Cognome e nome .... **N. matricola** ....

Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:

◯ 13 settembre ◯ 20 settembre.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare **una** delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x^{-\log x}\,, \qquad g(x) = x^{|\log x|}\,.$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Dire se la funzione si può estendere anche in $x = 0$ in modo che risulti ivi continua/derivabile. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

---

2. Calcolare l'area della regione limitata del piano cartesiano racchiusa dalle curve di equazione

$$y = \arcsin(2x)\,, \quad y = 0\,, \quad x = \frac{1}{4}\,.$$

---

3. Dato il numero complesso

$$z = 1 + i\sqrt{3}\,,$$

calcolare z^{11}, z^{-11}, $\dfrac{iz}{z+i}$ e le radici quarte di z^8.

---

4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$x - \sqrt[3]{ax^3 - 5x}\ ,\ x \to +\infty\ (a \in \mathbb{R})\ , \qquad 2x - \sin(bx + x^4)\ ,\ x \to 0^+\ (b \in \mathbb{R})\ .$$

---

5. Al variare dei parametri $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3n} + \log\left(\frac{an-b}{n}\right)\right)\,.$$

Punteggi: 1: 7 (f) oppure 9 (g) punti; **2:** 7 punti; **3:** 6 punti; **4:** 7 punti; **5:** 6 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

1. Studiare **una** delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x^{-\log x}, \qquad g(x) = x^{|\log x|}.$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Dire se la funzione si può estendere anche in $x = 0$ in modo che risulti ivi continua/derivabile. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

Cominciamo da $f(x) = x^{-\log x} = e^{-\log^2 x}$

<u>Dominio</u>: $(0,+\infty)$

f è continua nel suo dominio

Non ci sono particolari simmetrie.

<u>Limiti</u>:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = (e^{-\infty}) = 0$$

In particolare se estendiamo f ponendo $f(0)=0$, f risulta continua in $[0,+\infty)$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = (e^{-\infty}) = 0$$

$y=0$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

<u>Derivata prima</u>

f è derivabile in $(0,+\infty)$, e si ha

$$f'(x) = e^{-\log^2 x}\left(-\frac{2\log x}{x}\right)$$

$$f' \gtreqless 0 \iff \log x \lesseqgtr 0 \iff x \lesseqgtr 1.$$

f è strettamente crescente in $(0,1]$,

strettamente decrescente in $[1,+\infty)$

$x_0 = 1$ è pto di massimo assoluto di f. $f(1) = 1$

Inoltre $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{e^{-\log^2 x}}_{\downarrow\ 0} \underbrace{\left(\frac{-2\ln x}{x}\right)}_{\downarrow\ +\infty} =$

(poniamo $t = -\log x \to +\infty$, da cui $x = e^{-t}$)

$$= \lim_{t\to +\infty} e^{-t^2} \frac{2t}{e^{-t}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{2t}{e^{t^2-t}} = 0.$$

Pertanto ponendo $f(0)=0$, la f risulta derivabile in $[0,+\infty)$, e $f'(0)=0$.

Derivata seconda

$$f''(x) = e^{-\log^2 x}\left(\frac{4\log^2 x}{x^2} - 2\,\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{2e^{-\log^2 x}}{x^2}\left(2\log^2 x + \log x - 1\right)$$

$$f''(x) = 0 \iff 2\log^2 x + \log x - 1 = 0 \iff$$

$$(\log x = -1) \vee \left(\log x = \frac{1}{2}\right) \iff \left(x = \frac{1}{e}\right) \vee \left(x = \sqrt{e}\right).$$

