1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}|\operatorname{tg} x| - 1},$$
e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e/o periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

- **Dominio** $\mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$

- **Periodicità e simmetrie** f è periodica di periodo π, inoltre è dispari $\Rightarrow$ basta studiarla in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.
  $\Rightarrow$ in tale intervallo possiamo togliere il valore assoluto.

- **Segno**: In $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$: $f(x) = 0 \iff x = 0$
  $$f(x) > 0 \iff \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$$
  $$f(x) < 0 \iff 0 < x < \frac{\pi}{6}$$

- **Limiti significativi**:
  $$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{6}\right)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{6}\right)^+} f(x) = +\infty$$
  $$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \left(\text{e quindi } \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
  $x = \frac{\pi}{6}$ è un asintoto verticale.

- **Derivata prima**: $f'(x) = -\frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1)^2} \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

Sfruttando la simmetria, f è derivabile anche in $x = 0$, con $f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

f è strettamente decrescente in $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ e in $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Non ci sono estremi relativi.

• Derivata seconda

$$f''(x) = 2\,\frac{(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})(1+\operatorname{tg}^2x)}{(\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1)^3} \qquad \forall\, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$$

Per simmetria, f è derivabile due volte in $x=0$, e $f''(0)=0$

$$f''(x)=0 \iff x=0$$

$$f''(x)>0 \iff \frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$$

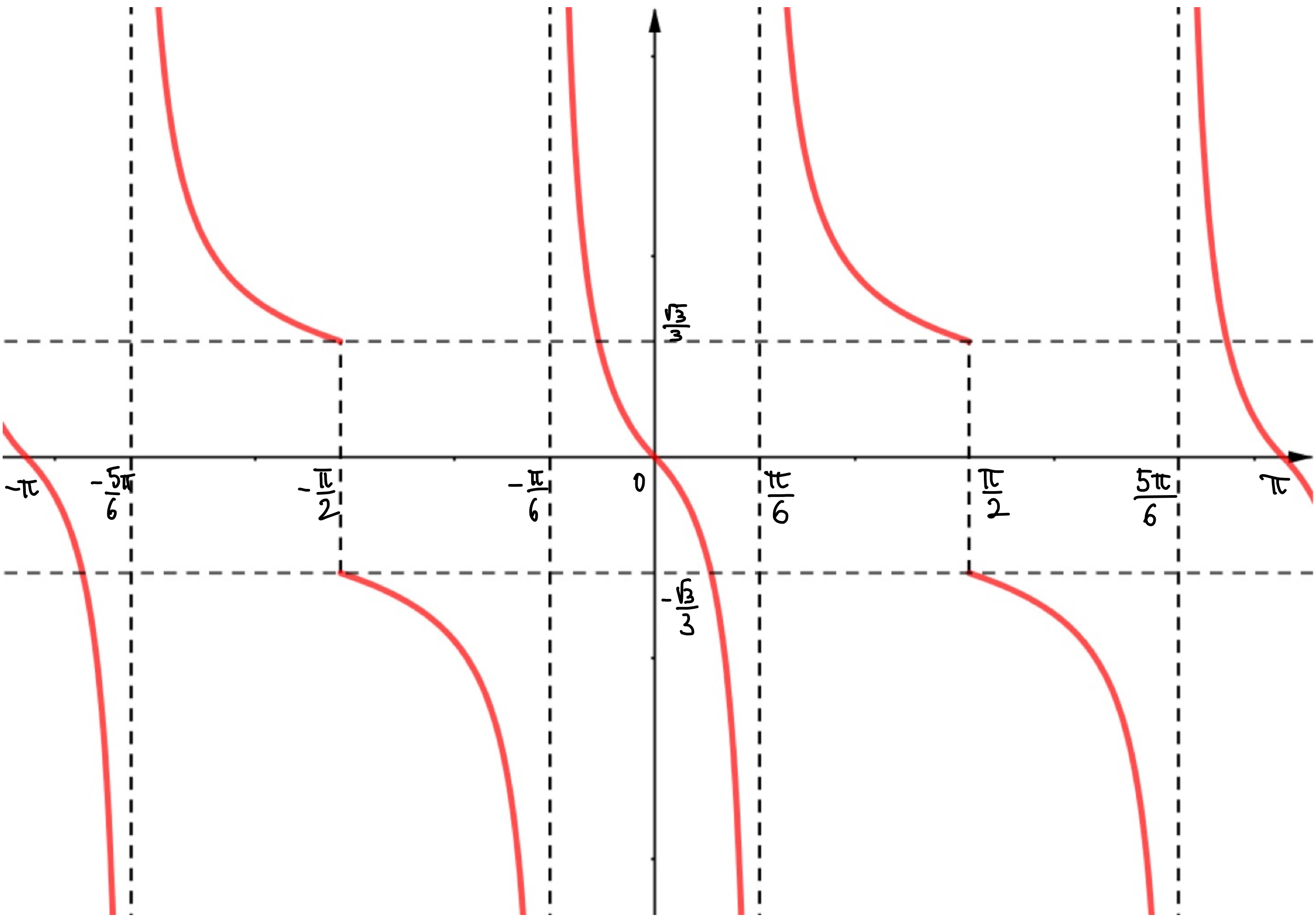
$$f''(x)<0 \iff 0<x<\frac{\pi}{6}$$

f risulta strett. convessa in $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

strett. concava in $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$

$x=0$ è un pto di flesso.

Il grafico è il seguente:



2. a) Calcolare $I_1 = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} e^{2x}\cos(\pi x)\,dx$.

