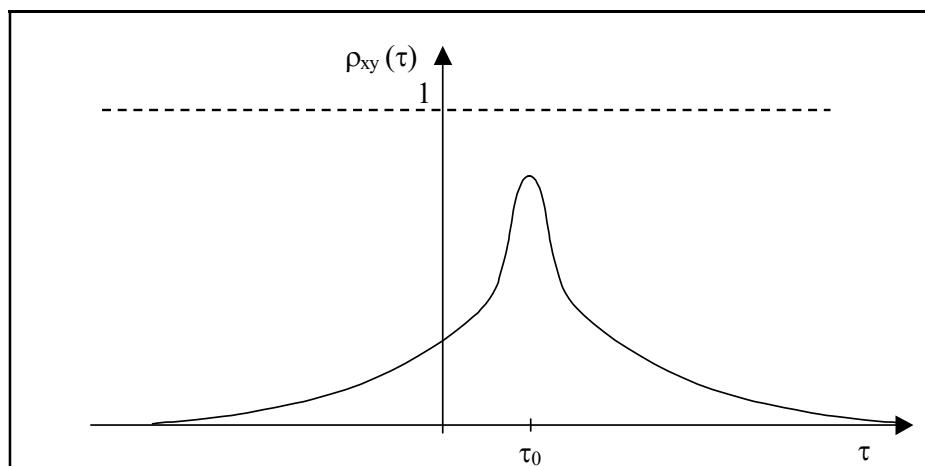


Figura 95. Forma caratteristica del coefficiente di cross-correlazione.

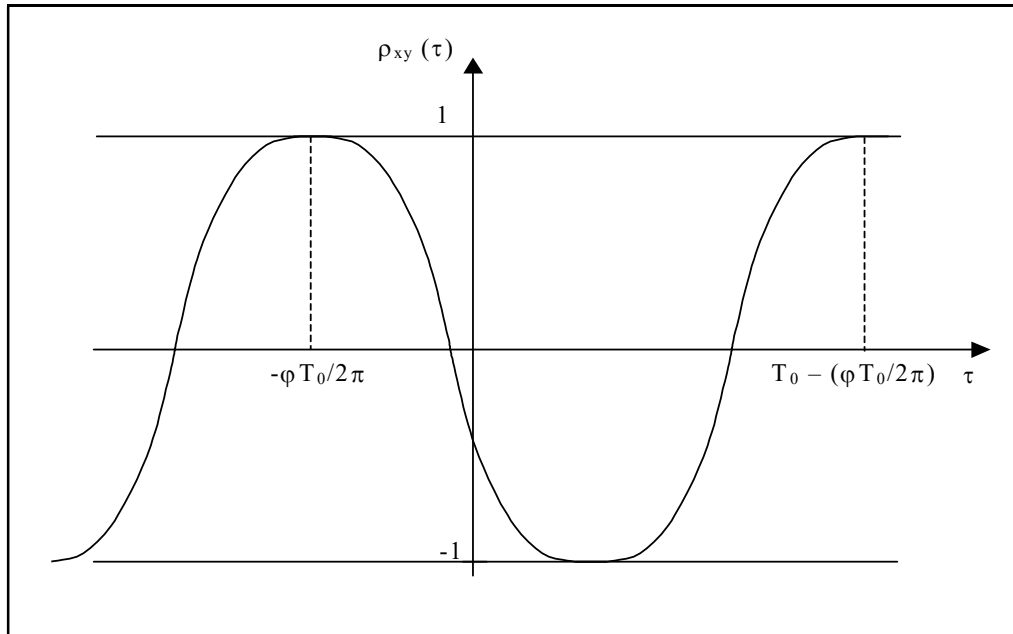


Figura 96. Andamento del coefficiente di cross-correlazione per due segnali sfasati uno rispetto all'altro.

L'andamento risultante è riportato in figura 96; come si può osservare la funzione non è più simmetrica rispetto all'origine e

$$\rho_{yx}(\tau) = \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T_0} - \varphi\right).$$

Questa situazione è simile a quella che si incontra quando consideriamo una struttura vorticoso che si muove e passa nel punto di misura. Considerando  $X'=u'$  e  $Y'=v'$ , la misura del massimo di cross-correlazione permette la determinazione del periodo  $T_0$  della struttura. La quantità  $\overline{u'v'}$  è il tensore di Reynolds e costituisce quindi una quantità osservabile di primaria importanza.

#### 4.2.6 Funzione di convoluzione

Prima di concludere la parte relativa all'analisi dei segnali nel tempo, è necessario introdurre la funzione di convoluzione temporale:

$$G_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X'(t')Y'(t-t')dt' = X'*Y'$$

che è utilizzata per analizzare la relazione tra un segnale in ingresso ad un sistema fisico ( $X'$ ) e la risposta di tale sistema ad un impulso nell'origine ( $Y'$ ): in questo caso la funzione  $G$  sarà la risposta

complessiva del sistema. Se, ad esempio, il sistema risponde ad un impulso al tempo 0 con un altro impulso ritardato al tempo  $t_0$  ( $Y' = \delta(t - t_0)$ ), allora:

$$G_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X'(t')\delta(t - t_0 - t')dt' = X'(t - t_0)$$

cioè la convoluzione corrisponde in questo caso al segnale stesso spostato nel tempo (cioè ritardato) di  $t_0$  e quindi il sistema fisico funziona come un semplice ritardatore (in questo caso il sistema fisico permette al segnale di conservare le sue fluttuazioni di lungo e corto periodo) (*cf.* figura 97).

Se, all'estremo opposto, il sistema reagisce ad un impulso con un segnale costante (cioè allarga l'impulso con una risposta costante) tra  $t_1$  e  $t_2$  ( $Y' = 0$  per  $t < t_1$  o per  $t > t_2$  e  $Y' = 1$  per  $t_1 \leq t \leq t_2$ ), allora:

$$G_{xy}(t) = \int_{t-t_2}^{t-t_1} X'(t')dt' = \text{cost}$$

cioè per qualsiasi segnale in ingresso il sistema fornisce un uscita costante (pari al valor medio del segnale  $X'$  tra  $t_1$  e  $t_2$ ). Si noti che variando  $t_1$  e  $t_2$  è possibile "esplorare" differenti regioni del segnale  $X'(t')$  e che se in una di queste c'è un'oscillazione su tempi brevi (rispetto a  $t_2 - t_1$ ), allora la costante è circa zero, se invece c'è un'oscillazione su tempi lunghi (rispetto a  $t_2 - t_1$ ) allora la costante è significativamente diversa da zero (*cf.* figura 97).

