1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x| - \sqrt{3}},$$
e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e/o periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

- **Dominio** $\mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$

- **Periodicità e simmetrie** f è periodica di periodo π, inoltre è dispari $\Rightarrow$ basta studiarla in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.
  $\Rightarrow$ in tale intervallo possiamo togliere il valore assoluto.

- **Segno**: In $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$: $f(x) = 0 \iff x = 0$
  $f(x) > 0 \iff \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$
  $f(x) < 0 \iff 0 < x < \frac{\pi}{3}$

- **Limiti significativi**:
  $$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^+} f(x) = +\infty$$
  $$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +1 \quad \left(\text{e quindi } \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = -1 \right)$$
  $x = \frac{\pi}{3}$ è un **asintoto verticale**.

- **Derivata prima**: $f'(x) = -\sqrt{3}\,\dfrac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^2} < 0 \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} \right\}$

Sfruttando la simmetria, f è derivabile anche in $x = 0$, con $f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

f è strettamente decrescente in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ e in $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Non ci sono estremi relativi.

· **Derivata seconda**

$$f''(x) = 2\sqrt{3}\,\frac{(\sqrt{3}\,tg\,x + 1)(1+tg^2 x)}{(tg\,x - \sqrt{3})^3} \qquad \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$$

Per simmetria, f è derivabile due volte in $x=0$, e $f''(0)=0$

$f''(x) = 0 \iff x = 0$

$f''(x) > 0 \iff \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

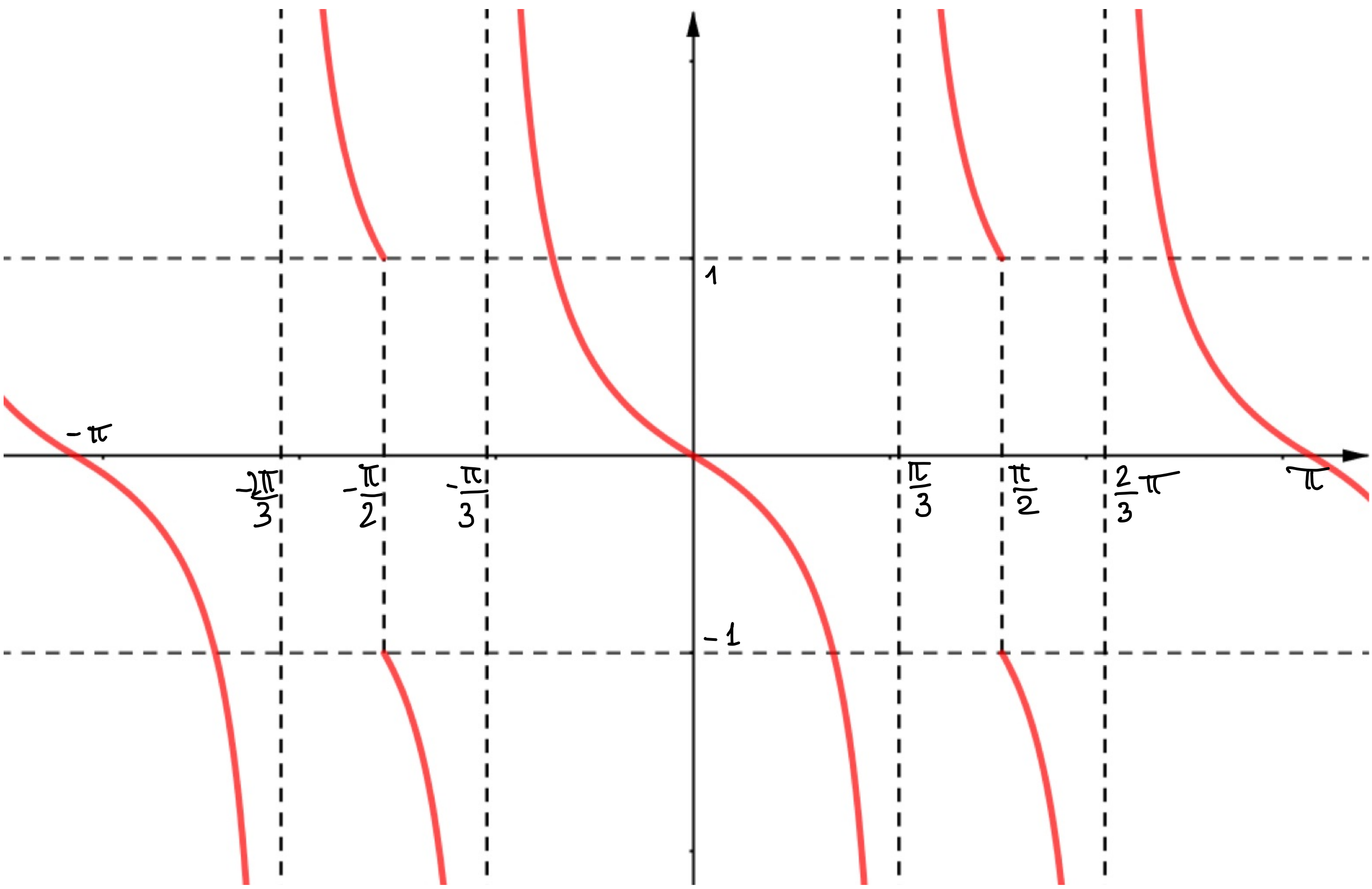
$f''(x) < 0 \iff 0 < x < \frac{\pi}{3}$

f risulta strett. convessa in $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

strett. concava in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$

