1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3} - |\operatorname{tg} x|} \ ,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e/o periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

- **Dominio** $\mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$

- **Periodicità e simmetrie** f è periodica di periodo π, inoltre è dispari $\Rightarrow$ basta studiarla in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.
  $\Rightarrow$ in tale intervallo possiamo togliere il valore assoluto.

- **Segno**: In $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$: $f(x) = 0 \iff x = 0$

$$f(x) > 0 \iff 0 < x < \frac{\pi}{3}$$

$$f(x) < 0 \iff \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$$

- **Limiti significativi**:

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^-} f(x) = +\infty \ , \quad \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = -1 \quad \left(\text{e quindi } \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = 1 \right)$$

$x = \frac{\pi}{3}$ è un **asintoto verticale**.

- **Derivata prima**: $f'(x) = \sqrt{3} \dfrac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(\sqrt{3} - \operatorname{tg} x)^2} > 0 \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} \right\}$

Sfruttando la simmetria, f è derivabile anche in $x = 0$, con $f'(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

f è strettamente crescente in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ e in $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Non ci sono estremi relativi.

· Derivata seconda

$$f''(x) = 2\sqrt{3}\,\frac{(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + 1)(1+\mathrm{tg}^2 x)}{(\sqrt{3}-\mathrm{tg}\,x)^3} \qquad \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$$

Per simmetria, f è derivabile due volte in $x=0$, e $f''(0)=0$

$$f''(x) = 0 \iff x = 0$$

$$f''(x) > 0 \iff 0 < x < \frac{\pi}{3}$$

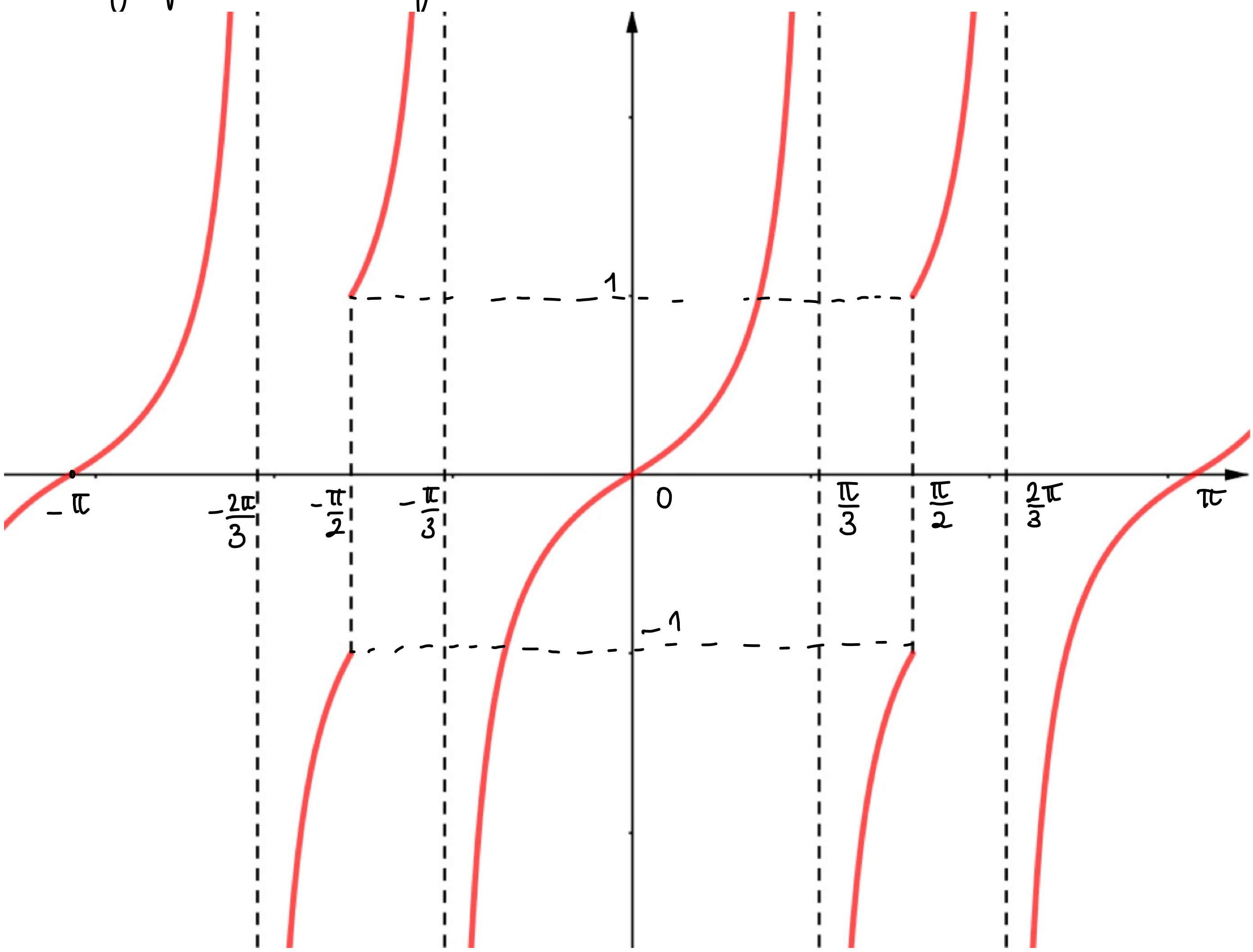
$$f''(x) < 0 \iff \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$$

