1. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,\ln(x^4)\ ,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e/o periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

La funzione è dispari $\Rightarrow$ basta studiarla per $x>0$.

In tal caso $f(x) = 4\sqrt[3]{x}\ln x$. f continua nel suo dominio

Segno: $f(x) \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 1$.

Limiti: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (limite notevole)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 4\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{2/3}} = 0$ (niente as. obliquo)

Derivata prima: $f'(x) = \frac{4}{3}x^{-2/3}(\ln x + 3) \quad \forall x>0$

$f'(x) \gtreqless 0 \iff x \gtreqless e^{-3}$

f strettamente decrescente in $(0, e^{-3}]$

f " crescente in $[e^{-3}, +\infty)$

$x = e^{-3}$ è punto di minimo relativo.

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$.

Derivata seconda: $f''(x) = -\frac{4}{9}x^{-5/3}(2\ln x + 3)$

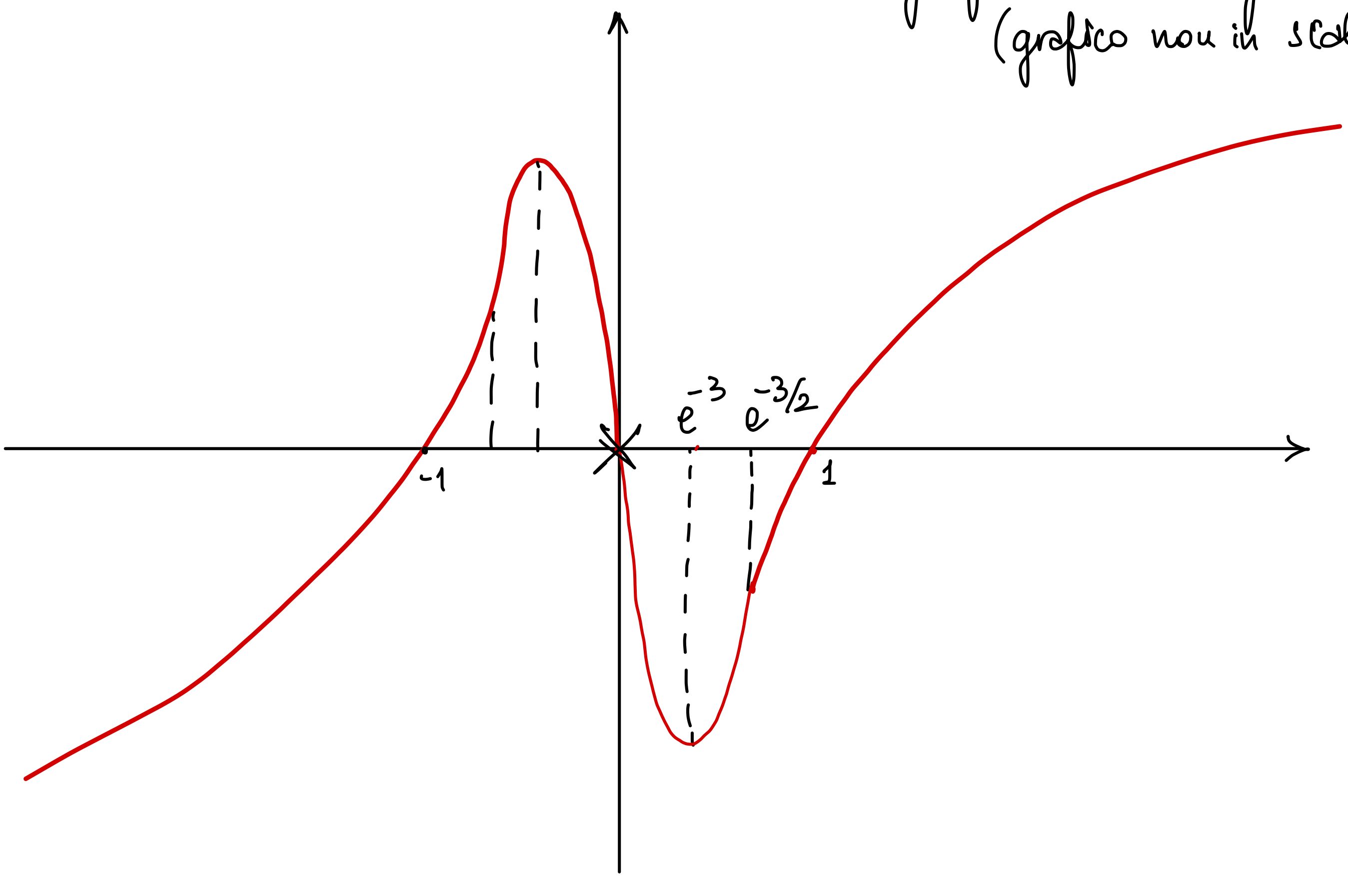
$f''(x) \gtreqless 0 \iff x \lesseqgtr e^{-3/2}$