$x=0$ è un pto di flesso.

Il grafico è il seguente:



2. a) Calcolare $I_1 = \int_0^1 e^{x/3} \sin(\pi x)\, dx$.

b) Trovare una formula iterativa che permetta di calcolare $I_n = \int_0^1 e^{x/3} \sin^n(\pi x)\, dx$ in funzione di I_{n-2}, per $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

a) Integrando per parti due volte:

$$I_1 = \underbrace{3e^{x/3} \sin(\pi x)\Big|_0^1}_{=0} - 3\pi \int_0^1 e^{x/3} \cos(\pi x)\, dx$$

$$= -9\pi\, e^{x/3} \cos(\pi x)\Big|_0^1 - 9\pi^2 \int_0^1 e^{x/3} \sin(\pi x) =$$

$$= 9\pi\left(e^{1/3}+1\right) - 9\pi^2 I_1 \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{9\pi\left(e^{1/3}+1\right)}{1+9\pi^2}}$$

b) Anche qui si integra due volte per parti:

$$I_n = \int_0^1 e^{x/3} \sin^n(\pi x)\, dx =$$

$$= \underbrace{3e^{x/3} \sin^n(\pi x)\Big|_0^1}_{=0} - 3n\pi \int_0^1 e^{x/3} \sin^{n-1}(\pi x) \cos(\pi x)\, dx =$$

$$= \underbrace{-9n\pi e^{x/3} \sin^{n-1}(\pi x) \cos(\pi x)\Big|_0^1}_{=0} +$$

$$+ 9n(n-1)\pi^2 \underbrace{\int_0^1 e^{x/3} \sin^{n-2}(\pi x) \underbrace{\cos^2(\pi x)}_{1-\sin^2(\pi x)}\, dx}_{I_{n-2}-I_n} - 9n\pi^2 \underbrace{\int_0^1 e^{x/3} \sin^n(\pi x) dx}_{I_n}$$

$$= 9n(n-1)\pi^2 I_{n-2} - 9n^2\pi^2 I_n$$

da cui $\left(1+9n^2\pi^2\right) I_n = 9n(n-1)\pi^2 I_{n-2}$, e quindi

$$\boxed{I_n = \frac{9n(n-1)\pi^2}{1+9n^2\pi^2} I_{n-2}}$$

3. Trovare e disegnare tutte le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$-8iz^7 = |z|^2(\overline{z})^2\,.$$

Scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$, l'equazione diventa

$$8\rho^7 e^{i(7\theta - \frac{\pi}{2})} = \rho^4 e^{-2i\theta}$$

da cui $8\rho^7 = \rho^4$ $\begin{cases} \rho = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0} \\ \rho = 1/2 \end{cases}$

$$9\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \theta_k = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{9}, \quad k = 0, 1, \ldots 8$$

$k = 0 \Rightarrow$ $z_0 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{18}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{18}\right)$

