CALCOLO DELLE PROBABILITA'
10-2-2022
Proff. Beghin - Orsingher

Nome................. **Cognome.................** **Matricola ....**

E1) Abbiamo quattro centraline elettriche collegata tra di loro mediante cavi paralleli che funzionano indipendentemente l'uno dall'altro. La prima centralina è connessa con la seconda attraverso n cavi, ciascuno con probabilità p_1 di non essere guasto. La seconda centralina elettrica è collegata alla terza mediante n cavi, ciascuno con probabilità p_2 di essere funzionante. Infine la terza centralina è connessa alla quarta mediante altri n cavi, ciascuno con probabilità p_3 di non essere guasto. Perchè la corrente passi da una centralina alla successiva basta che almeno uno dei cavi che le collega sia funzionante.

i) Con quale probabilità un impulso elettrico partendo dalla prima centralina raggiunge la seconda (indichiamo tale evento con E)?

ii) Qual è la probabilità che l'elettricità dalla prima centralina arrivi alla quarta (indichiamo tale evento con F)?

iii) Se l'elettricità non è arrivata fino alla quarta, qual'è la probabilità che si siano guastati tutti i cavi che collegano la prima alla seconda?

iv) Calcolare $P(E \cup F)$, $P(E \cup F | E \cap F)$ e $P(E \cap F^c)$.

E2) Sia X una v.a. esponenziale di parametro 1. Sia

$$Y_n = 1 - e^{-nX}$$

i) si calcoli la funzione di ripartizione di Y_n

ii) si calcoli il $\mathbb{E}(1 - Y_n)$

iii) Si studi la convergenza in distribuzione di $\{Y_n\}_{n \geq 1}$, per $n \to \infty$

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

ES. 1

i) $E = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n$ e

$A_i =$ "il cavo i-esimo (tra I e II centraline) funziona"

$P(A_i) = p_1$

$$\boxed{P(E)} = P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(A_1^c \cap \dots \cap A_n^c)$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c) = \boxed{1 - (1-p_1)^n}$$

ii) $F = (A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n) \cap (C_1 \cup \dots \cup C_n))$

dove $B_i =$ "il cavo i-esimo (tra II e III) funzioni"

$C_i =$ " " " " " (tra III e IV) ""

$P(B_i) = p_2 \qquad P(C_i) = p_3$

$$\boxed{P(F) = [1-(1-p_1)^n][1-(1-p_2)^n][1-(1-p_3)^n]}$$

iii) $\boxed{P(A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c \mid F^c)} = \dfrac{\overbrace{P(F^c \mid A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c)}^{=1} \cdot P(A_1^c \cap \ldots A_n^c)}{P(F^c)}$

$$= \frac{(1-p_1)^n}{1-P(F)} \quad \leftarrow \text{dal punto i)}$$

$$= \boxed{\frac{(1-p_1)^n}{1-[1-(1-p_1)^n][1-(1-p_2)^n][1-(1-p_3)^n]}} \quad \leftarrow \text{dal punto ii)}$$

iv) poiché $F \subset E$

$\boxed{P(E \cup F)} = P(E) = \boxed{1-(1-p_1)^n}$

$\boxed{P(E \cap F)} = P(F) = \boxed{[1-(1-p_1)^n][1-(1-p_2)^n][1-(1-p_3)^n]}$

$\boxed{P(E \cap F^c)} = P(E) - P(E \cap F) = P(E) - P(F)$

$$= \boxed{1-(1-p_1)^n - (1-(1-p_1)^n)(1-(1-p_2)^n)(1-(1-p_3)^n)}$$

<u>Es. 2</u> $\quad Y_n = 1 - e^{-nX} \in (0,1)$ p.c.

i) $F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ ? & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$

$$F_{Y_n}(y) = P(1-e^{-nX} < y) = P(e^{-nX} > 1-y)$$
$$= P(-nX > \log(1-y))$$

$$= P\left(X < -\frac{\log(1-y)}{n}\right)$$

$$= 1 - e^{\frac{\log(1-y)}{n}} = 1 - e^{\log(1-y)^{\frac{1}{n}}} = 1-(1-y)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1-(1-y)^{\frac{1}{n}} & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}}$$

$$\left[\text{verifica:} \quad \begin{aligned} F_{Y_n}(0^+) &= 0 = F_{Y_n}(0) \\ F_{Y_n}(1^+) &= 1 = F_{Y_n}(1) \end{aligned}\right]$$

ii) $$E[1-Y_n] = \int_0^1 (1-y)\, f_{Y_n}(y)\, dy$$

ove $$f_{Y_n}(y) = \frac{d}{dy} F_{Y_n}(y) = \frac{1}{n}(1-y)^{\frac{1}{n}-1} \mathbb{1}_{y\in(0,1)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{E(1-Y_n)} = \int_0^1 \cancel{(1-y)}\, \frac{1}{n}(1-y)^{\frac{1}{n}\cancel{-1}} dy$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left[-(1-y)^{\frac{1}{n}+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

iii) $$F_{Y_n}(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 0 & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow[P]{d} 1}$$