f è strettamente convessa in $(0, e^{-3/2}]$

f è " concava in $[e^{-3/2}, +\infty)$

$x = e^{-3/2}$ è pto di flesso.

Tenuto conto della simmetria, il grafico è il seguente:
(grafico non in scala).



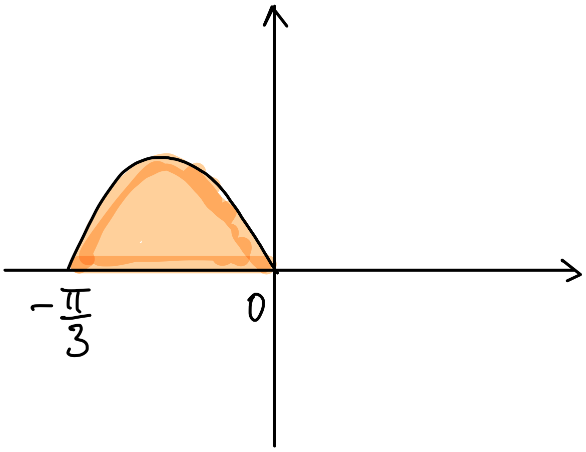
2. Calcolare l'area della regione piana

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\quad 0\le y\le -\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}^2\,x\right\}.$$

Si tratta innanzitutto di capire per quali $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ si ha:

$$-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}^2 x\geq 0 \iff -\sqrt{3}\le \mathrm{tg}\,x\le 0 \iff -\frac{\pi}{3}\le x\le 0.$$

Quindi il disegno della regione è qualitativamente il seguente:



e la sua area vale:

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\left(-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}^2 x\right)dx=-\sqrt{3}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\mathrm{tg}\,x\,dx}_{A}-\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\mathrm{tg}^2 x\,dx}_{B}=(*)$$

$$A=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\,dx\underset{[\text{sost. } \cos x=t]}{=}-\ln|\cos x|\Big|_{-\pi/3}^{0}=-\ln 2$$

$$B=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\left(\mathrm{tg}^2 x+1-1\right)dx=\left(\mathrm{tg}\,x-x\right)\Big|_{-\pi/3}^{0}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$$

Pertanto l'integrale vale

$$(*)=\sqrt{3}\left(\ln 2-1\right)+\frac{\pi}{3}$$

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$i\mathrm{Re}(z^2) - \mathrm{Im}\big(\overline{z}\,(1+2i)\big) + 3i = 0\ , \qquad w^3 - 1 \in \mathbb{R}\ .$$

Posto $z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha:

$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 \Rightarrow i\,\mathrm{Re}(z^2) = i(x^2-y^2)$

$\overline{z}(1+2i) = (x-iy)(1+2i) = x + 2ix - iy + 2y \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\left(\overline{z}(1+2i)\right) = 2x - y$.

L'equazione diventa:

$i(x^2-y^2) - 2x + y + 3i = 0$,

che corrisponde al sistema:

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ x^2 - y^2 + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 4x^2 + 3 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = \pm(1,2)$$