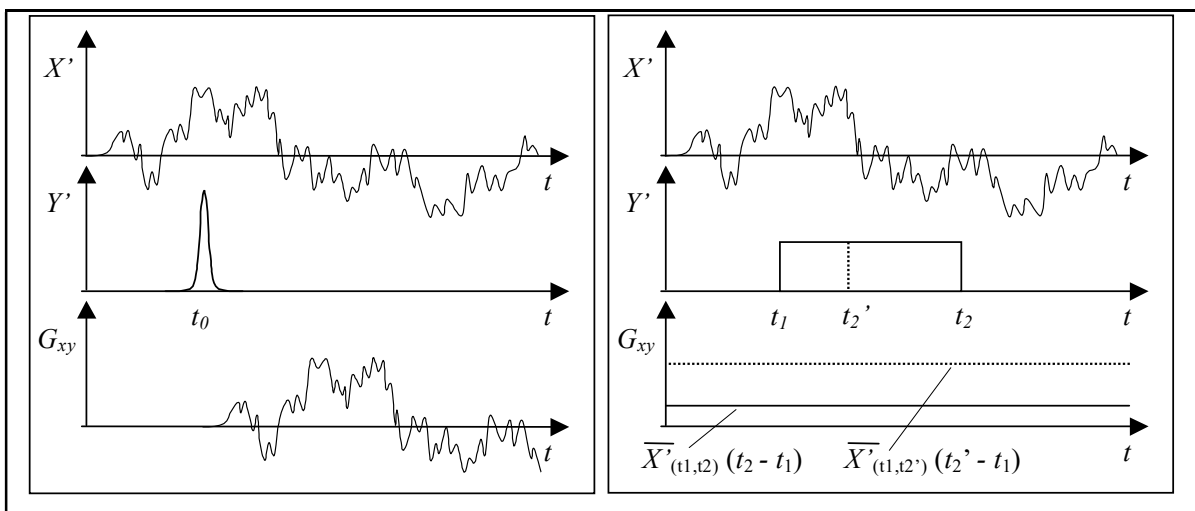


Figura 97. Funzione di convoluzione nel caso di risposta ad impulso (a sinistra) e costante (a destra).

Nel caso generico ci si troverà in una posizione intermedia nella quale il segnale conserva soprattutto le sue caratteristiche relative alle oscillazioni sui tempi più lunghi.

Si noti che l'espressione della funzione di convoluzione ci permette anche di dire che l'auto-correlazione rappresenta (a meno della normalizzazione  $T$ ) una convoluzione del segnale con il segnale stesso ribaltato nel tempo:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X'(t) X'(-t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X'(t') X'(\tau - t') dt' = \frac{1}{T} G_{xx}(\tau)$$

(prendendo il limite per  $T$  all'infinito e considerando il segnale diverso da 0 solo per  $t \geq 0$ ).

#### 4.2.7 Trasformata di Fourier e funzione densità spettrale

Le funzioni di correlazione permettono la individuazione del legame temporale (o spaziale), ma non permettono di chiarire le modalità con cui queste variazioni si susseguono nel tempo. A tale scopo, è necessario indagare le variazioni temporali tramite la trasformata di Fourier.

È noto che una funzione periodica continua (definita in maniera completa dal suo andamento nel periodo  $T_1$ ) può essere sviluppata in serie di Fourier, cioè come una somma di componenti sinusoidali a frequenze equispaziate  $\nu_k = k \nu_1 = k/T_1$  (con  $k$  intero anche negativo):

$$X'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k'(v_k) e^{i2\pi v_k t}$$

dove le sue componenti sono date da:

$$X_k'(v_k) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} X'(t) e^{-i2\pi v_k t} dt.$$

Nel dominio  $\nu$  ciascuna di queste  $X_k$  possiede un modulo quadro e una fase (o una parte reale ed immaginaria) (cfr. figura 98) e indicando con l'asterisco il complesso coniugato:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_x(v_k) = (X_k' X_k'^*) = [\operatorname{Re}^2(X_k') + \operatorname{Im}^2(X_k')] \\ \Phi_x(v_k) = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{Im}(X_k')}{\operatorname{Re}(X_k')} \right] \end{array} \right\}$$

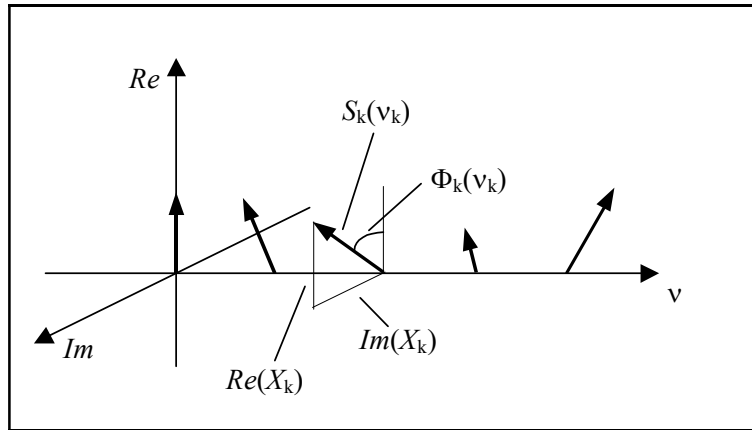


Figura 98. Rappresentazione della serie di Fourier nel piano reale-immaginario.

Se il segnale contiene una componente preponderante alla frequenza  $\nu_0$ , allora l'integrale sarà diverso da zero solo quando  $\nu_0 = \nu_k$ . L'asse delle frequenze sarà diviso in intervalli regolari equispaziati separati di una quantità pari a  $1/T_1 = (\nu_{k+1} - \nu_k) = \Delta\nu$ .

