1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|x|}{3} - \cos^2 x\,, \qquad \diamondsuit$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

- f è pari, la studio per $x \geq 0$ (tolgo il modulo).

$$f(x) = \frac{x}{3} - \cos^2 x = \frac{x}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) \qquad \forall x \geq 0.$$

- f è continua nel suo dominio
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ("infinita + limitata").
- Non ammette asintoto obliquo.
- f non è periodica, tuttavia $f(x+\pi) = f(x) + \frac{\pi}{3}$ $\forall x \geq 0$.

- f derivabile per $x \neq 0$
- $f'_+(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow f'_-(0) = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = 0$ <u>pto angoloso</u>.

<u>Studio della monotonia per $x \geq 0$:</u>

- $f'(x) = \frac{1}{3} + \operatorname{sen}(2x)$ per $x > 0$
- f strett. crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right]$ e in

$$\left[-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{3} + k\pi\,,\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{3} + k\pi\right] \quad (k = 1, 2, \dots)$$

- f strettamente decrescente in

$$\left[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsen\frac{1}{3}+k\pi\,,\,\pi-\frac{1}{2}\arcsen\frac{1}{3}+k\pi\right] \quad (k\in\mathbb{N})$$

- I punti $x=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsen\frac{1}{3}+k\pi$ $(k\in\mathbb{N})$ sono pti di max. rel. stretto.

- i punti $x= -\frac{1}{2}\arcsen\frac{1}{3}+k\pi$ $(k=1,2,\dots)$ sono pti di min. rel. stretto.

- il punto $x=0$ è di minimo relativo (e anche assoluto

$$f''(x) = 2\cos(2x) \qquad \forall x\neq 0.$$

- <u>Studio della convessità/concavità</u> per $x\geq 0$:

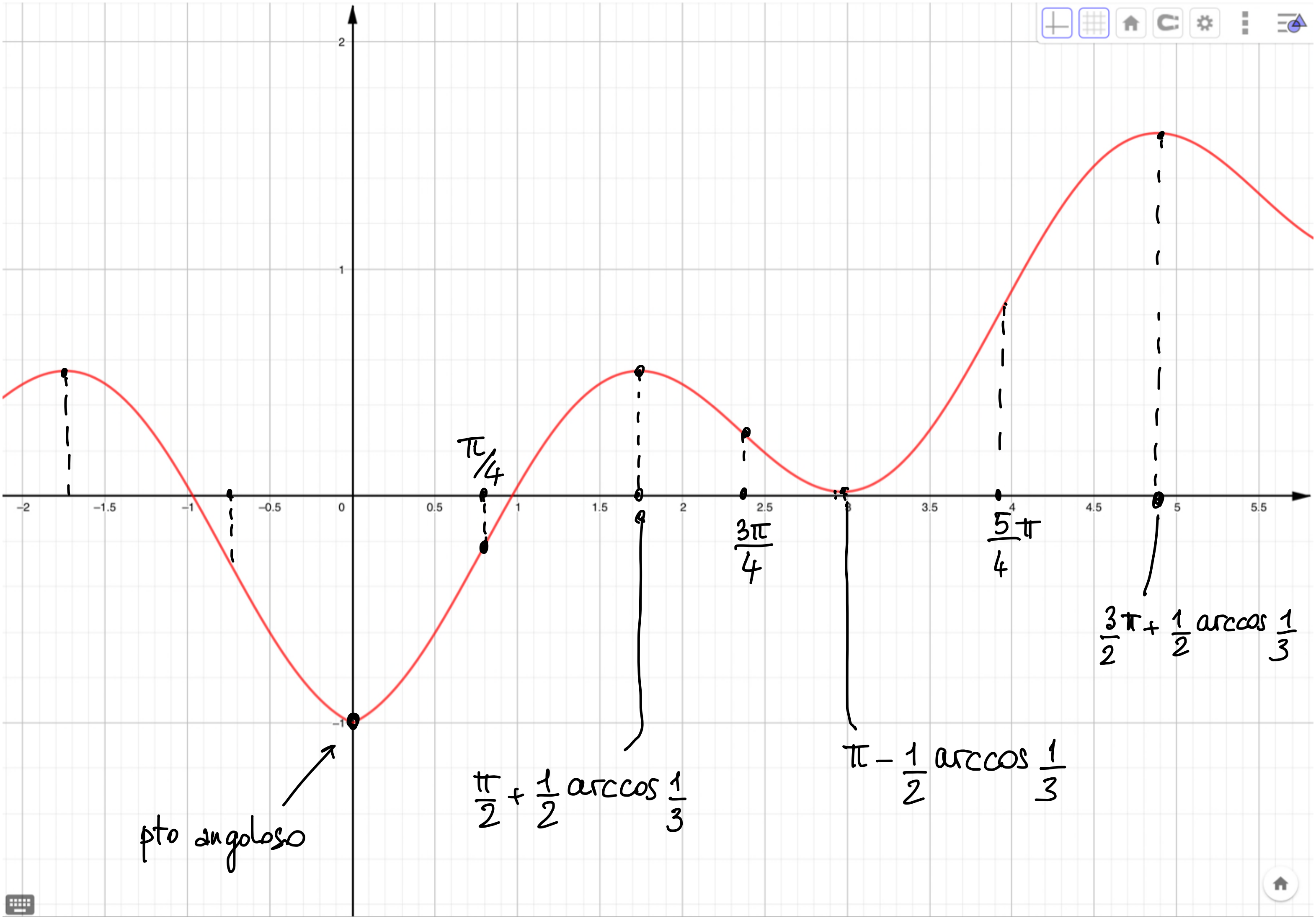
f strettamente concava negli intervalli

$$\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \frac{3}{4}\pi+k\pi\right] \qquad (k\in\mathbb{N})$$

f strettamente convessa negli intervalli

$$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\ ,\ \left[\frac{3}{4}\pi+k\pi,\ \frac{5}{4}\pi+k\pi\right] \quad (k\in\mathbb{N})$$

I punti $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ sono pti di flesso.



π/4
3π/4
5π/4
pto angoloso
π/2 + 1/2 arccos 1/3
π − 1/2 arccos 1/3
3/2 π + 1/2 arccos 1/3

2. Per $n \in \mathbb{N}$, sia
$$I_n = \int_0^1 (x^4+3)^n \, dx \,. \qquad \diamondsuit$$
Trovare una formula iterativa che esprima I_n in funzione di I_{n-1}

$$I_n = \int_0^1 (x^4+3)^n \, dx = [\text{per parti}]$$

$$= x(x^4+3)^n \Big|_0^1 - 4n \int_0^1 x^4 (x^4+3)^{n-1} dx =$$

$$= 4^n - 4n \int_0^1 (x^4+3-3)(x^4+3)^{n-1} dx =$$

$$= 4^n - 4n I_n + 12n I_{n-1}$$

Pertanto

$$I_n = \frac{4^n}{4n+1} + \frac{12n}{4n+1} I_{n-1}$$

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$\frac{z^2|\overline{z}|}{8-|z|} = 4iz\ , \qquad w^8 - 12w^4 - 64 = 0\ .$$

◇

(A) Ovviamente $z=0$ è una soluzione. Dividendo per z (e seguendo la C.E. $|z| \neq 8$) l'eq^{ne} diventa

$$z|\overline{z}| = 4i\,(8-|z|)$$

$\Rightarrow$ $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$ (z immaginario puro)

y deve risolvere

$$y|y| = 4(8-|y|)$$

Studiando separatamente $y \geq 0$ e $y<0$ si trova $y=4$

Quindi le soluzioni sono $z_1 = 0$ e $z_2 = 4i$

(B) Ponendo $w^4 = z$, si ottiene un'eq^{ne} di 2° grado che ha per soluzioni

$$w^4 = -4\ , \qquad w^4 = 16$$

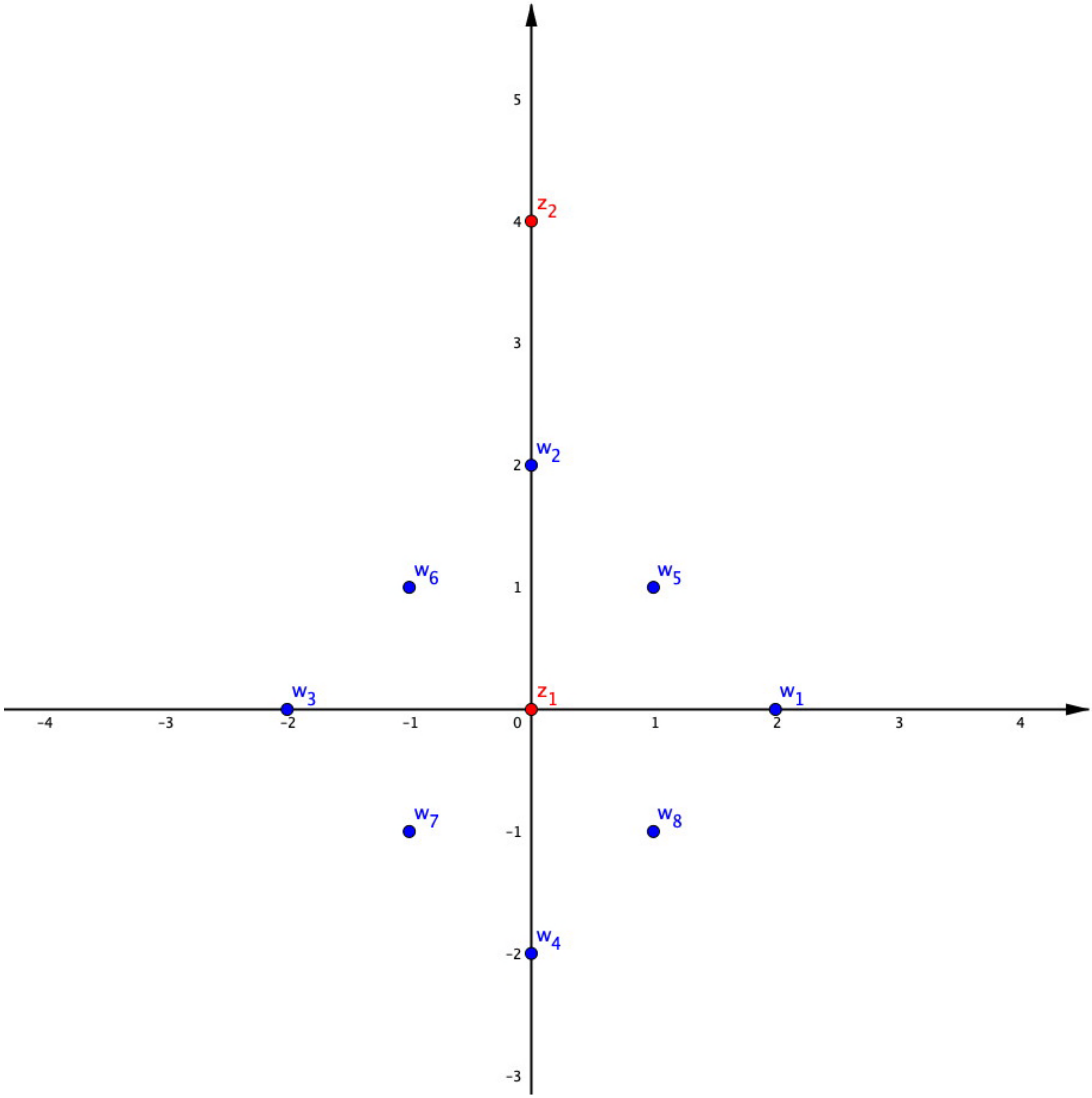
$$w^4 = 16 \Longleftrightarrow w = 2e^{i\frac{k\pi}{2}} \quad (k=0,1,2,3) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (w = \pm 2) \vee (w = \pm 2i)$$

$$w^4 = -4 \iff w = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)} \iff$$

$$\iff \quad w = \pm 1 \pm i$$

segni presi a piacimento
4 soluzioni.



4. Calcolare l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni:

$\diamondsuit$

$f(x) = \ln(x^3 - 7)$ (per $x \to 2^+$) , $\quad g(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{x} + \frac{1}{x^\alpha}$ (per $x \to +\infty$, al variare di $\alpha > 0$) .

(A) per $x \to 2^+$ si ha

$$f(x) = \ln(x^3 - 7) = \ln(1 + \underbrace{(x^3 - 8)}_{\downarrow\, 0}) \sim x^3 - 8 =$$

$$= (x-2)\underbrace{(x^2 + 2x + 4)}_{\downarrow\, 12} \sim 12(x-2)$$

$\Rightarrow f(x)$ è un infinitesimo di ordine 1.

(B) per $x \to +\infty$ si ha:

$$g(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 1\right) + \frac{1}{x^\alpha} =$$

$\left[\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2) \text{ per } t \to 0\right]$

$$= \sqrt{x}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + \frac{1}{x^\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) + \frac{1}{x^\alpha}$$

Quindi: • se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $g(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$

(infinitesimo di ordine α.)

- Se $\alpha = \frac{1}{2}$, $g(x) \sim -\frac{1}{2x^{3/2}}$

  infinitesimo di ordine $3/2$

- Se $\alpha > \frac{1}{2}$, $g(x) \sim -\frac{1}{\sqrt{x}}$

  infinitesimo di ordine $1/2$.

5. Al variare dei parametri $\alpha > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^\alpha + 2}{n^\alpha + 3\sqrt{n}}\right), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^3 + 2}{n^3 + 3\sqrt{n}}\right)(x-1)^n. \qquad \diamondsuit$$

(A)

$$\frac{n^\alpha + 2}{n^\alpha + 3\sqrt{n}} \xrightarrow{n} \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \alpha > 1/2 \\ 1/4 & \text{se} \quad \alpha = 1/2 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < \alpha < 1/2. \end{cases}$$

Ne segue che per $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ il termine della serie non è infinitesimo $\Rightarrow$ la serie non converge (diverge a $-\infty$).

Se $\alpha > \frac{1}{2}$, allora

$$\ln\left(\frac{n^\alpha + 2}{n^\alpha + 3\sqrt{n}}\right) = \ln\Big(1 - \underbrace{\frac{3\sqrt{n} - 2}{n^\alpha + 3\sqrt{n}}}_{\to 0}\Big) \sim -\frac{3\sqrt{n} - 2}{n^\alpha + 3\sqrt{n}} \sim -\frac{3}{n^{\alpha - 1/2}}$$

Quindi la serie è definitivamente a termini negativi, e converge se e solo se $\alpha - 1/2 > 1 \iff \alpha > \frac{3}{2}$ (confronto con la serie armonica generalizzata)

In definitiva la serie converge $\iff \alpha > \frac{3}{2}$.

(B) Si tratta di una serie di potenze.

Poiché, per l'analisi precedente,

$$a_n := \ln\left(\frac{n^3+2}{n^3+3\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{1}{n^{5/2}}, \quad \text{si ha}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1,$$ pertanto il raggio di convergenza vale 1.

$\Rightarrow$ La serie converge per $|x-1|<1 \iff 0<x<2$

La serie non converge per $|x+1|>1 \iff (x<0) \vee (x>2)$

Per $x=0$ e $x=2$ la serie converge assolutam., in quanto

$$|a_n| \sim \frac{1}{n^{5/2}}.$$

Pertanto la serie converge se e solo se $0 \leq x \leq 2$.