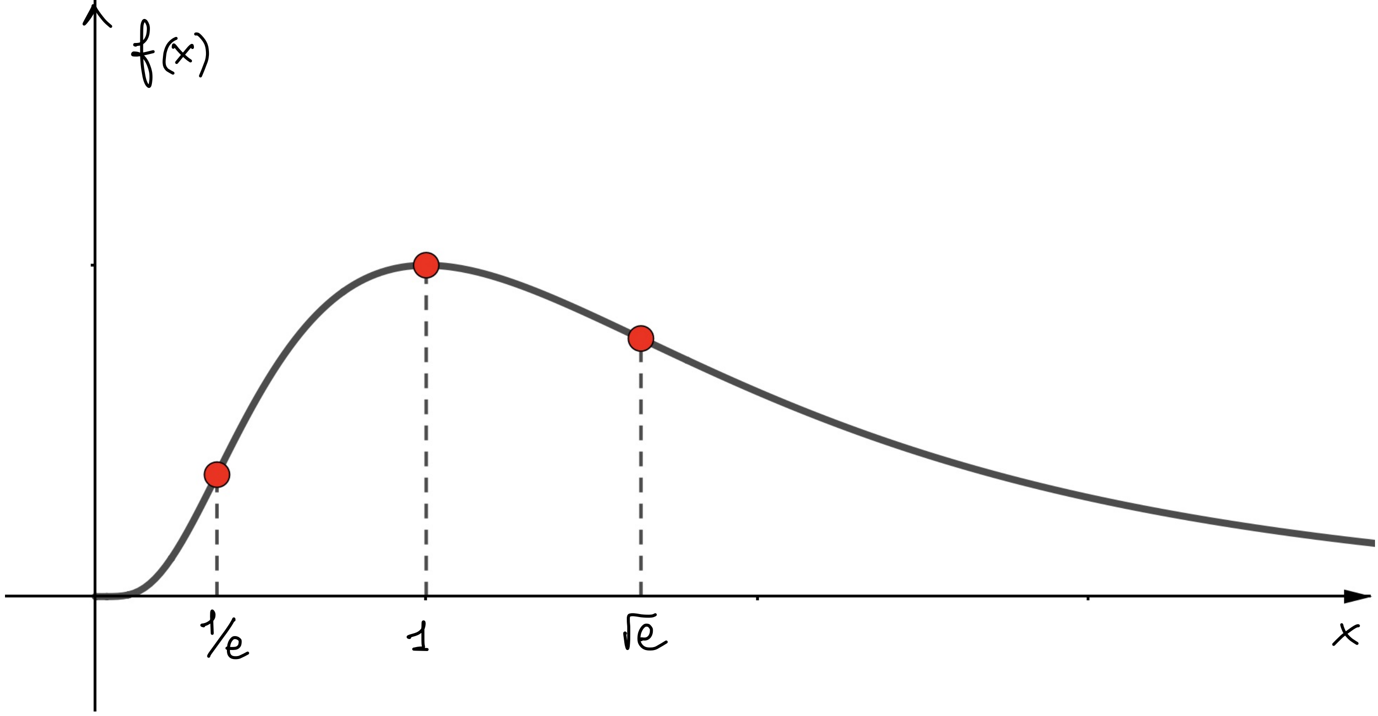
$$f''(x) > 0 \iff 2\log^2 x + \log x - 1 > 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\sqrt{e}, +\infty\right)$$

$f''(x) < 0 \iff x \in \left(\frac{1}{e}, \sqrt{e}\right)$. Quindi:

f è strettamente convessa in $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ e in $\left[\sqrt{e}, +\infty\right)$

strettamente concava in $\left[\frac{1}{e}, \sqrt{e}\right]$

$x = \frac{1}{e}$ e $x = \sqrt{e}$ sono p.ti di flesso



Vediamo ora $g(x) = x^{|\log x|} = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (0,1] \\ x^{\log x} = e^{\log^2 x} & \end{cases}$

Quindi lo studio in $(0,1)$ è già stato fatto, compresa l'estendibilità per $x=0$.

g risulta continua in $(0,+\infty)$.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = (e^{+\infty}) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^{\log x - 1} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty .$$

$\Rightarrow$ g non ammette asintoti obliqui.