Si noti inoltre che, se la funzione  $X(t)$  è reale (come è di solito il caso), allora, considerando le componenti alle frequenze  $\nu_k$  e  $-\nu_k$ , la parte reale resta invariata, mentre la parte immaginaria cambia segno e quindi il modulo resta invariato mentre la fase è opposta e quindi  $X_k(-\nu_k) = X_k^*(\nu_k)$ . Questo significa che la fase per  $\nu_k = 0$  deve essere zero e l'integrale di Fourier fornisce una funzione reale (componente continua). Infine la serie di Fourier è un operatore lineare.

È possibile estendere le considerazioni precedenti al caso di segnali non periodici, effettuando il limite per  $T_1 \rightarrow \infty$  (nel qual caso lo spazio tra le armoniche tende a zero,  $k\nu_1$  tende a  $\nu$  (e quindi  $1/T_1 = \Delta\nu \rightarrow d\nu$ ) e la somma tende ad un integrale) e definire le relazioni:

$$X'(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-i2\pi\nu t} dt \quad \text{trasformata di Fourier diretta}$$

$$X'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X'(\nu)e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad \text{trasformata di Fourier inversa}$$

Anche in questo caso si può costruire nel dominio  $\nu$  (questa volta continuo) il modulo e la fase della  $X(\nu)$ . Il sistema continuo di funzioni  $e^{i2\pi\nu t}$  costituisce una base ortonormale. La trasformata di Fourier (come la serie) è inoltre un operatore lineare (la trasformata della somma è pari alla somma delle trasformate).

Se invece si considera la convoluzione  $X'(t) = G_{xy}(t)$  e ne consideriamo la trasformata:



$$\begin{aligned}
G_{xy}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{xy}(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} X'(t') Y'(t-t') dt' \right) e^{-i2\pi\nu t} dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X'(t') \left( \int_{-\infty}^{\infty} Y'(t-t') e^{-i2\pi\nu t} dt \right) dt' = \int_{-\infty}^{\infty} X'(t') \left( \int_{-\infty}^{\infty} Y'(t'') e^{-i2\pi\nu t''} dt'' \right) e^{-i2\pi\nu t'} dt' = X(\nu) Y(\nu)
\end{aligned}$$

cioè è uguale al prodotto delle trasformate (se scambiamo  $\nu$  con  $t$  abbiamo anche che il prodotto nel tempo equivale ad una convoluzione nel dominio della frequenza, cioè che la trasformata di un prodotto (nel tempo) equivale ad una convoluzione in frequenza):

Convoluzione nel tempo  $\Leftrightarrow$  prodotto in frequenza

Prodotto nel tempo  $\Leftrightarrow$  convoluzione in frequenza

Si può inoltre dimostrare che l'integrale del quadrato del modulo di una funzione nel tempo è uguale all'integrale del quadrato del modulo della sua trasformata:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|X'(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \|X'(\nu)\|^2 d\nu \quad (\text{Teorema di Parseval})$$

Si è anche descritta (nel metodo PIV) la relazione esistente tra funzione di correlazione e spettro (relazione di Wiener-Khintchine):

$$\begin{aligned}
S_x(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \\
R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu
\end{aligned}$$

Infatti la trasformata della funzione di autocorrelazione (che come visto è esprimibile come il prodotto di convoluzione del segnale con se stesso ribaltato) può essere espressa come:

$$X(\nu) X(-\nu) = X(\nu) X^*(\nu) = S_x(\nu)$$

e così' per la trasformata inversa.

Lo spettro è quindi la trasformata di Fourier della funzione di auto-correlazione e quest'ultima è la antitrasformata dello spettro. Essendo la  $R_x(\tau)$  una funzione simmetrica, si può scrivere che  $S_x(\nu) = S_x(-\nu)$  e quindi:

$$S_x(\nu) = -\int_{-\infty}^0 R_x(-\tau)e^{j2\pi\nu\tau}d\tau + \int_0^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}d\tau = \int_0^{\infty} R_x(\tau)(e^{j2\pi\nu\tau} + e^{-j2\pi\nu\tau})d\tau = 2\int_0^{\infty} R_x(\tau)\cos(2\pi\nu\tau)d\tau$$

$$R_x(\tau) = 2\int_0^{\infty} S_x(\nu)\cos(2\pi\nu\tau)d\nu$$

Se al posto della funzione di auto-correlazione si considera il coefficiente di auto-correlazione, allora avremo lo spettro normalizzato. Inoltre valgono le seguenti relazioni particolari:

$$S_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)d\tau = \sigma_x^2\tau_{0_x}$$

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\nu)d\nu = \sigma_x^2$$

(lo spettro normalizzato avrà integrale pari a 1 e valore in zero pari alla scala integrale temporale).

Di conseguenza, si può calcolare lo spettro in due modalità:

- direttamente dal segnale tramite trasformata di Fourier e calcolo del modulo quadro (metodo diretto);

- passando per la funzione di auto-correlazione e facendone la trasformata di Fourier e poi calcolando il doppio della parte reale (metodo indiretto),

(e similmente per il calcolo della funzione di correlazione (metodo diretto o indiretto)).

Il calcolo della funzione di correlazione risulta sempre più lento (in quanto richiede  $N \times N$  operazioni, rispetto alle  $N \times \log N$  di una FFT), ma ha il vantaggio di rappresentare una media e quindi di essere statisticamente più affidabile.

Quanto descritto in precedenza per lo spettro nel dominio della frequenza vale anche per lo spettro nel dominio dei numeri d'onda,  $k_i = \frac{2\pi}{x_i}$ , pur di sostituire  $2\pi\nu$  con  $k_i$  e  $t$  con  $x_i$  (ma in questo

caso nell'espressione della trasformata diretta compare un termine  $1/2\pi$ ).