b) Trovare una formula iterativa che permetta di calcolare $I_n = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} e^{2x}\cos^n(\pi x)\,dx$ in funzione di I_{n-2}, per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Integrando per parti due volte:

$$I_1 = \underbrace{\frac{1}{2} e^{2x}\cos(\pi x)\Big|_{-1/2}^{1/2}}_{=0} + \frac{\pi}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{2x}\sin(\pi x)\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} e^{2x}\sin(\pi x)\Big|_{-1/2}^{1/2} - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 e^{2x}\cos(\pi x) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(e + \frac{1}{e}\right) - \frac{\pi^2}{4} I_1 \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{\pi\,(e + e^{-1})}{4+\pi^2} = \frac{2\pi\,\mathrm{ch}(1)}{4+\pi^2}}$$

b) Anche qui si integra due volte per parti:

$$I_n = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2x}\cos^n(\pi x)\,dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} e^{2x}\cos^n(\pi x)\Big|_{-1/2}^{1/2}}_{=0} + \frac{n\pi}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{2x}\cos^{n-1}(\pi x)\,\mathrm{sen}(\pi x)\,dx =$$

$$= \underbrace{\frac{n\pi}{4} e^{2x}\cos^{n-1}(\pi x)\,\mathrm{sen}(\pi x)\Big|_0^1}_{=0} +$$

$$+ \frac{n(n-1)\pi^2}{4}\underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} e^{2x}\cos^{n-2}(\pi x)\underbrace{\sin^2(\pi x)}_{1-\cos^2 x}\,dx}_{I_{n-2}-I_n} - \frac{n\pi^2}{4}\underbrace{\int_{-1/2} e^{2x}\cos^n(\pi x)\,dx}_{I_n}$$

$$= \frac{n(n-1)\pi^2}{4} I_{n-2} - \frac{n^2\pi^2}{4} I_n$$

da cui $\left(1 + \frac{n^2\pi^2}{4}\right) I_n = \frac{n(n-1)\pi^2}{4} I_{n-2}$, e quindi

$$\boxed{I_n = \frac{n(n-1)\pi^2}{4 + n^2\pi^2} I_{n-2}}$$

3. Trovare e disegnare tutte le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$27z^7 = i|z|^2(\overline{z})^2 \,.$$

Scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$, l'equazione diventa

$$27\rho^7 e^{i7\theta} = \rho^4 e^{i\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}$$

da cui $27\rho^7 = \rho^4$ $\nearrow$ $\rho = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$

$\searrow$ $\rho = 1/3$

$$9\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \theta_k = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{9} \,, \quad k = 0, 1, \dots 8$$

$k = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{1}{3} e^{i\frac{\pi}{18}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{18} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{18}\right)$

$k = 1 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{3} e^{i\frac{5\pi}{18}}$