<u>Derivata prima</u>

$$g'(x) = \begin{cases} f'(x) = -e^{-\log^2 x} \dfrac{2\log x}{x} & 0 < x < 1 . \\ e^{\log^2 x} \dfrac{2\log x}{x} & x > 1 \end{cases}$$

Poiché $\lim_{x \to 1^{\pm}} g'(x) = 0$, g è derivabile anche in $x=1$, con $g'(1) = 0$

$g'(x) = 0 \iff x = 1$

$g'(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Quindi g è **strettamente crescente** in tutto $(0,+\infty)$.

Derivata seconda

$$g''(x) = \begin{cases} f''(x) = \dfrac{2e^{-\log^2 x}}{x^2}\left(2\log^2 x + \log x - 1\right) & 0 < x < 1 \\ \dfrac{2e^{\log^2 x}}{x^2}\left(2\log^2 x - \log x + 1\right) & x > 1 \end{cases}$$

Poiché $\lim_{x \to 1^\pm} f''(x) = \pm 2$, $f''(1)$ non esiste.

$f''(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e}$

$f''(x) > 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (1,+\infty)$

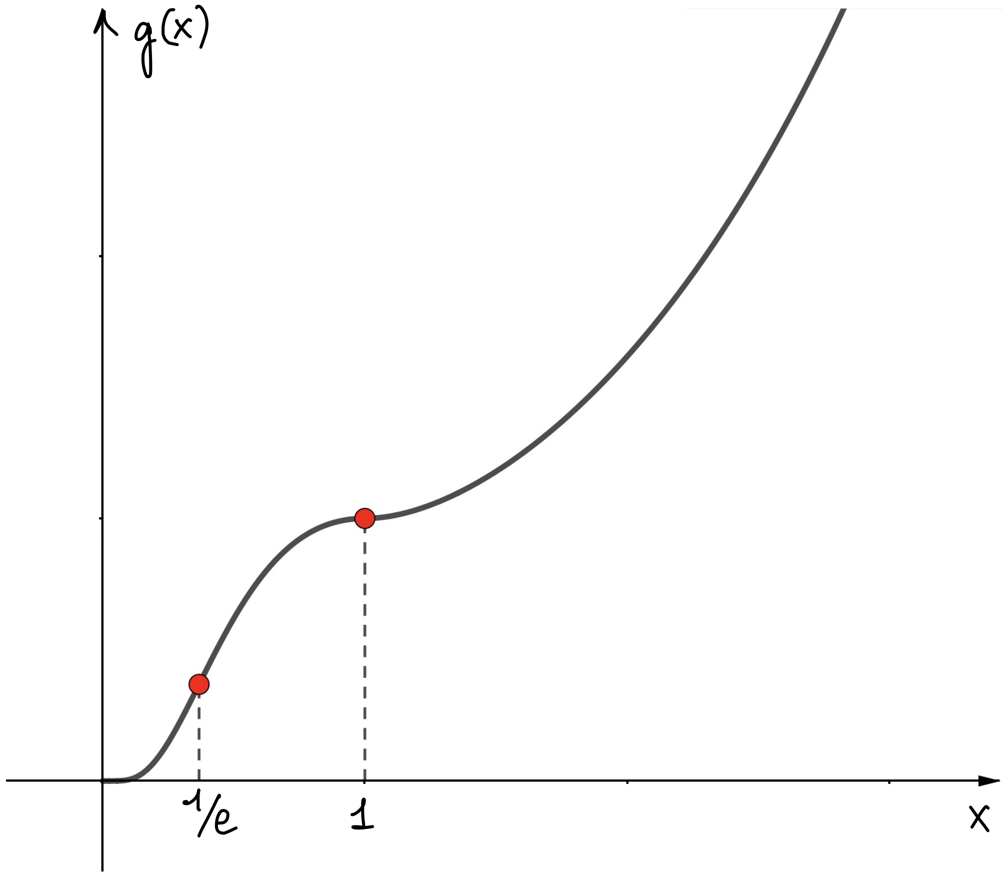
$f''(x) < 0 \iff x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