Si considerino le seguenti situazioni particolari:

- flusso laminare:  $X(t) = cost$ ,  $X'(t) = 0$ ,  $X'(v) = 0$ ,  $S_x(v) = 0$ ,  $\Phi_x(v) = 0$

- flusso sinusoidale:  $X'(t) = \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$ ,  $X'(v) = \frac{1}{2i} \left[ \delta\left(v - \frac{1}{T_0}\right) - \delta\left(v + \frac{1}{T_0}\right) \right]$ ,

$$S_x(v) = \frac{I}{4} \left[ \delta\left(v - \frac{1}{T_0}\right) - \delta\left(v + \frac{1}{T_0}\right) \right]^2, \quad \Phi_x(v) = \frac{\pi}{2}$$

(per un coseno si avrebbe una fase pari a 0)

- impulso al tempo  $t_0$ :  $X(v) = e^{-i2\pi vt_0}$ ,  $S_x(v) = 1$ ,  $\Phi_x(v) = 2\pi vt_0$

- impulso tra  $-t_0$  e  $t_0$ :  $X(v) = \frac{\text{sen}(2\pi vt_0)}{2\pi vt_0}$ ,  $S_x(v) = X(v)X^*(v)$ ,  $\Phi_x(v) = 0$

- rumore:  $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau)$ ,  $S_x(v) = \sigma_x^2$ ,  $\Phi_x(v) = 0$

Lo spettro da quindi informazioni sulla distribuzione dell'energia alle diverse frequenze (*cf.* figura 99). Si può affermare che un segnale turbolento avrà uno spettro che tenderà a zero alle bassissime frequenze (componente continua), per poi salire alle frequenze intermedie e poi riscendere a quelle elevate. Questo é facilmente determinabile dal legame con la funzione di auto-correlazione (*cf.* figura 100).

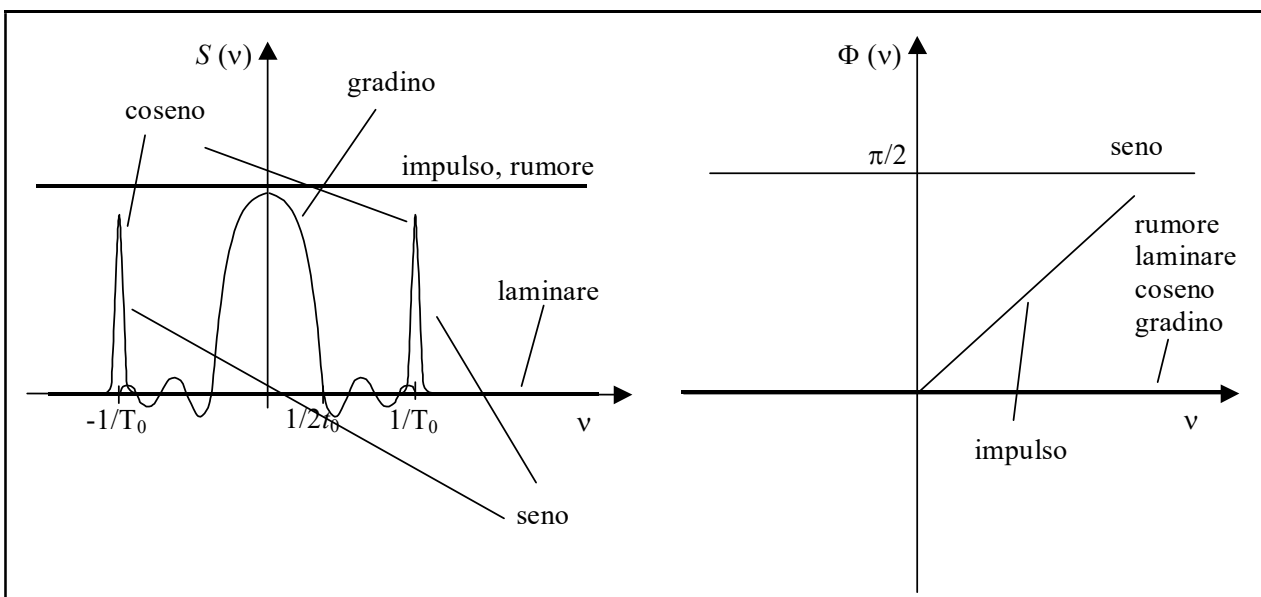


Figura 99. Modulo e fase della densità spettrale di alcuni segnali.

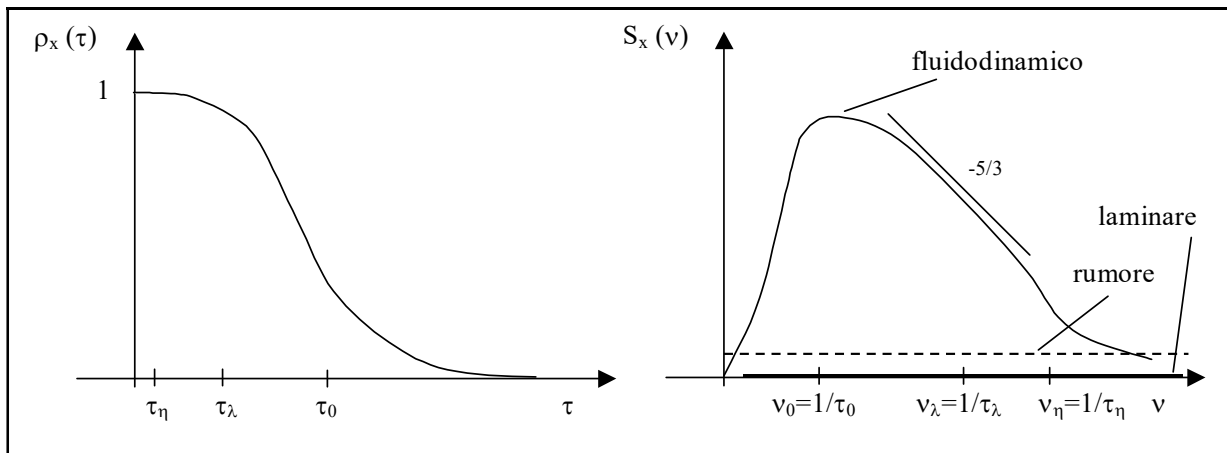


Figura 100. Coefficiente di auto-correlazione e densità spettrale: scale significative.