$k = 1 \Rightarrow$ $z_1 = \frac{1}{2} e^{i\frac{5\pi}{18}}$

$k = 2 \Rightarrow$ $z_2 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{i}{2}$

$k = 3 \Rightarrow$ $z_3 = \frac{1}{2} e^{i\frac{13}{18}\pi}$

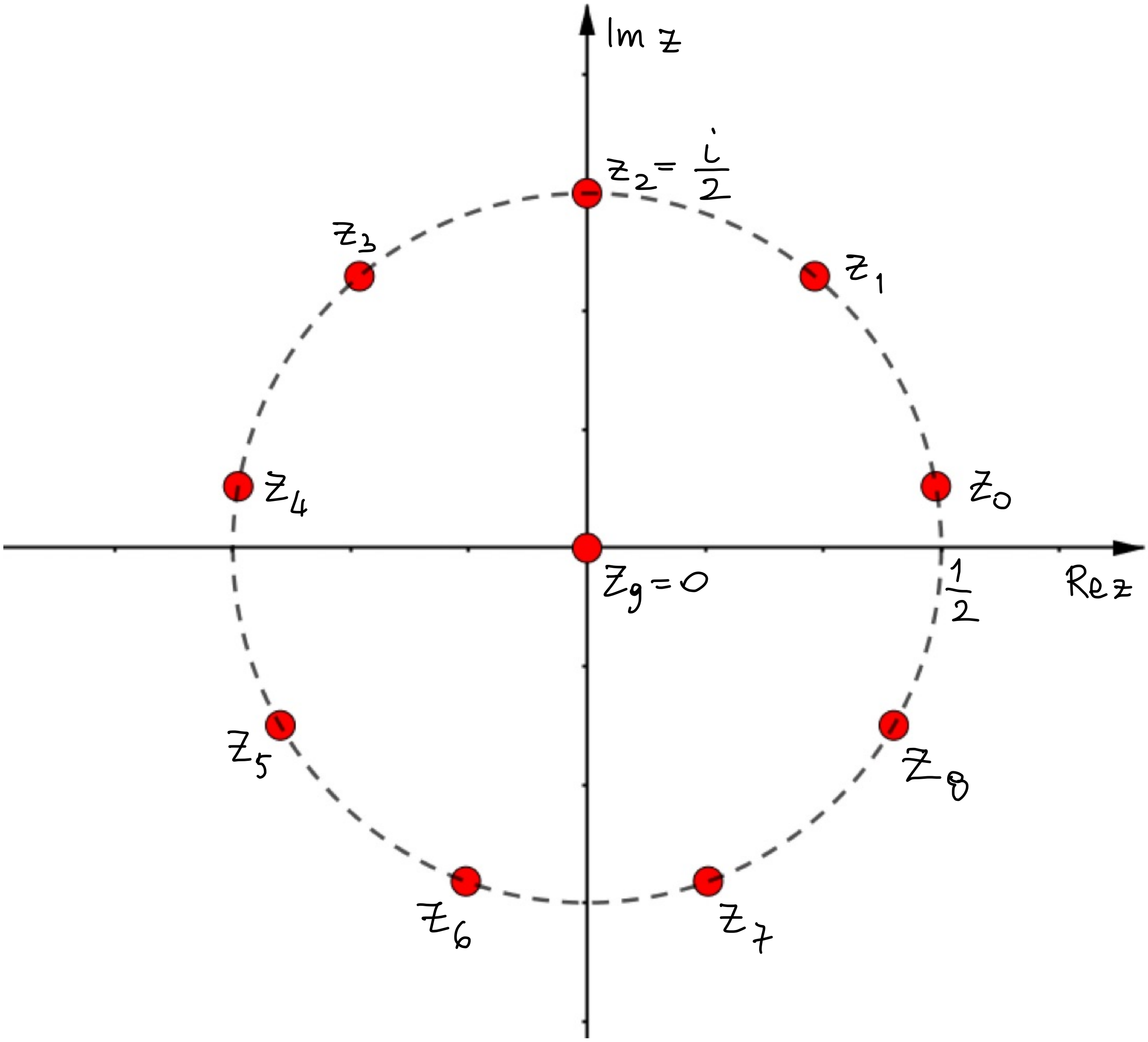
$k = 4 \Rightarrow$ $z_4 = \frac{1}{2} e^{i\frac{17}{18}\pi}$