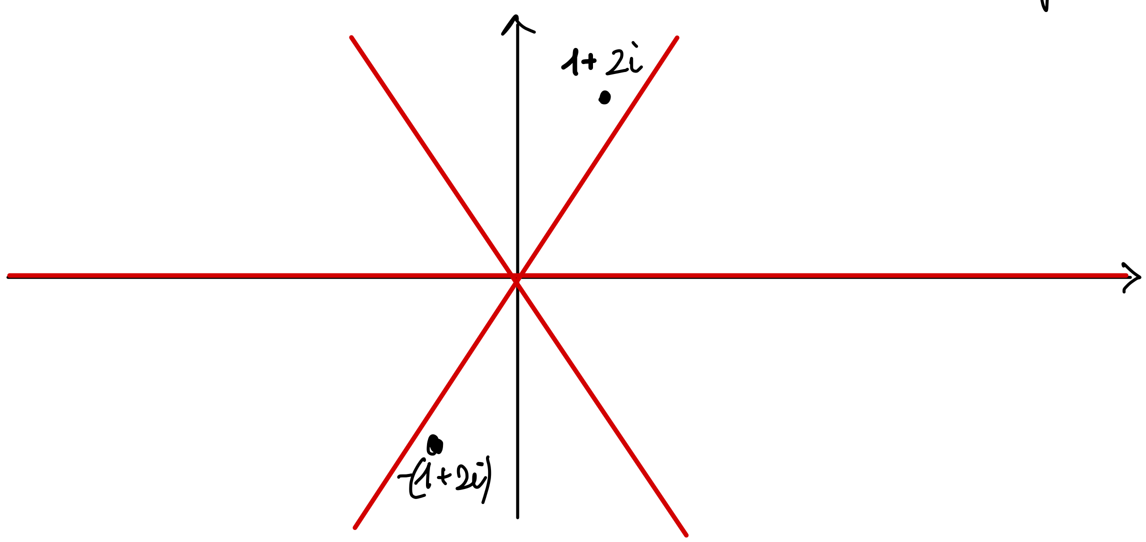
Quindi le soluzioni della prima equazione sono: $z = \pm(1+2i)$

La seconda equivale a $w^3 \in \mathbb{R}$. Posto $w = \rho e^{i\theta}$, si ha

$w^3 = \rho^3 e^{i3\theta}$. Affinché questo sia reale, deve essere

ρ qualsiasi $3\theta = k\pi$, cioè $\theta = k\frac{\pi}{3}$, con $k = 0,1,2,3,4,5$.

Quindi le soluzioni sono le 3 rette rosse disegnate in figura.



4. Al variare di $\alpha, \beta > 0$, calcolare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, della funzione

$$f(x) = \sqrt{9 + x^2 + x^\alpha} - 3\,, \qquad g(x) = \sqrt{9 + x^2 + x^\alpha} - 3 - \beta x^2\,.$$

$$f(x) = 3\left(\underbrace{\sqrt{1 + \frac{x^2+x^\alpha}{9}} - 1}_{\sim \frac{x^2+x^\alpha}{18}}\right) \sim \frac{1}{6}\left(x^2 + x^\alpha\right) \sim \begin{cases} \frac{1}{6}x^\alpha & \text{se } 0<\alpha<2 \\ \frac{1}{3}x^2 & \text{se } \alpha=2 \\ \frac{1}{6}x^2 & \text{se } \alpha>2. \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\min\{\alpha, 2\}$.

$$g(x) = 3\left(\sqrt{1 + \frac{x^2+x^\alpha}{9}} - 1\right) - \beta x^2 = \left[\text{Sviluppo di Maclaurin di } \sqrt{1+t}\right]$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\,\frac{x^2+x^\alpha}{9} - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2+x^\alpha}{9}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x^2+x^\alpha}{9}\right)^2\right)\right) - \beta x^2.$$

Vari casi:

se $0<\alpha<2$, allora $g(x) = \frac{x^\alpha}{6} + o(x^\alpha)$

se $\alpha = 2$, allora $g(x) = \left(\frac{1}{3} - \beta\right)x^2 - \frac{x^4}{54} + o(x^4)$

$$\frac{\cancel{3}\cdot}{8\cdot \cancel{81}\,27}$$

se $\alpha>2$, allora

$$g(x) = \left(\frac{1}{6} - \beta\right)x^2 + \frac{x^\alpha}{6} - \frac{x^4}{216} + o\left(x^{\max\{\alpha,4\}}\right)$$

Quindi:

- se $0<\alpha<2$, $\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x)$ è un infinitesimo di ord. α
- se $\alpha = 2$, $\beta \neq 1/3 \Rightarrow$ " " " " " " 2
- se $\alpha = 2$, $\beta = 1/3 \Rightarrow$ " " " " " " 4
- se $\alpha > 2$, $\beta \neq 1/6 \Rightarrow$ " " " " " " 2
- se $\beta = 1/6$, $2<\alpha<4 \Rightarrow$ " " " " " " α
- se $\beta = 1/6$, $\alpha \geq 4 \Rightarrow$ " " " " " " 4