f risulta strett. convessa in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$

strett. concava in $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

$x = 0$ è un pto di flesso (anche se $f''(0)$ non esiste.)

Il grafico è il seguente:



2. a) Calcolare $I_1 = \int_0^1 e^{2x} \sin(\pi x)\, dx$.

b) Trovare una formula iterativa che permetta di calcolare $I_n = \int_0^1 e^{2x} \sin^n(\pi x)\, dx$ in funzione di I_{n-2}, per $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

a) Integrando per parti due volte:

$$I_1 = \underbrace{\frac{1}{2} e^{2x} \sin(\pi x) \Big|_0^1}_{= 0} - \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^{2x} \cos(\pi x)\, dx =$$

$$= -\frac{\pi}{4} e^{2x} \cos(\pi x) \Big|_0^1 - \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 e^{2x} \sin(\pi x) =$$

$$= \frac{\pi}{4} (e^2 + 1) - \frac{\pi^2}{4} I_1 \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{\pi (e^2+1)}{4+\pi^2}}$$

b) Anche qui si integra due volte per parti:

$$I_n = \int_0^1 e^{2x} \sin^n(\pi x)\, dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} e^{2x} \sin^n(\pi x) \Big|_0^1}_{= 0} - \frac{n\pi}{2} \int_0^1 e^{2x} \sin^{n-1}(\pi x) \cos(\pi x)\, dx =$$

$$= \underbrace{-\frac{n\pi}{4} e^{2x} \sin^{n-1}(\pi x) \cos(\pi x) \Big|_0^1}_{= 0} +$$

$$+ \underbrace{\frac{n(n-1)\pi^2}{4} \int_0^1 e^{2x} \sin^{n-2}(\pi x) \underbrace{\cos^2(\pi x)}_{1-\sin^2(\pi x)}\, dx}_{I_{n-2} - I_n} - \frac{n\pi^2}{4} \underbrace{\int_0^1 e^{2x} \sin^n(\pi x) dx}_{I_n}$$

$$= \frac{n(n-1)\pi^2}{4} I_{n-2} - \frac{n^2\pi^2}{4} I_n$$

da cui $\left(1+\frac{n^2\pi^2}{4}\right) I_n = \frac{n(n-1)\pi^2}{4} I_{n-2}$, e quindi

$$\boxed{I_n = \frac{n(n-1)\pi^2}{4+n^2\pi^2} I_{n-2}}$$

3. Trovare e disegnare tutte le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$z^7 = 27i|z|^2(\overline{z})^2\,.$$

Scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$, l'equazione diventa

$$\rho^7 e^{i7\theta} = 27\rho^4 e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}$$

da cui $\rho^7 = 27\rho^4$ $\nearrow$ $\rho = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$; $\searrow$ $\rho = 3$

$$9\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \theta_k = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{9}, \quad k = 0, 1, \dots 8$$