$k = 5 \Rightarrow$ $z_5 = \frac{1}{2} e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\frac{1}{4}(\sqrt{3} + i)$

$k = 6 \Rightarrow$ $z_6 = \frac{1}{2} e^{i\frac{25\pi}{18}}$

$k = 7 \Rightarrow$ $z_7 = \frac{1}{2} e^{i\frac{29\pi}{18}}$

$k = 8 \Rightarrow$ $z_8 = \frac{1}{2} e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - i)$



Im z
$z_2 = \frac{i}{2}$
z_3
z_1
z_4
z_0
$z_9 = 0$
$\frac{1}{2}$
Re z
z_5
z_8
z_6
z_7

4. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo, per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$, della funzione

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2x^6} + \alpha x^3 + \beta x^5.$$

a) Per $x \to 0^+$, sfruttando lo sviluppo di Maclaurin di $(1+t)^\alpha$, si ha:

$$f(x) = x - x\sqrt{1+2x^4} + \alpha x^3 + \beta x^5 =$$

$$= x - x\left(1 + x^4 - \frac{x^8}{2} + o(x^8)\right) + \alpha x^3 + \beta x^5 =$$

$$= \alpha x^3 + (\beta - 1)x^5 + \frac{x^9}{2} + o(x^9)$$, quindi, per $x \to 0^+$,

- se $\alpha \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 3;
- se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 1$, " " " " " " 5;
- se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, " " " " " " 9.

b) per $x \to +\infty$, si ha:

$$f(x) = x - \sqrt{2}x^3\sqrt{1 + \frac{1}{2x^4}} + \alpha x^3 + \beta x^5 =$$

$$= x - \sqrt{2}x^3\left(1 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) + \alpha x^3 + \beta x^5 =$$

$$= \beta x^5 + (\alpha - \sqrt{2})x^3 + x + o(1)$$, quindi:

- se $\beta \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è un infinito di ordine 5;
- se $\beta = 0$ e $\alpha \neq \sqrt{2}$, " " " " " " 3;
- se $\beta = 0$ e $\alpha = \sqrt{2}$, " " " " " " 1.

5. Studiare la convergenza di ciascuna delle seguenti serie:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[2n]{n}-1\right), \quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[2n]{n}-1\right)\left(\frac{x}{x-3}\right)^n \quad (\text{per } x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}).$$

a) si tratta di una serie a termini positivi.

$$\sqrt[2n]{n}-1 = e^{\frac{\ln n}{2n}} - 1 \sim \frac{\ln n}{2n}$$

Poiché $\frac{\ln n}{2n} \geqslant \frac{1}{n}$ def^{te} per $n\to+\infty$, per confronto con la serie armonica $\boxed{\text{la serie diverge}}$

b) Ponendo $\frac{x}{x-3} = y$, si ottiene una serie di potenze il cui raggio vale

$$r = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[2n]{n}-1}{\sqrt[2n+2]{n+1}-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln n}{2n}}-1}{e^{\frac{\ln(n+1)}{2(n+1)}}-1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}_{\to 1}\ \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} = 1.$$

Negli estremi:

- se $y=1$, la serie diventa la a) che diverge.
- se $y=-1$, la serie è $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\sqrt[2n]{n}-1\right)$

che converge per il criterio di Leibniz, in quanto $a_n = \sqrt[2n]{n}-1$ è infinitesima e def^{te} decrescente

Infatti $a_n = e^{\frac{\ln n}{2n}} - 1$ e l'esponenziale è crescente, quindi basta provare che $\frac{\ln n}{2n}$ è decrescente.

Posto $f(x) = \frac{\ln x}{2x}$, si ha $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{2x^2}$

e il numeratore è def^{te} < 0 per $x \to +\infty$.

Quindi $a_n = f(n)$ è def^{te} decrescente.

In definitiva la serie b) converge se e solo se

$-1 \leq \frac{x}{x-3} < 1$, cioè se e solo se $\boxed{x \leq \frac{3}{2}}$