In alternativa, si può "razionalizzare":

$$g(x) = \left(\sqrt{9+x^2+x^\alpha} - 3 - \beta x^2\right) \cdot \frac{\sqrt{9+x^2+x^\alpha} + 3 + \beta x^2}{\sqrt{9+x^2+x^\alpha} + 3 + \beta x^2} =$$

$$= \frac{9+x^2+x^\alpha - (3+\beta x^2)^2}{\sqrt{9+x^2+x^\alpha} + 3 + \beta x^2} = \frac{x^2+x^\alpha - 6\beta x^2 - \beta^2 x^4}{\underbrace{\sqrt{9+x^2+x^\alpha} + 3 + \beta x^2}_{\to 6}} \sim$$

$$\sim \frac{(1-6\beta)x^2 + x^\alpha - \beta^2 x^4}{6},$$

con le stesse conclusioni.

5. Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{1+n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{xn}}{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{1+n^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

La prima è una serie a termini definitivamente positivi. Usiamo il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{1+n^2}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}}_{\downarrow\, e^{-2}} \xrightarrow[n]{} e^{-2} < 1.$$

Quindi la prima serie converge.

Anche la seconda serie è a termini definitivamente positivi, ma è anche una serie di potenze (ponendo $3^x = y$). Il suo raggio di convergenza, alla luce del precedente calcolo sulla radice n-esima, vale e^2. Quindi:

- Per $3^x < e^2$, cioè $x < \frac{2}{\ln 3}$, la serie converge.
- Per $3^x > e^2$, cioè $x > \frac{2}{\ln 3}$, la serie diverge.
- Per $3^x = e^2$, cioè $x = \frac{2}{\ln 3}$, la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{2n} \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right)^{1+n^2}.$$ Si ha:

$e^{2n} \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right)^{1+n^2} = e^{2n + (1+n^2)\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)}$. D'altra parte

$$2n + (1+n^2)\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) = 2n + (1+n^2)\left(-\frac{2}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \cancel{2n} - \cancel{2n} - 2 + o(1) \longrightarrow -2.$$

Quindi $\frac{1}{n} \underbrace{e^{2n} \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{1+n^2}}_{\downarrow \; e^{-2}} \sim \frac{1}{n e^2} \Longrightarrow$

$\Rightarrow$ per $x = \frac{2}{\ln 3}$ la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica.

Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[5]{x}\,\ln(x^2)\ ,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e/o periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

La funzione è dispari $\Rightarrow$ basta studiarla per $x>0$.

In tal caso $f(x) = 2\sqrt[5]{x}\ln x$. f continua nel suo dominio

Segno: $f(x) \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 1$.

Limiti: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (limite notevole)

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{4/5}} = 0$ (niente as. obliquo)

Derivata prima: $f'(x) = \frac{2}{5}x^{-4/5}(\ln x + 5) \quad \forall x>0$

$f'(x) \gtreqless 0 \iff x \gtreqless e^{-5}$

f strettamente decrescente in $(0, e^{-5}]$

f " crescente in $[e^{-5}, +\infty)$

$x = e^{-5}$ è punto di minimo relativo.

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$.