$k = 2 \Rightarrow z_2 = \frac{1}{3} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{i}{3}$

$k = 3 \Rightarrow z_3 = \frac{1}{3} e^{i\frac{13}{18}\pi}$

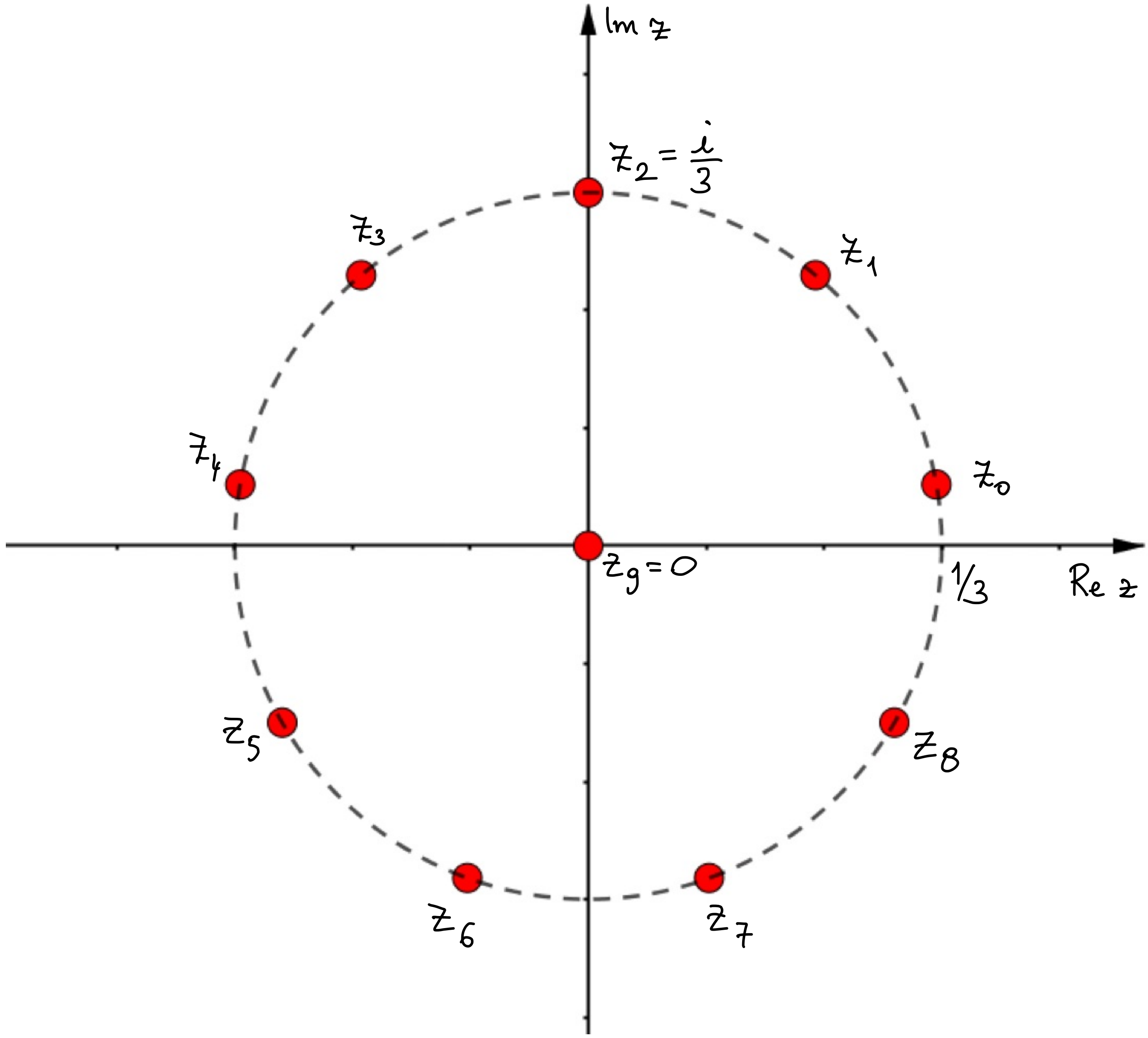
$k = 4 \Rightarrow z_4 = \frac{1}{3} e^{i\frac{17}{18}\pi}$