Vi è una corrispondenza inversa tra le scale temporali e le scale nel dominio della frequenza (e allo stesso modo tra scale spaziali e scale nel dominio dei numeri d'onda); valgono anche le stesse considerazioni per i rapporti tra le scale in frequenza rispetto al numero di Reynolds. A questo proposito, bisogna tenere presente un risultato fondamentale ottenuto da Kolmogorov: nell'intervallo di scale intermedie (cioè dell'ordine della scala di Taylor, detta scala inerziale) e a numeri di Reynolds abbastanza elevati (tali da avere un'ampia separazione tra scale integrali e di Kolmogorov), la dinamica delle strutture vorticosi è interamente descritta dai parametri  $\varepsilon$  e  $k$  e dall'analisi dimensionale si ottiene che:

$$S_u(k) \approx k^{-5/3} \varepsilon^{2/3}$$

(lo spettro in frequenza darebbe:  $S_u(v) \approx v^{-5/3}$ ).

Così come per la funzione di correlazione, anche per lo spettro è possibile introdurre una funzione che dia informazioni sulle relazioni reciproche tra due segnali. Il cross-spettro è definito come:

$$S_{xy}(v) = X(v)Y^*(v) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-i2\pi vt} dt \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)e^{i2\pi vt} dt$$

(che non è una funzione puramente reale ma possiede parte reale e immaginaria) e valgono relazioni tra le funzioni di cross-correlazione ed il cross-spettro del tipo:

$$S_{xy}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu$$

ma questa volta  $R_{xy}$  non è una funzione simmetrica e quindi anche  $S$  non lo sarà:

$$S_{xy}(-\nu) = S_{yx}(\nu) = S_{xy}^*(\nu).$$

#### 4.2.8 Campionamento

Nella realtà i segnali non sono continui ma provengono da una catena di misura (o da simulazioni numeriche) che fornisce una sequenza di dati nel tempo (o nello spazio) cioè abbiamo dati discreti. Questi dati possono essere equispaziati (come nel caso di campionamento con una scheda di acquisizione di un segnale HWA o LDA da un tracker o nel caso di dati da un sistema PIV) o campionati casualmente (come nel caso dei dati in uscita da un processore LDA counter o BSA o nel caso dei dati PTV). In quest'ultima situazione sarà necessario fornire in uscita anche il valore dell'intervallo temporale.

Le funzioni precedenti possono facilmente essere estese al caso di segnali campionati (si farà l'esempio nel tempo):

- momenti statistici (campionamento casuale):  $\overline{X^n} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^n \Delta t_i$

- momenti statistici (campionamento equispaziato):  $\overline{X^n} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^n$

(essendo  $T = \sum_{i=1}^N \Delta t_i$  che nel caso equispaziato è pari a  $N\Delta t$ ).

- funzioni di correlazione (campionamento equispaziato):  $R_{xy} = \frac{1}{(N-j)} \sum_{i=1}^{N-j} X_i Y_{i+j}$

(la determinazione delle funzioni di correlazione da dati casuali è molto più complessa).

Per quello che riguarda l'andamento della densità spettrale, bisogna considerare che ci si trova in pratica nella situazione analoga a quella della serie di Fourier (scambiando il ruolo di tempo e frequenza); in questo caso, la serie discreta di dati nel tempo fornisce una funzione continua e periodica in frequenza:

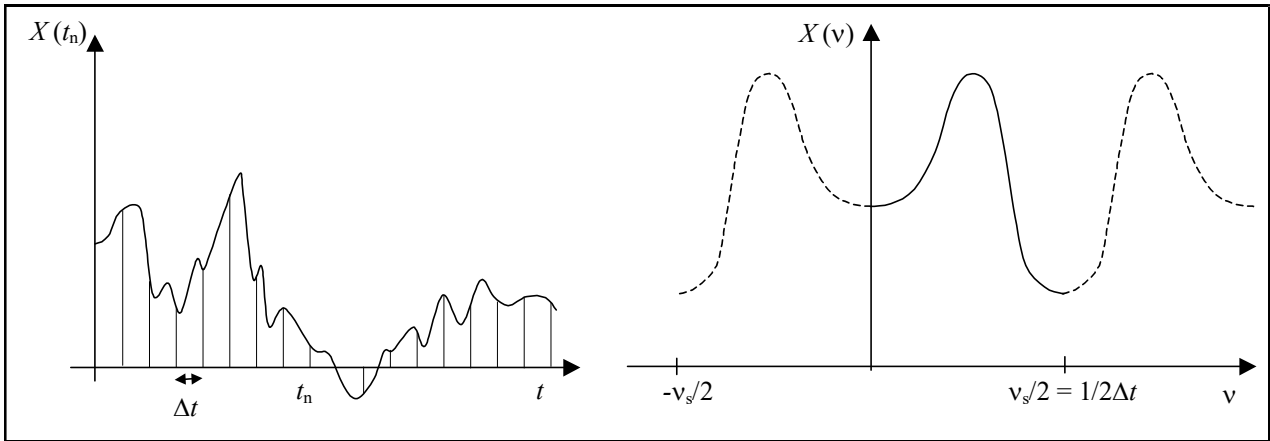


Figura 101. Trasformata di Fourier relativa a un segnale campionato nel tempo.