Derivata seconda: $f''(x) = -\frac{2}{25}x^{-9/5}(4\ln x + 15)$

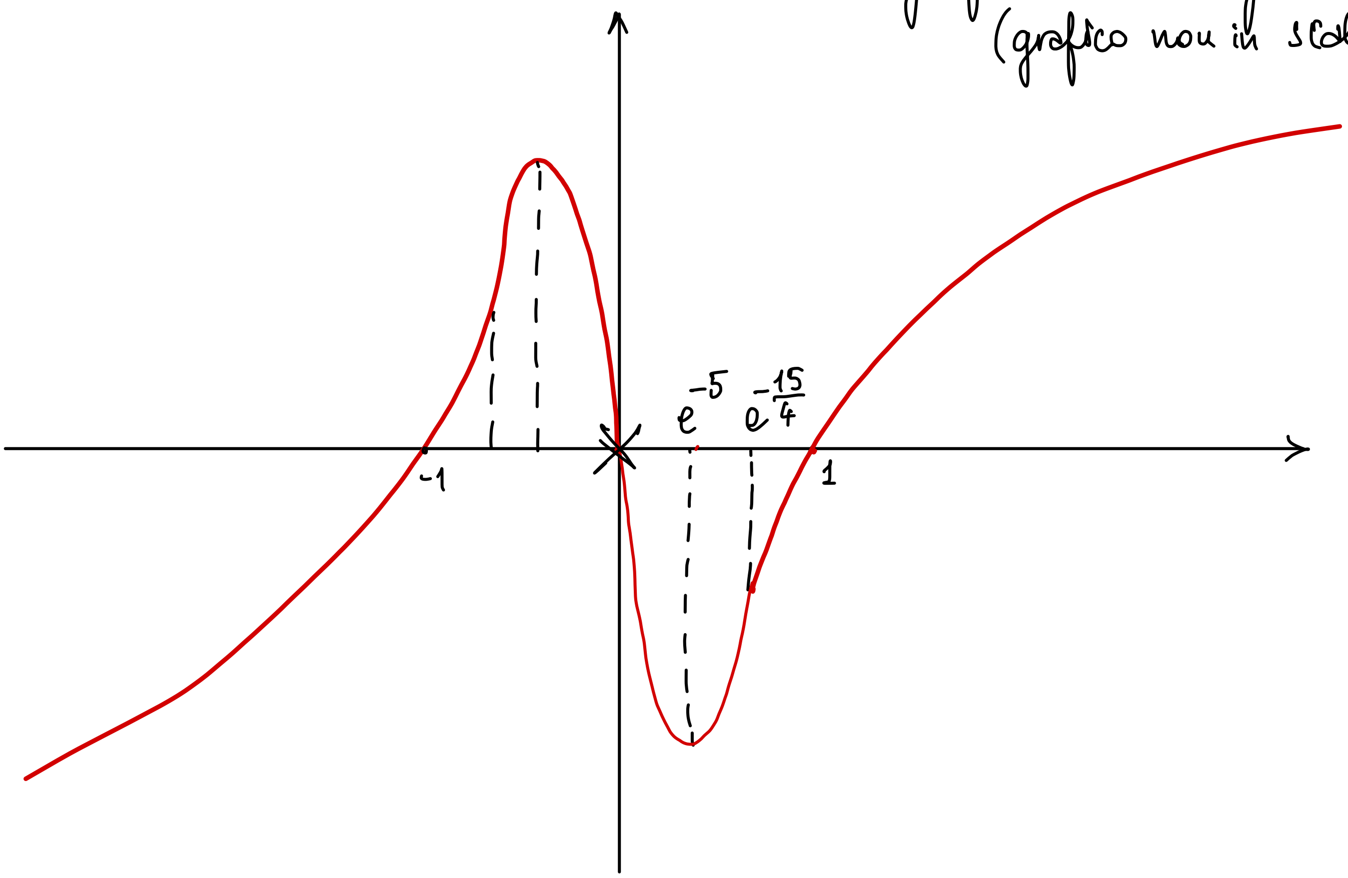
$f''(x) \gtreqless 0 \iff x \lesseqgtr e^{-\frac{15}{4}}$

f è strettamente convessa in $(0, e^{-\frac{15}{4}}]$

f è " concava in $[e^{-\frac{15}{4}}, +\infty)$

$x = e^{-15/4}$ è pto di flesso.

Tenuto conto della simmetria, il grafico è il seguente:
(grafico non in scala).



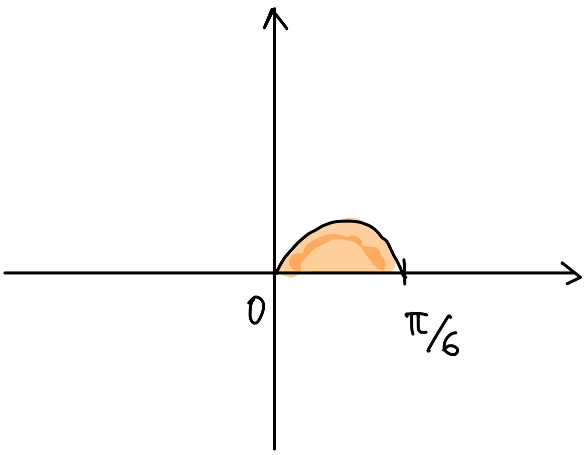
2. Calcolare l'area della regione piana

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \quad 0\le y\le \operatorname{tg} x-\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x\right\}.$$

Si tratta innanzitutto di capire per quali $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ si ha:

$$\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x\ge 0 \iff 0\le \operatorname{tg} x\le \frac{\sqrt{3}}{3} \iff 0\le x\le\frac{\pi}{6}$$