f risulta **strettamente convessa** in $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ e in $[1,+\infty)$

strettamente concava in $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

I punti $x = \frac{1}{e}$ e $x = 1$ risultano **punti di flesso**

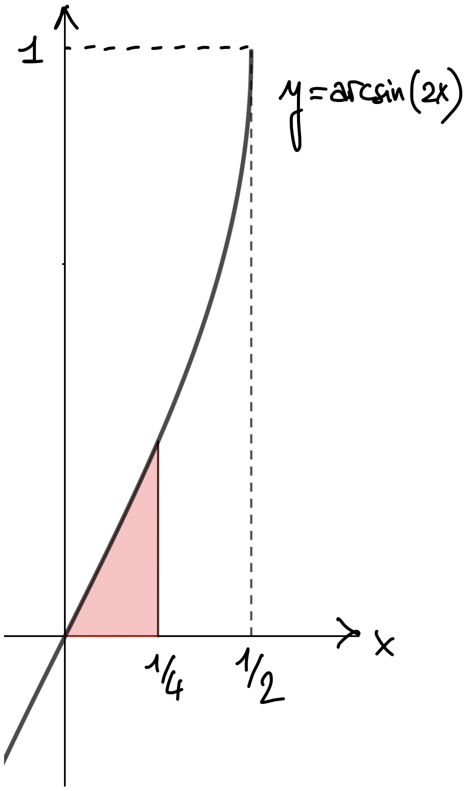
($x = 1$ è flesso a **tangente orizzontale**).



g(x)
1/e
1
x

2. Calcolare l'area della regione limitata del piano cartesiano racchiusa dalle curve di equazione

$$y = \arcsin(2x)\,, \quad y = 0\,, \quad x = \frac{1}{4}\,.$$



Si tratta di calcolare

$$\int_0^{1/4} \operatorname{arcsen}(2x)\,dx \overset{\text{per parti}}{=} x \operatorname{arcsen}(2x)\Big|_0^{1/4} - \int_0^{1/4} \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{1/4} \frac{\overbrace{(-8x)}^{= D(1-4x^2)}}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{24} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}\,\Big|_0^{1/4} = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}$$

[OK, controllato con Mathematica]

3. Dato il numero complesso

$$z = 1 + i\sqrt{3}\,,$$

calcolare z^{11}, z^{-11}, $\dfrac{iz}{z+i}$ e le radici quarte di z^8.

Si ha $\quad z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\Rightarrow \quad z^{11} = 2^{11} e^{i\frac{11\pi}{3}} = 2048\, e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1024\left(1 - i\sqrt{3}\right)$$

$$z^{-11} = \frac{1}{2048} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4096}$$

$$\frac{iz}{z+i} = \frac{i\left(1 + i\sqrt{3}\right)}{1 + i\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i\left(\sqrt{3}+1\right)} \cdot \frac{1 - i\left(\sqrt{3}+1\right)}{1 - i\left(\sqrt{3}+1\right)} =$$

$$= \frac{1 + i\left(4 + \sqrt{3}\right)}{5 + 2\sqrt{3}} =$$ [moltiplicando e dividendo per $5 - 2\sqrt{3}$]

$$= \frac{5 - 2\sqrt{3} + i\left(14 - 3\sqrt{3}\right)}{13}$$ [verificato con Geogebra]

$$z^8 = 2^8 e^{\frac{8}{3}\pi i} = 256\, e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