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n(t_n) e^{-i2\pi v n \Delta t} \quad t_n = n \Delta t$$

$$X_n(t_n) = \frac{1}{v_s} \int_{-v_s/2}^{v_s/2} X(v) e^{i2\pi v n \Delta t} dv \quad v_s = \frac{1}{\Delta t}$$

cioè otteniamo una funzione continua e periodica nel dominio della frequenza (*cfr.* figura 101). Dalla figura precedente si può notare che la periodicità della trasformata in frequenza limita l'analisi della frequenza al valore  $v_s/2$  (frequenza di Nyquist e problema dell'aliasing); è quindi necessario che la massima frequenza di tipo fluidodinamico ( $v_\eta$ ) sia inferiore a questo valore. Di solito questo non è possibile (o almeno è molto difficile) dato l'elevato valore di  $v_\eta$  e l'impossibilità pratica di avere dati nel tempo con intervallo  $\Delta t$  molto piccolo (e quindi  $v_s$  molto grande). Questa limitatezza nella conoscenza della trasformata (e quindi dello spettro) nasce dalla mancanza di informazioni nell'intervallo  $\Delta t$  tra un dato ed il seguente e concentra nell'intervallo  $(0, v_s/2)$  tutto ciò che c'è negli intervalli successivi (c'è cioè un vero e proprio ribaltamento intorno a  $v_s/2$ ). Bisogna inoltre considerare che il ribaltamento intorno alla frequenza  $v_s/2$  provoca un'alterazione dello spettro in prossimità di  $v_s/2$  (ma anche fino a frequenze minori) che va eliminata per esempio utilizzando un filtro anti - aliasing (cioè un filtro passa-basso) prima di effettuare il campionamento.

Spesso per calcolare la trasformata di Fourier si usano algoritmi FFT che permettono la determinazione di un numero discreto e non continuo di frequenze. In questo caso abbiamo la cosiddetta trasformata di Fourier discreta:

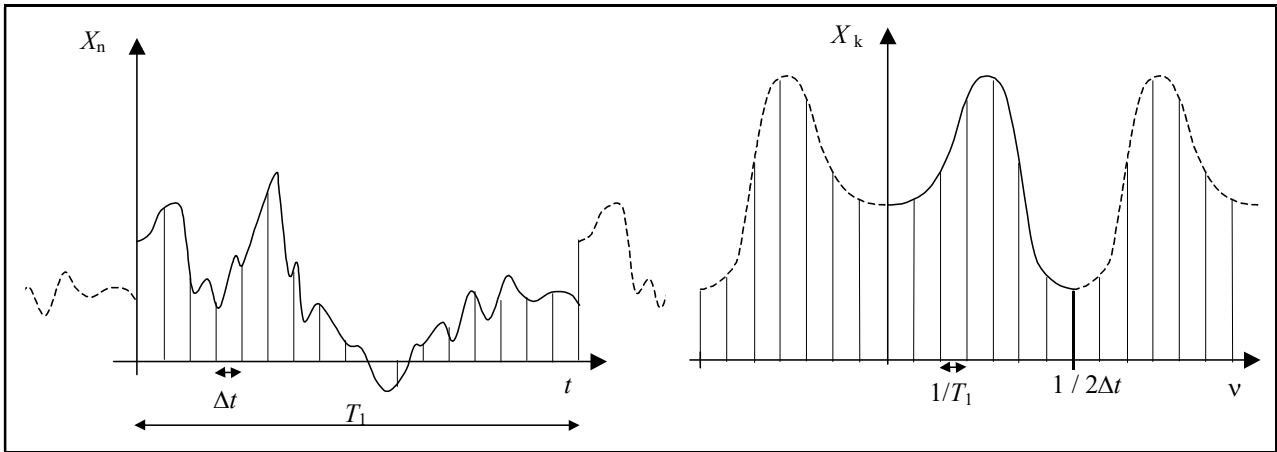


Figura 102. Rappresentazione del risultato di applicazione dell'algoritmo di FFT.

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-i \frac{2\pi kn}{N}} \quad \text{trasformata discreta diretta}$$

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi kn}{N}} \quad \text{trasformata discreta inversa}$$

(essendo  $\nu_k = \frac{k}{T_1}$ , con  $T_1$  durata del segnale,  $t_n = n\Delta t$  e  $N = \frac{T_1}{\Delta t}$ ).

Questa volta la situazione è discreta e periodica in entrambi i domini come rappresentato in figura 102. Dalle figure precedenti è chiaro che per aumentare la risoluzione in frequenza (cioè diminuire l'intervallo tra i punti nel dominio frequenza) è necessario avere un tempo  $T_1$  quanto più lungo possibile, mentre per aumentare la massima frequenza osservabile ( $\nu_s/2$ ) è necessario effettuare il campionamento con  $\Delta t$  il più piccolo possibile.

Per migliorare la risoluzione in frequenza è possibile allungare artificialmente la sequenza dei dati nel tempo: questa operazione va effettuata senza aggiungere alcuna informazione (o alcuna energia) al segnale. Di conseguenza, la scelta migliore è quella di aggiungere degli zeri al segnale nel tempo ("zero padding") in modo da aumentare il tempo  $T_1$  (la tecnica è a volte usata anche per portare la sequenza di dati ad una lunghezza che sia un multiplo di 2 per l'utilizzo di algoritmi FFT).

Detto:

$$X'_n = \begin{cases} X_n & n \leq N \\ 0 & N < n \leq N' \end{cases} \quad \text{con } N' = N + N_0 \quad (N_0 = \text{numero di zeri aggiunti})$$

si ha:

$$X'_k = \frac{1}{N'} \sum_{n=0}^{N'-1} X'_n e^{-i \frac{2\pi kn}{N'}} = \frac{1}{N'} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-i \frac{2\pi kn}{N'}} = X_k$$

ma calcolato su  $N'$  dati invece che su  $N$ . Di conseguenza:

$$\Delta \nu = \frac{1}{T'_1} = \frac{1}{N' \Delta t}$$

(essendo  $\Delta t$  rimasto invariato) e lo spettro risulta avere una maggiore risoluzione pur manifestando una riduzione dell'ampiezza a tutte le frequenze (dovuta al fatto che  $N' > N$ ) (cfr. figura 103).

Questa procedura può portare a problemi di oscillazione dello spettro in prossimità dei bordi dovuti alla cosiddetta finestatura (*windowing*); questo è un problema che esiste sempre per segnali di durata finita. Infatti, si è visto che la trasformata di un impulso di durata finita (gradino) tende ad avere un'estensione spettrale tanto più ampia quanto minore è la durata del gradino  $\left( \frac{\text{sen}(2\pi \nu t_0)}{2\pi \nu t_0} \right)$ .