Quindi il disegno della regione è qualitativamente il seguente:



e la sua area vale:

$$\int_0^{\pi/6}\left(\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x\right)dx = \underbrace{\int_0^{\pi/6}\operatorname{tg} x\,dx}_{A} - \sqrt{3}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\operatorname{tg}^2 x\,dx}_{B} = (*)$$

$$A = \int_0^{\pi/6}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx \underset{[\text{sost. } \cos x = t]}{=} -\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/6} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$B = \int_0^{\pi/6}\left(\operatorname{tg}^2 x+1-1\right)dx = \left(\operatorname{tg} x - x\right)\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}.$$

Pertanto l'area vale

$$(*) = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - 1 + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3.$$

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$\mathrm{Im}(\overline{z}\,(2+i)) - i\mathrm{Re}(z^2) + 3i = 0\,, \qquad w^3 + 1 \in \mathbb{R}\,.$$

Posto $z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha:

$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 \Rightarrow i\,\mathrm{Re}(z^2) = i(x^2-y^2)$

$\bar{z}(2+i) = (x-iy)(2+i) = 2x + ix - 2iy + y \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(\bar{z}(2+i)) = x - 2y$.

L'equazione diventa:

$x - 2y + i(y^2 - x^2) + 3i = 0$,

che corrisponde al sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y^2 - x^2 + 3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y^2 - 4y^2 + 3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y) = \pm(2,1)$$

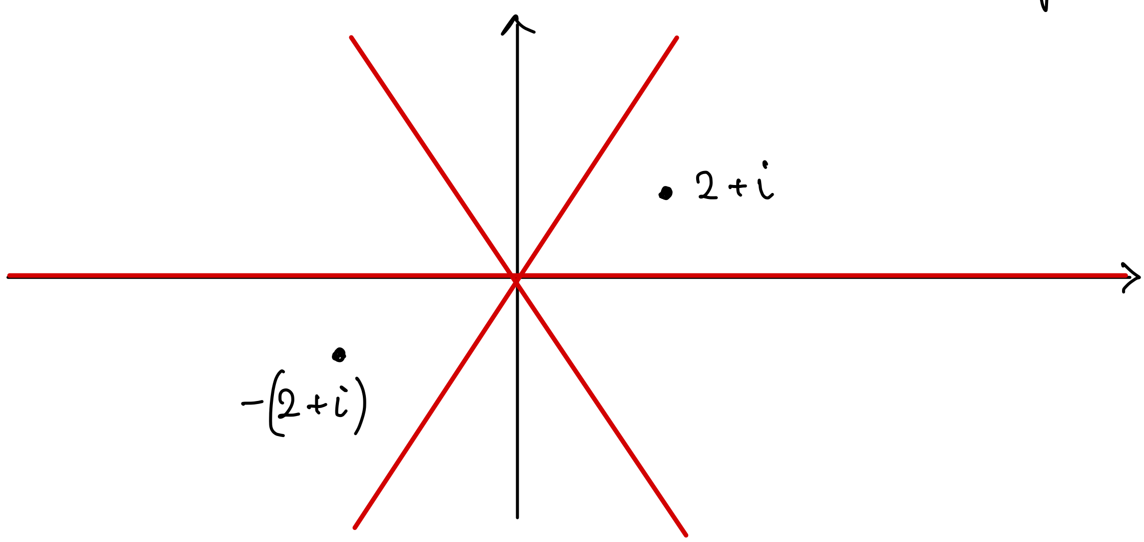
Quindi le soluzioni della prima equazione sono: $z = \pm(2+i)$

La seconda equivale a $w^3 \in \mathbb{R}$. Posto $w = \rho e^{i\theta}$, si ha

$w^3 = \rho^3 e^{i3\theta}$. Affinché questo sia reale, deve essere

ρ qualsiasi $3\theta = k\pi$, cioè $\theta = k\frac{\pi}{3}$, con $k = 0,1,2,3,4,5$.

Quindi le soluzioni sono le 3 rette rosse disegnate in figura.