$k=0 \Rightarrow$ $z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{18}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{18}\right)$

$k=1 \Rightarrow$ $z_1 = 3e^{i\frac{5\pi}{18}}$

$k=2 \Rightarrow$ $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$

$k=3 \Rightarrow$ $z_3 = 3e^{i\frac{13}{18}\pi}$

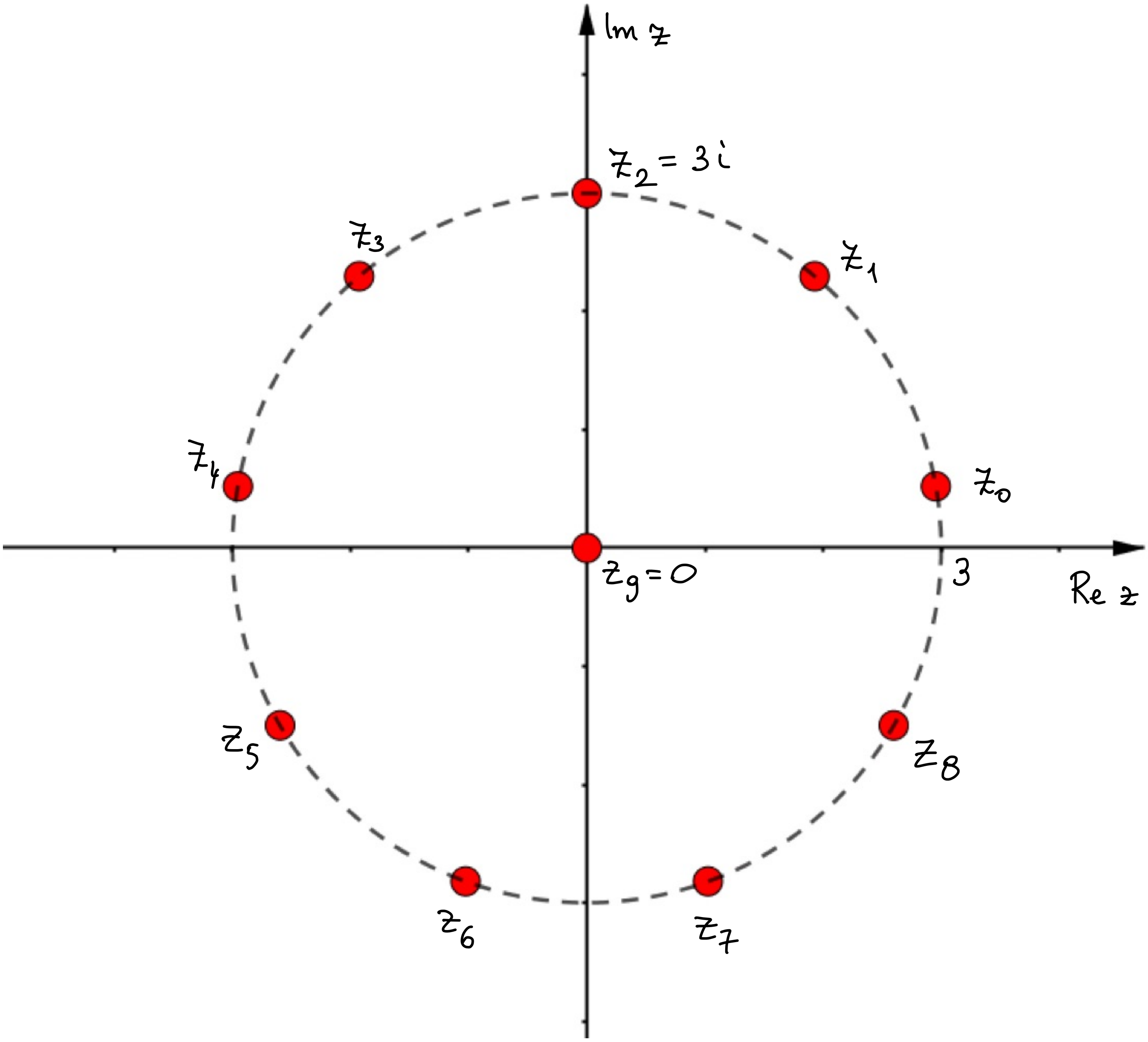
$k=4 \Rightarrow$ $z_4 = 3e^{i\frac{17}{18}\pi}$