Di conseguenza, si ha una estensione verso le alte frequenze dell'effetto limitato nel tempo.

Se per esempio abbiamo un segnale di durata finita questo sarà troncato come se ci fosse un gradino (cfr. figura 104) e il segnale sarà moltiplicato per 1 nell'intervallo di durata e per 0 fuori.

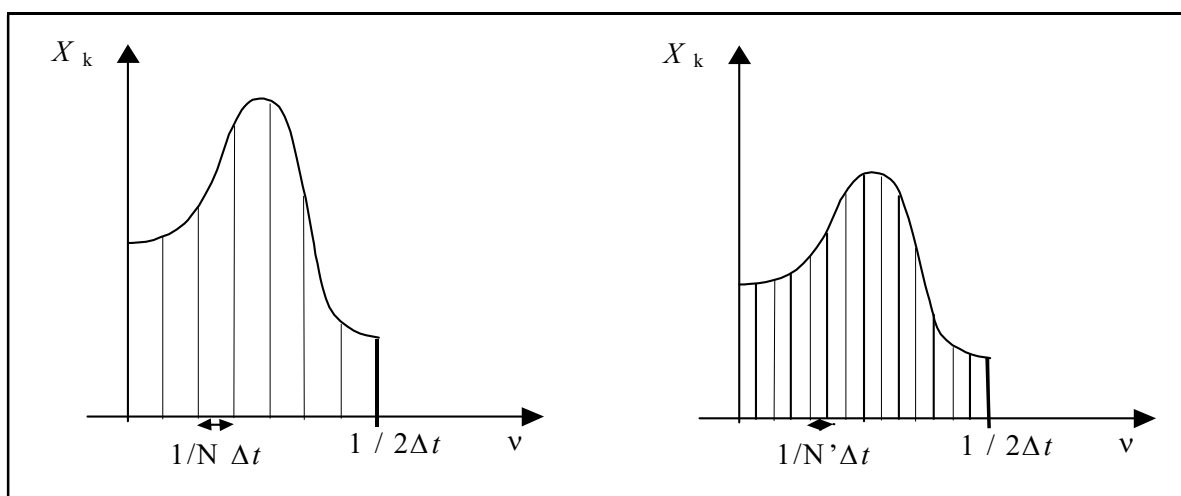


Figura 103. Incremento della risoluzione con lo "zero-padding".



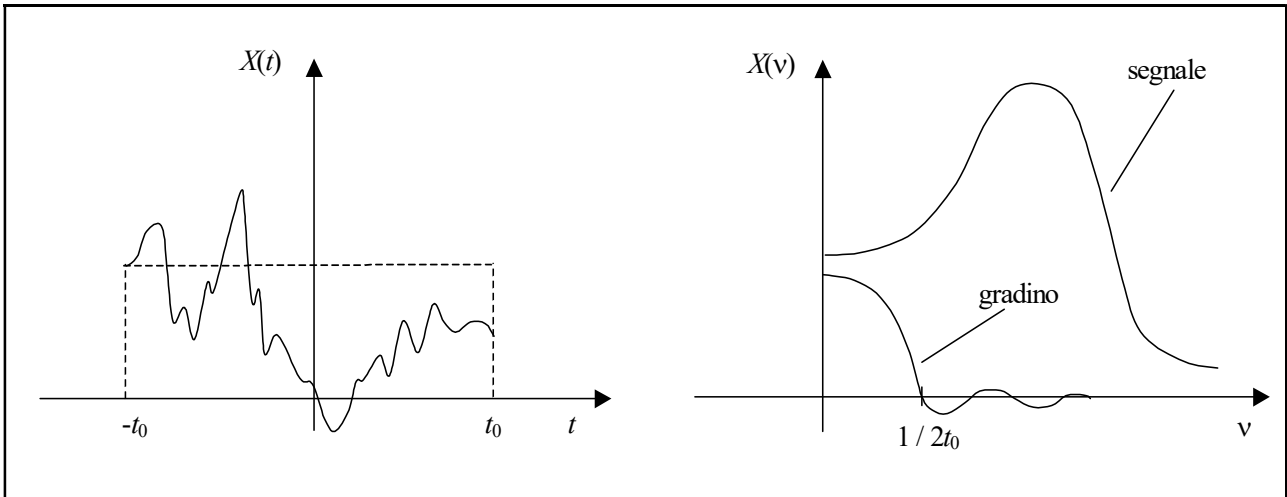


Figura 104. Effetto di una finestra rettangolare su un segnale.

La trasformata di Fourier sarà la convoluzione della trasformata del segnale con quello del gradino. La estensione dello spettro dovuto al gradino sarà tanto maggiore quanto minore è la durata del segnale ( $t_0$ ). Di conseguenza, lo spettro del segnale sarà distorto in particolare alle alte frequenze dove di solito tende a decrescere (cfr. pendenza  $-5/3$  nell'intervallo inerziale) e tale effetto sarà percepito come dovuto a rumore.

Per diminuire l'effetto di questo gradino si opera una finestatura ("windowing") del segnale cioè si moltiplica il segnale per un altro segnale  $W(t)$  il cui spettro sia inferiore a quello del gradino (finestra rettangolare). Tra le finestre più usate ci sono (detto  $T$  la durata dell'intervallo di acquisizione):

- finestra rettangolare (gradino):  $W(t) = 1$
- finestra di Bartlett (triangolare):  $W(t) = \begin{cases} 2t/T & t \leq T/2 \\ 2 - 2t/T & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$
- finestra di Hanning:  $W(t) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]$
- finestra di Hanning:  $W(t) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

rappresentate nel tempo e in frequenza nella figura 105.