$k = 5 \Rightarrow z_5 = \frac{1}{3} e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\frac{1}{6}\left(\sqrt{3} + i\right)$

$k = 6 \Rightarrow z_6 = \frac{1}{3} e^{i\frac{25\pi}{18}}$

$k = 7 \Rightarrow z_7 = \frac{1}{3} e^{i\frac{29\pi}{18}}$

$k = 8 \Rightarrow z_8 = \frac{1}{3} e^{i\frac{11}{6}\pi} = \frac{1}{6}\left(\sqrt{3} - i\right)$



Im z
$z_2 = \frac{i}{3}$
z_3
z_1
z_4
z_0
$z_9 = 0$
1/3
Re z
z_5
z_8
z_6
z_7

4. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo, per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$, della funzione

$$f(x) = \sqrt{2x^6 + x^2} - x + \alpha x^3 + \beta x^5.$$

a) Per $x \to 0^+$, sfruttando lo sviluppo di Maclaurin di $(1+t)^\alpha$, si ha:

$$f(x) = x\sqrt{1+2x^4} - x + \alpha x^3 + \beta x^5 =$$

$$= x\left(1 + x^4 - \frac{x^8}{2} + o(x^8)\right) - x + \alpha x^3 + \beta x^5 =$$

$$= \alpha x^3 + (\beta+1)x^5 - \frac{x^9}{2} + o(x^9)$$, quindi, per $x \to 0^+$,

- se $\alpha \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 3;
- se $\alpha = 0$ e $\beta \neq -1$, " " " " " " 5;
- se $\alpha = 0$ e $\beta = -1$, " " " " " " 9.

b) per $x \to +\infty$, si ha:

$$f(x) = \sqrt{2}x^3\sqrt{1 + \frac{1}{2x^4}} - x + \alpha x^3 + \beta x^5 =$$

$$= \sqrt{2}x^3\left(1 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - x + \alpha x^3 + \beta x^5 =$$

$$= \beta x^5 + (\sqrt{2}+\alpha)x^3 - x + o(1)$$, quindi:

- se $\beta \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è un infinito di ordine 5;
- se $\beta = 0$ e $\alpha \neq -\sqrt{2}$, " " " " " " 3;
- se $\beta = 0$ e $\alpha = -\sqrt{2}$, " " " " " " 1.

5. Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{n^2+1}-1\right), \quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{n^2+1}-1\right)\left(\frac{x-1}{x}\right)^n \ (\text{per } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}).$$

a) si tratta di una serie a termini positivi.

$$\sqrt[n]{n^2+1}-1 = e^{\frac{\ln(n^2+1)}{n}}-1 \sim \frac{\ln(n^2+1)}{n}$$

Poiché $\frac{\ln(n^2+1)}{n} \geq \frac{1}{n}$ def^{te} per $n\to+\infty$, per confronto con la serie armonica $\boxed{\text{la serie diverge}}$

b) Ponendo $\frac{x-1}{x}=y$, si ottiene una serie di potenze il cui raggio vale

$$r = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2+1}-1}{\sqrt[n+1]{(n+1)^2+1}-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln(n^2+1)}{n}}-1}{e^{\frac{\ln(n^2+2n+2)}{n+1}}-1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^2+2n+2)}}_{\to 1}\ \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} = 1.$$

Negli estremi:

- se $y=1$, la serie diventa la a) che diverge.
- se $y=-1$, la serie è $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n^2+1}-1\right)$

che converge per il criterio di Leibniz, in quanto $a_n=\sqrt[n]{n^2+1}-1$ è infinitesima e def^{te} decrescente

Infatti $a_n = e^{\frac{\log(n^2+1)}{n}}-1$ e l'esponenziale è crescente, quindi basta provare che $\frac{\log(n^2+1)}{n}$ è decrescente.

Posto $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$, si ha $f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2}$

e il numeratore è def^{te} < 0 per $x \to +\infty$.

Quindi $a_n = f(n)$ è def^{te} decrescente.

In definitiva la serie b) converge se e solo se

$-1 \leq \frac{x-1}{x} < 1$, cioè se e solo se $\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$