Le radici quarte di z^8 valgono:

$$W_k = 4 e^{i\theta_k} \quad \text{dove} \quad \theta_k = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$W_0 = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\sqrt{3} + i\right)$$

$$W_1 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(-1 + \sqrt{3}\,i\right)$$

$$W_2 = 4e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(-\sqrt{3} - i\right) = -W_0$$

$$W_1 = 4e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(1 - \sqrt{3}\,i\right) = -W_1 \,.$$

4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$x - \sqrt[3]{ax^3 - 5x}\ ,\ x \to +\infty\ (a \in \mathbb{R})\ , \qquad 2x - \sin(bx + x^4)\ ,\ x \to 0^+\ (b \in \mathbb{R})\ .$$

Poniamo $f(x) = x - \sqrt[3]{ax^3 - 5x} = x\left(1 - \sqrt[3]{a - \frac{5}{x^2}}\right)$

Per $a \neq 1$, questo è un infinito di ordine 1, essendo $f(x) \sim (1 - \sqrt[3]{a})\,x$

Se $a = 1$, allora

$$f(x) = x \underbrace{\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x^2}}\right)}_{\sim \frac{5}{3x^2}} \sim \frac{5}{3x} \quad \left(\begin{array}{l}\text{infinitesimo}\\ \text{di ordine 1}\\ \text{per } x \to +\infty\end{array}\right)$$

Ne segue che, per $x \to +\infty$:

f è un infinito di ordine 1 se $a \neq 1$

f è un infinitesimo di ordine 1 se $a = 1$

Sia $g(x) = 2x - \sin(bx + x^4)$

Se $b = 0$ $\quad g(x) = x\left(2 - \boxed{\frac{\sin(x^4)}{x}}\right) \sim 2x$, $\quad \frac{\sin(x^4)}{x} \to 0$

Se $b \neq 0$, $b \neq 2$, $\quad g(x) = x\left(2 - \frac{\sin(bx + x^4)}{x}\right) \sim (2 - b)\,x$, $\quad \frac{\sin(bx + x^4)}{x} \to b$

[in quanto $\sin(bx + x^4) \sim bx + x^4 \sim bx$]

Infine se $b=2$ occorre usare il polinomio di Taylor,

$$\sin(2x+x^4) = 2x+x^4 - \frac{(2x+x^4)^3}{6} + o\left((2x+x^4)^3\right) =$$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

Quindi $\quad g(x) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{4}{3}x^3.$

Ne segue che, per $x \to 0^+$,

$$g(x) \text{ è un infinitesimo } \begin{cases} \text{di ordine } 1 & \text{se } b \neq 2 \\ \text{di ordine } 3 & \text{se } b = 2 \end{cases}$$

5. Al variare dei parametri $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3n} + \log\left(\frac{an - b}{n} \right) \right).$$

Il termine $a_n = \dfrac{1}{3n} + \log\left(\dfrac{an-b}{n}\right)$ è infinitesimo solo per $a = 1$. Per $a \neq 1$ la serie non può convergere.

Consideriamo quindi $a = 1$.

$$a_n = \frac{1}{3n} + \log\left(1 - \frac{b}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{3} \underbrace{- n\log\left(1 - \frac{b}{n}\right)}_{\to b}\right)$$

Pertanto se $b \neq -\frac{1}{3}$ si ha $a_n \sim \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{3} + b\right)$, la serie è definitivamente a termini positivi se $b > -\frac{1}{3}$, negativi se $b < -\frac{1}{3}$, e diverge per il confronto asintotico con la serie armonica.

Resta solo il caso $a = 1$, $b = -\frac{1}{3}$. In tal caso, usando lo sviluppo di MacLaurin di $\log(1+x)$, si ottiene

$$a_n = \frac{1}{3n} - \log\left(1 - \frac{1}{3n}\right) = \cancel{\frac{1}{3n}} + \cancel{\frac{1}{3n}} + \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{18n^2}$$

e la serie converge per il confronto con la serie $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Quindi la serie converge se e solo se $a = 1$, $b = -\frac{1}{3}$.