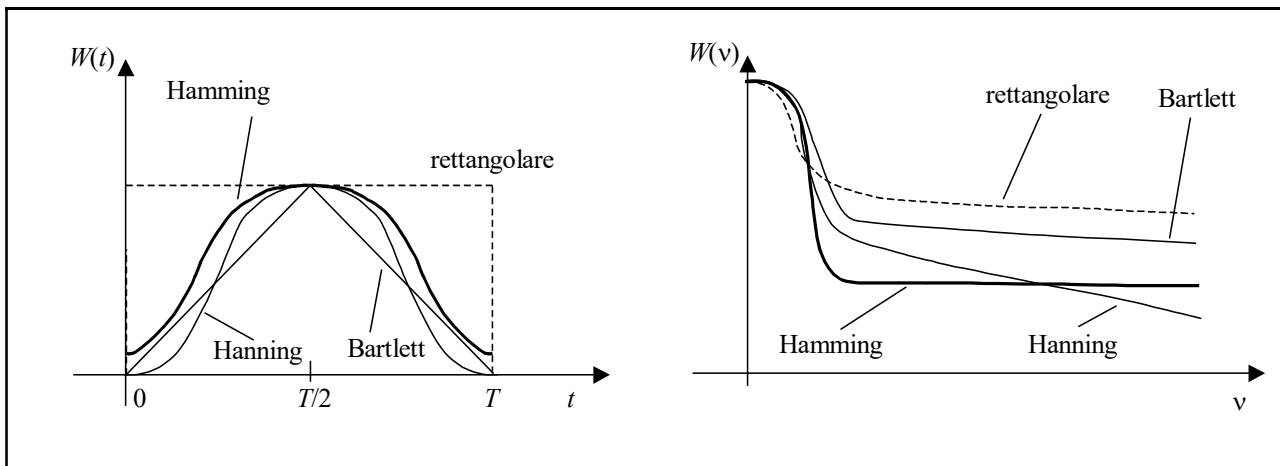


Figura 105 Andamento temporale per differenti finestre di segnali e loro rappresentazione spettrale (involuppo).

Si conclude la parte relativa agli spettri di segnali campionati facendo rilevare che, in modo parallelo a quanto effettuato per le finestre, ma questa volta nel dominio della frequenza, è possibile moltiplicare lo spettro per una "finestra" cioè *filtrare* i contributi spettrali. Questa operazione corrisponde ad una convoluzione nel dominio temporale e il segnale filtrato sarà quindi dato da:

$$G_{xw}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X'(t')W'(t-t')dt' = X' * W'$$

dove  $X'$  e  $W'$  rappresentano le antitrasformate di Fourier dello spettro del segnale e della finestra.

Come detto in precedenza, mentre è facile calcolare i momenti statistici anche per un *campionamento casuale*, non è altrettanto facile calcolare funzioni di correlazione e spettri. Nella situazione di campionamento casuale si ricorre quindi a tecniche di *interpolazione dei dati* non equispaziati che possa poi essere trattato con i metodi visti in precedenza. Le interpolazioni più semplici sono quelle polinomiali (figura 106):

- ordine zero ("hold and sampling");
- lineare;
- quadratica.

Di solito i risultati ottenuti con la tecnica di ordine zero sono già buoni anche se i gradini di passaggio da un dato segnale al seguente creano del rumore simile a quello già incontrato nel problema della finestatura.

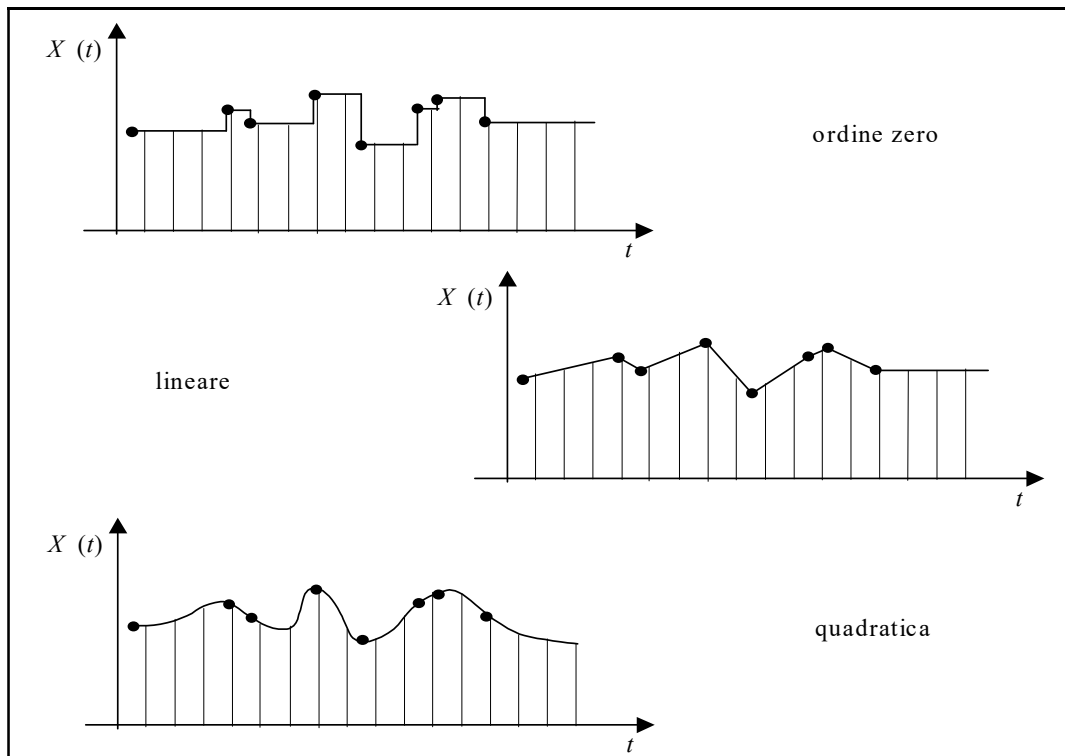


Figura 106. Differenti interpolazioni polinomiali tra dati non equispaziati.

Per questo motivo spesso si usa l'interpolazione lineare i cui risultati (in termini di momenti statistici) sono del tutto equivalenti a quelli con interpolazioni polinomiali di ordine superiore. Altre possibilità sono quelle di utilizzare interpolazioni non polinomiali (esponenziali) o tecniche di ricampionamento avanzate (filtri di Kalman): in tutti i casi é bene sottolineare che viene comunque introdotta una perturbazione del segnale iniziale.