4. Al variare di $\alpha, \beta > 0$, calcolare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, della funzione

$$f(x) = \sqrt{4 + x^\alpha + x^3} - 2\,, \qquad g(x) = \sqrt{4 + x^\alpha + x^3} - 2 - \beta x^3\,.$$

$$f(x) = 2\Big(\underbrace{\sqrt{1 + \frac{x^\alpha + x^3}{4}} - 1}_{\sim \frac{x^2 + x^\alpha}{8}}\Big) \sim \frac{x^2 + x^\alpha}{4} \sim \begin{cases} \frac{1}{4}x^\alpha & \text{se } 0<\alpha<2 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{se } \alpha=2 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{se } \alpha>2. \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\min\{\alpha, 2\}$.

$$g(x) = 2\left(\sqrt{1 + \frac{x^\alpha + x^3}{4}} - 1\right) - \beta x^3 = \left[\text{Sviluppo di Maclaurin di } \sqrt{1+t}\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\,\frac{x^\alpha + x^3}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{x^\alpha + x^3}{4}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x^\alpha + x^3}{4}\right)^2\right)\right) - \beta x^3.$$

Vari casi:

se $0<\alpha<3$, allora $\quad g(x) = \dfrac{x^\alpha}{4} + o(x^\alpha)$

se $\alpha = 3$, allora $\quad g(x) = \left(\dfrac{1}{2} - \beta\right)x^3 - \dfrac{x^6}{16} + o(x^6)$

se $\alpha > 3$, allora

$$g(x) = \left(\frac{1}{4} - \beta\right)x^3 + \frac{x^\alpha}{4} - \frac{x^6}{64} + o\left(x^{\max\{\alpha, 6\}}\right)$$

Quindi:

- se $0<\alpha<3$, $\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x)$ è un infinitesimo di ord. α
- se $\alpha = 3$, $\beta \neq 1/2 \Rightarrow$ " " " " " " 3
- se $\alpha = 3$, $\beta = 1/2 \Rightarrow$ " " " " " " 6
- se $\alpha > 3$, $\beta \neq 1/6 \Rightarrow$ " " " " " " 2
- se $\beta = 1/4$, $3<\alpha<6 \Rightarrow$ " " " " " " α
- se $\beta = 1/4$, $\alpha \geq 6 \Rightarrow$ " " " " " " 6

In alternativa, si può "razionalizzare":

$$g(x) = \left(\sqrt{4 + x^\alpha + x^3} - 2 - \beta x^3\right) \cdot \frac{\sqrt{4 + x^\alpha + x^3} + 2 + \beta x^3}{\sqrt{4 + x^\alpha + x^3} + 2 + \beta x^3} =$$

$$= \frac{4 + x^\alpha + x^3 - (2 + \beta x^3)^2}{\sqrt{4 + x^\alpha + x^3} + 2 + \beta x^3} = \frac{x^\alpha + x^3 - 4\beta x^3 - \beta^2 x^6}{\underbrace{\sqrt{4 + x^\alpha + x^3} + 2 + \beta x^3}_{\to 4}} \sim$$

$$\sim \frac{x^\alpha + (1 - 4\beta) x^3 - \beta^2 x^6}{4},$$

con le stesse conclusioni.

5. Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{1-n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{xn}}{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{1-n^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

La prima è una serie a termini positivi.
Usiamo il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{1-n^2}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-n}}_{\downarrow\, e^{-3}} \xrightarrow[n]{} e^{-3} < 1.$$

Quindi la prima serie converge.

Anche la seconda serie è a termini definitivamente positivi, ma è anche una serie di potenze (ponendo $2^x = y$).
Il suo raggio di convergenza, alla luce del precedente calcolo sulla radice n-esima, vale e^3. Quindi:

- Per $2^x < e^3$, cioè $x < \frac{3}{\ln 2}$, la serie converge.
- Per $2^x > e^3$, cioè $x > \frac{3}{\ln 2}$, la serie diverge.
- Per $2^x = e^3$, cioè $x = \frac{3}{\ln 2}$, la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, e^{3n} \cdot \left(1+\frac{3}{n}\right)^{1-n^2}.$$ Si ha:

$$e^{3n} \cdot \left(1+\frac{3}{n}\right)^{1-n^2} = e^{3n+(1-n^2)\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}.$$ D'altra parte

$$3n + (1-n^2)\ln\left(1+\frac{3}{n}\right) = 3n + (1-n^2)\left(\frac{3}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \cancel{3n} - \cancel{3n} + \frac{9}{2} + o(1) = \frac{9}{2} + o(1) \xrightarrow[n]{} 9/2$$

Quindi $\frac{1}{n}\underbrace{e^{3n}\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)^{1-n^2}}_{\downarrow \; e^{9/2}} \sim \frac{e^{9/2}}{n} \Longrightarrow$

$\Rightarrow$ per $x=\frac{3}{\ln 2}$ la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica.