1. Studiare **una** delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x^{-\log x}, \qquad g(x) = x^{|\log x|}.$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Dire se la funzione si può estendere anche in $x = 0$ in modo che risulti ivi continua/derivabile. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

Cominciamo da $f(x) = x^{-\log x} = e^{-\log^2 x}$

Dominio: $(0,+\infty)$

f è continua nel suo dominio

Non ci sono particolari simmetrie.

Limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = (e^{-\infty}) = 0$$

In particolare se estendiamo f ponendo $f(0)=0$, f risulta continua in $[0,+\infty)$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = (e^{-\infty}) = 0$$

$y=0$ asintoto orizzontale per $x\to+\infty$.

Derivata prima

f è derivabile in $(0,+\infty)$, e si ha

$$f'(x) = e^{-\log^2 x}\left(-\frac{2\log x}{x}\right)$$

$$f' \gtrless 0 \iff \log x \lesseqgtr 0 \iff x \lesseqgtr 1.$$

f è strettamente crescente in $(0,1]$,

strettamente decrescente in $[1,+\infty)$

$x_0 = 1$ è p.to di massimo assoluto di f. $f(1) = 1$

Inoltre $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{e^{-\log^2 x}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\left(\frac{-2\ln x}{x}\right)}_{\downarrow\, +\infty} =$

(poniamo $t = -\log x \to +\infty$, da cui $x = e^{-t}$)

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{-t^2} \frac{2t}{e^{-t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{e^{t^2-t}} = 0.$$

Pertanto ponendo $f(0)=0$, la f risulta derivabile in $[0,+\infty)$, e $f'(0)=0$.

Derivata seconda

$$f''(x) = e^{-\log^2 x}\left(\frac{4\log^2 x}{x^2} - 2\,\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{2e^{-\log^2 x}}{x^2}\left(2\log^2 x + \log x - 1\right)$$

$$f''(x) = 0 \iff 2\log^2 x + \log x - 1 = 0 \iff$$

$$(\log x = -1) \vee \left(\log x = \frac{1}{2}\right) \iff \left(x = \frac{1}{e}\right) \vee \left(x = \sqrt{e}\right).$$

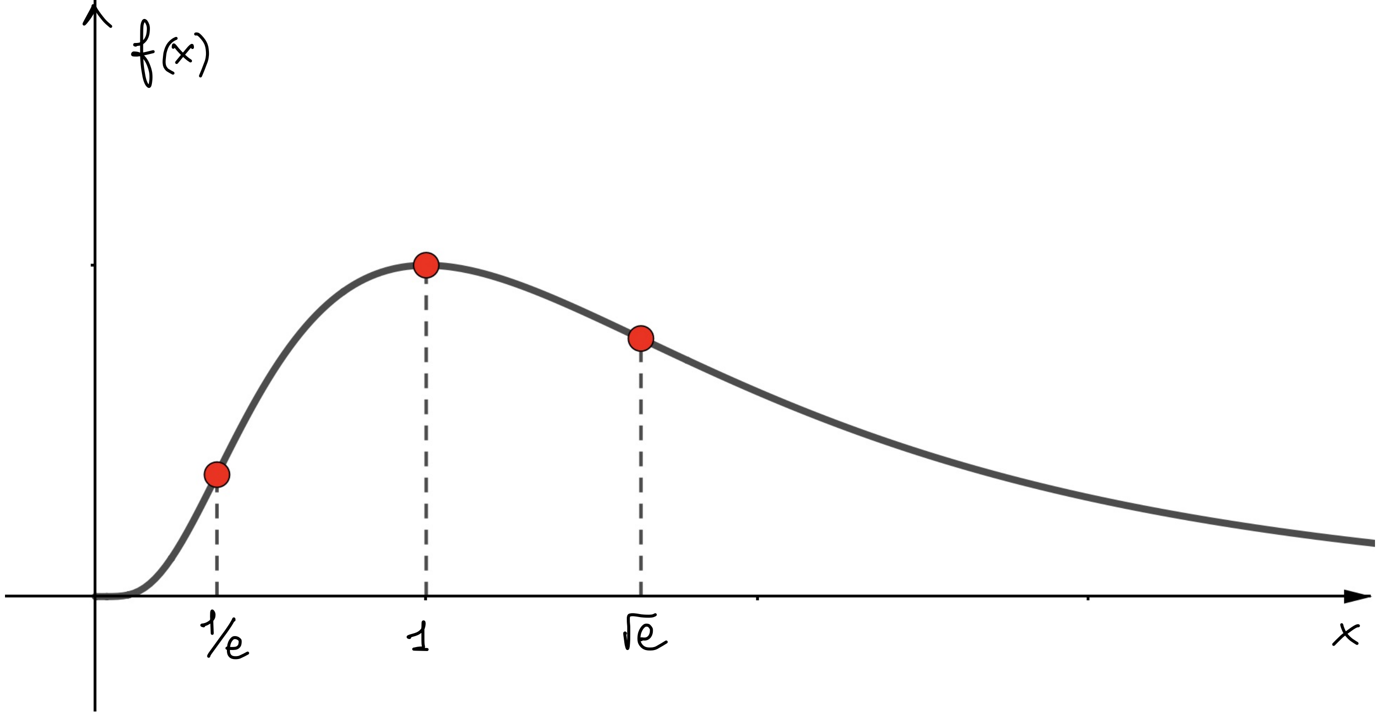
$$f''(x) > 0 \iff 2\log^2 x + \log x - 1 > 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\sqrt{e}, +\infty\right)$$

$f''(x) < 0 \iff x \in \left(\frac{1}{e}, \sqrt{e}\right)$. Quindi:

f è strettamente convessa in $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ e in $[\sqrt{e}, +\infty)$

strettamente concava in $\left[\frac{1}{e}, \sqrt{e}\right]$

$x = \frac{1}{e}$ e $x = \sqrt{e}$ sono p.ti di flesso



Vediamo ora $g(x) = x^{|\log x|} = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (0,1] \\ x^{\log x} = e^{\log^2 x} & \end{cases}$

Quindi lo studio in $(0,1)$ è già stato fatto, compresa l'estendibilità per $x=0$.

g risulta continua in $(0,+\infty)$.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = (e^{+\infty}) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^{\log x - 1} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty.$$

$\Rightarrow$ g non ammette asintoti obliqui.

Derivata prima

$$g'(x) = \begin{cases} f'(x) = -e^{-\log^2 x} \dfrac{2\log x}{x} & 0 < x < 1. \\ e^{\log^2 x} \dfrac{2\log x}{x} & x > 1 \end{cases}$$

Poiché $\lim_{x \to 1^\pm} g'(x) = 0$, g è derivabile anche in $x=1$, con $g'(1) = 0$

$g'(x) = 0 \iff x = 1$

$g'(x) > 0 \qquad \forall x \in (0,1) \cup (1,+\infty).$

Quindi g è strettamente crescente in tutto $(0,+\infty)$.

<u>Derivata seconda</u>

$$g''(x) = \begin{cases} f''(x) = \dfrac{2e^{-\log^2 x}}{x^2}\left(2\log^2 x + \log x - 1\right) & 0 < x < 1 \\ \dfrac{2e^{\log^2 x}}{x^2}\left(2\log^2 x - \log x + 1\right) & x > 1 \end{cases}$$

Poiché $\lim_{x \to 1^\pm} f''(x) = \pm 2$, $f''(1)$ non esiste.

$f''(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e}$

$f''(x) > 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (1,+\infty)$

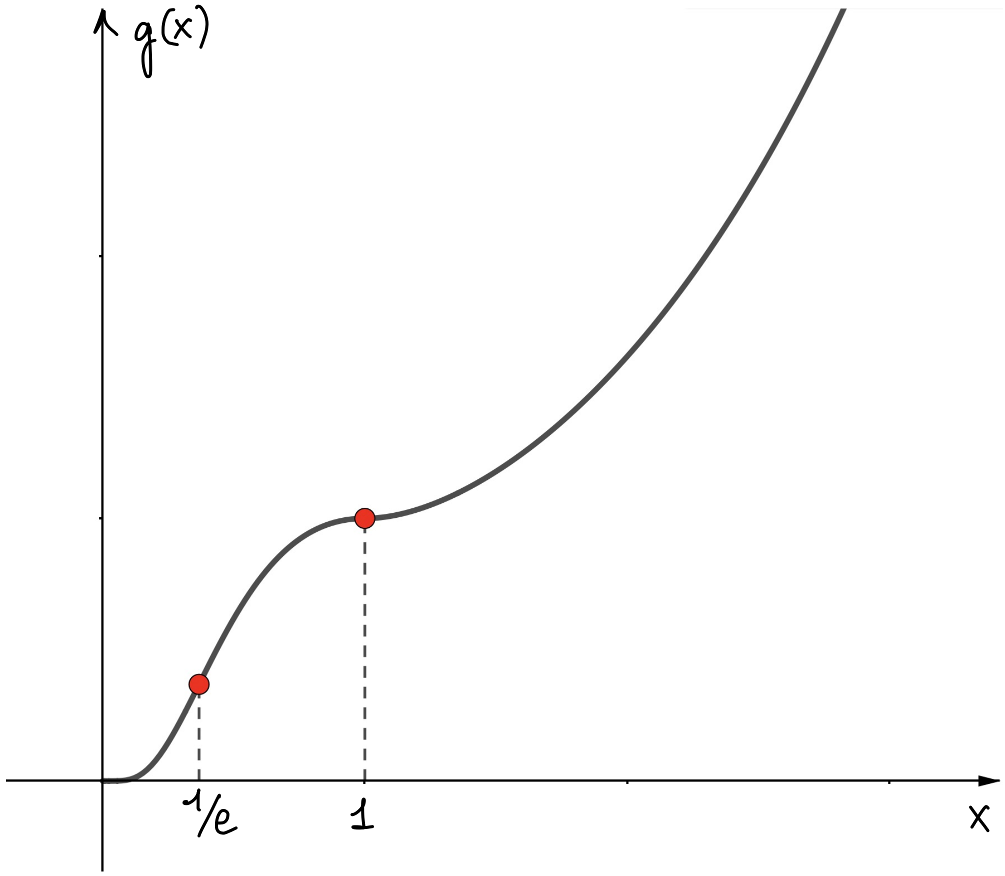
$f''(x) < 0 \iff x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right).$

f risulta strettamente convessa in $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ e in $[1,+\infty)$

strettamente concava in $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

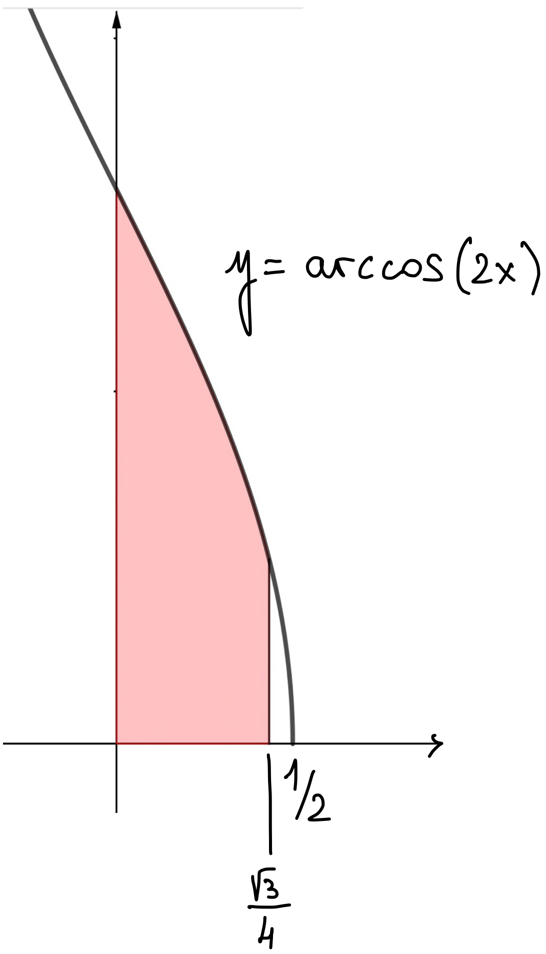
I punti $x = \frac{1}{e}$ e $x = 1$ risultano punti di flesso

($x = 1$ è flesso a tangente orizzontale).


g(x)
1/e
1
x

2. Calcolare l'area della regione limitata del piano cartesiano racchiusa dalle curve di equazione

$$y = \arccos(2x)\,, \quad y = 0\,, \quad x = 0\,, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$



Si tratta di calcolare

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \arccos(2x)\,dx = \text{[per parti]}$$

$$= x\arccos(2x)\Big|_0^{\sqrt{3}/4} + \int_0^{\sqrt{3}/4} \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}/4} \frac{\overbrace{(-8x)}^{=\,D(1-4x^2)}}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}/4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi + \frac{1}{4}$$

[ok, controllato con Mathematica]

3. Dato il numero complesso

$$z = 1 - i\sqrt{3},$$

calcolare z^{11}, z^{-11}, $\dfrac{iz}{z+i}$ e le radici quarte di z^8.

Si ha $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$\Rightarrow \quad z^{11} = 2^{11} e^{-i\frac{11\pi}{3}} = 2048\, e^{i\frac{\pi}{3}} = 1024\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

$$z^{-11} = \frac{1}{2048} e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4096}$$

$$\frac{iz}{z+i} = \frac{i\left(1 - i\sqrt{3}\right)}{1 + i\left(1 - \sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{3} + i}{1 + i\left(1-\sqrt{3}\right)} \cdot \frac{1 - i\left(1 - \sqrt{3}\right)}{1 - i\left(1-\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{1 + i\left(4 - \sqrt{3}\right)}{5 - 2\sqrt{3}} =$$ [moltiplicando e dividendo per $5 + 2\sqrt{3}$]

$$= \frac{5 + 2\sqrt{3} + i\left(14 + 3\sqrt{3}\right)}{13}$$ [verificato con Geogebra]

$$z^8 = 2^8 e^{-\frac{8}{3}\pi i} = 256\, e^{-\frac{2}{3}\pi i}$$

Le radici quarte di z^8 valgono:

$$w_k = 4\, e^{i\theta_k} \quad \text{dove} \quad \theta_k = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$w_0 = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\sqrt{3} - i\right)$$

$$w_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(1 + \sqrt{3}\, i\right)$$

$$w_2 = 4e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(-\sqrt{3} + i\right) = -w_0$$

$$w_1 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}} = -2\left(1 + \sqrt{3}\, i\right) = -w_1 .$$

4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$\sqrt[3]{ax^3+4x}-2x\ ,\ x\to+\infty\ (a\in\mathbb{R})\ ,\qquad \sin(bx+x^5)-3x\ ,\ x\to 0^+\ (b\in\mathbb{R})\ .$$

Posto $f(x)=\sqrt[3]{ax^3+4x}-2x=x\left(\sqrt[3]{a+\frac{4}{x^2}}-2\right)$

Per $a\neq 8$ si ha

$$f(x)=x\left(\sqrt[3]{a+\frac{4}{x^2}}-2\right)\sim\left(\sqrt[3]{a}-2\right)x \quad \text{per } x\to+\infty.$$

Se $a=8$, allora

$$f(x)=2x\underbrace{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{2x^2}}-1\right)}_{\sim\frac{1}{6x^2}}\sim\frac{1}{3x}\quad \text{per } x\to+\infty.$$

Quindi, per $x\to+\infty$:

$f(x)$ è un infinito di ordine 1 se $a\neq 8$

$f(x)$ è un infinitesimo di ordine 1 se $a=8$

Poniamo ora $g(x)=\operatorname{sen}(bx+x^5)-3x$.

Se $b=0$, $g(x)=x\left(\frac{\operatorname{sen}(x^5)}{x}-3\right)\sim-3x$ per $x\to0^+$

$$\frac{\operatorname{sen}(x^5)}{x}\to 0$$

Se $b\neq0$, $b\neq3$,

$$g(x)=x\left(\frac{\operatorname{sen}(bx+x^5)}{x}-3\right)\sim(b-3)x\quad \text{per } x\to0^+$$

$$\frac{\operatorname{sen}(bx+x^5)}{x}\to b$$

[in quanto $\operatorname{sen}(bx+x^5)\sim bx+x^5\sim bx$

Se $b = 3$, bisogna usare lo sviluppo di Taylor:

$$\operatorname{sen}(3x + x^5) = (3x + x^5) - \frac{(3x+x^5)^3}{6} + o\left((3x+x^5)^3\right) =$$

$$= 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Pertanto $g(x) = -\frac{9}{2}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{9}{2}x^3$ per $x \to 0^+$

Ne segue che, per $x \to 0^+$,

$$g(x) \text{ è un infinitesimo } \begin{cases} \text{di ordine } 1 & \text{se } b \neq 3 \\ \text{di ordine } 3 & \text{se } b = 3 \end{cases}$$

5. Al variare dei parametri $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\log\left(\frac{an+b}{n}\right) - \frac{5}{n} \right).$$

Il termine $a_n = \log\left(\frac{an+b}{n}\right) - \frac{5}{n}$ è infinitesimo solo per $a = 1$. Per $a \neq 1$ la serie non può convergere.

Consideriamo quindi $a = 1$. In tal caso

$$a_n = \log\left(1 + \frac{b}{n}\right) - \frac{5}{n} = \frac{1}{n}\Big(\underbrace{n \log\left(1+\frac{b}{n}\right)}_{\to b} - 5 \Big)$$

Pertanto se $b \neq 5$ si ha $a_n \sim \frac{b-5}{n}$

la serie è definitivamente a termini positivi se $b > 5$, negativi se $b < 5$, e diverge per il confronto asintotico con la serie armonica.

Resta solo il caso $a = 1$, $b = 5$. In tal caso, usando lo sviluppo di MacLaurin di $\log(1+x)$, si ottiene

$$a_n = \log\left(1+\frac{5}{n}\right) - \frac{5}{n} = \cancel{\frac{5}{n}} - \frac{25}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{\frac{5}{n}} =$$

$$= -\frac{25}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{25}{2n^2}.$$

La serie è definitivamente a termini negativi, e converge per il confronto con la serie $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Quindi la serie converge se e solo se $a = 1$, $b = 5$.