$k=5 \Rightarrow$ $z_5 = 3e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$

$k=6 \Rightarrow$ $z_6 = 3e^{i\frac{25}{18}\pi}$

$k=7 \Rightarrow$ $z_7 = 3e^{i\frac{29}{18}\pi}$

$k=8 \Rightarrow$ $z_8 = 3e^{i\frac{11}{6}\pi} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)$


Im z
z2 = 3i
z3
z1
z4
z0
z9 = 0
3
Re z
z5
z8
z6
z7

4. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo, per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$, della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x^6} - x + \alpha x^3 + \beta x^5.$$

a) Per $x \to 0^+$, sfruttando lo sviluppo di Maclaurin di $(1+t)^\alpha$, si ha:

$$f(x) = x\sqrt{1+4x^4} - x + \alpha x^3 + \beta x^5 =$$

$$= x\left(1 + 2x^4 - 2x^8 + o(x^8)\right) - x + \alpha x^3 + \beta x^5 =$$

$$= \alpha x^3 + (\beta+2)x^5 - 2x^9 + o(x^9)$$, quindi, per $x \to 0^+$,

- se $\alpha \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 3;
- se $\alpha = 0$ e $\beta \neq -2$, " " " " " " 5;
- se $\alpha = 0$ e $\beta = -2$, " " " " " " 9.

b) per $x \to +\infty$, si ha:

$$f(x) = 2x^3\sqrt{1 + \frac{1}{4x^4}} - x + \alpha x^3 + \beta x^5 =$$

$$= 2x^3\left(1 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - x + \alpha x^3 + \beta x^5 =$$

$$= \beta x^5 + (2+\alpha)x^3 - x + o(1)$$, quindi:

- se $\beta \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è un infinito di ordine 5;
- se $\beta = 0$ e $\alpha \neq -2$, " " " " " " 3;
- se $\beta = 0$ e $\alpha = -2$, " " " " " " 1.

5. Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{2n+3}-1\right), \quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{2n+3}-1\right)\left(\frac{x}{x-2}\right)^n \ (\text{per } x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}).$$

a) si tratta di una serie a termini positivi.

$$\sqrt[n]{2n+3}-1 = e^{\frac{\ln(2n+3)}{n}}-1 \sim \frac{\ln(2n+3)}{n}$$

$\to 0$

Poiché $\frac{\ln(2n+3)}{n} \geq \frac{1}{n}$ def^{te} per $n\to+\infty$, la serie diverge a $+\infty$ per confronto con la serie armonica.

b) Ponendo $\frac{x}{x-2}=y$, si ottiene una serie di potenze il cui raggio vale

$$r = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{2n+3}-1}{\sqrt[n+1]{2n+5}-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln(2n+3)}{n}}-1}{e^{\frac{\ln(2n+5)}{n+1}}-1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln(2n+3)}{\ln(2n+5)}}_{\to 1}\ \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} = 1.$$

Negli estremi:

- se $y=1$, la serie diventa la a) che diverge.
- se $y=-1$, la serie è $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{2n+3}-1\right)$

che converge per il criterio di Leibniz, in quanto $a_n=\sqrt[n]{2n+3}-1$ è infinitesima e def^{te} decrescente

Infatti $a_n = e^{\frac{\log(2n+3)}{n}}-1$ e l'esponenziale è crescente, quindi basta provare che $\frac{\log(2n+3)}{n}$ è decrescente.

Posto $f(x) = \frac{\ln(2x+3)}{x}$, si ha $f'(x) = \frac{\frac{x}{2x-3} - \ln(2x+3)}{x^2}$

e il numeratore è def^{te} < 0 per $x \to +\infty$.

Quindi $a_n = f(n)$ è def^{te} decrescente.

In definitiva la serie b) converge se e solo se

$$-1 \leq \frac{x}{x-2} < 1,$$ cioè se e solo se $\boxed{x \leq 1}$