1. Studiare la funzione
$$f(x) = \cos^2 x + \frac{|x|}{4}\,,$$
♣

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

- f è pari, la studio per $x \geq 0$ (tolgo il modulo).

$$f(x) = \cos^2 x + \frac{x}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{x}{4}. \qquad \forall x \geq 0.$$

- f è continua nel suo dominio
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ("infinita + limitata").
- Non ammette asintoto obliquo.
- f non è periodica, tuttavia $f(x+\pi) = f(x) + \frac{\pi}{4}$ $\forall x \geq 0$.

- f derivabile per $x \neq 0$
- $f'_+(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow f'_-(0) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = 0$ <u>pto angoloso</u>.

<u>Studio della monotonia per $x \geq 0$:</u>

- $f'(x) = -\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}$ per $x > 0$

- f strett. crescente in $\left[0, \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{4}\right]$ e in

$$\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{4} + k\pi,\ \pi + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{4} + k\pi\right] \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

• f strettamente decrescente in

$$\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}+k\pi\,,\ \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}+k\pi\right]\ (k\in\mathbb{N})$$

• I punti $x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbb{N})$ sono pti di max. rel. stretto.

• i punti $x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbb{N})$ sono pti di min. rel. stretto.

Per $k=0$ è anche min. assoluto.

• il punto $x=0$ è di minimo relativo

$$f''(x) = -2\cos(2x) \quad \forall x\neq 0.$$

• <u>Studio della convessità/concavità</u> per $x\geq 0$:

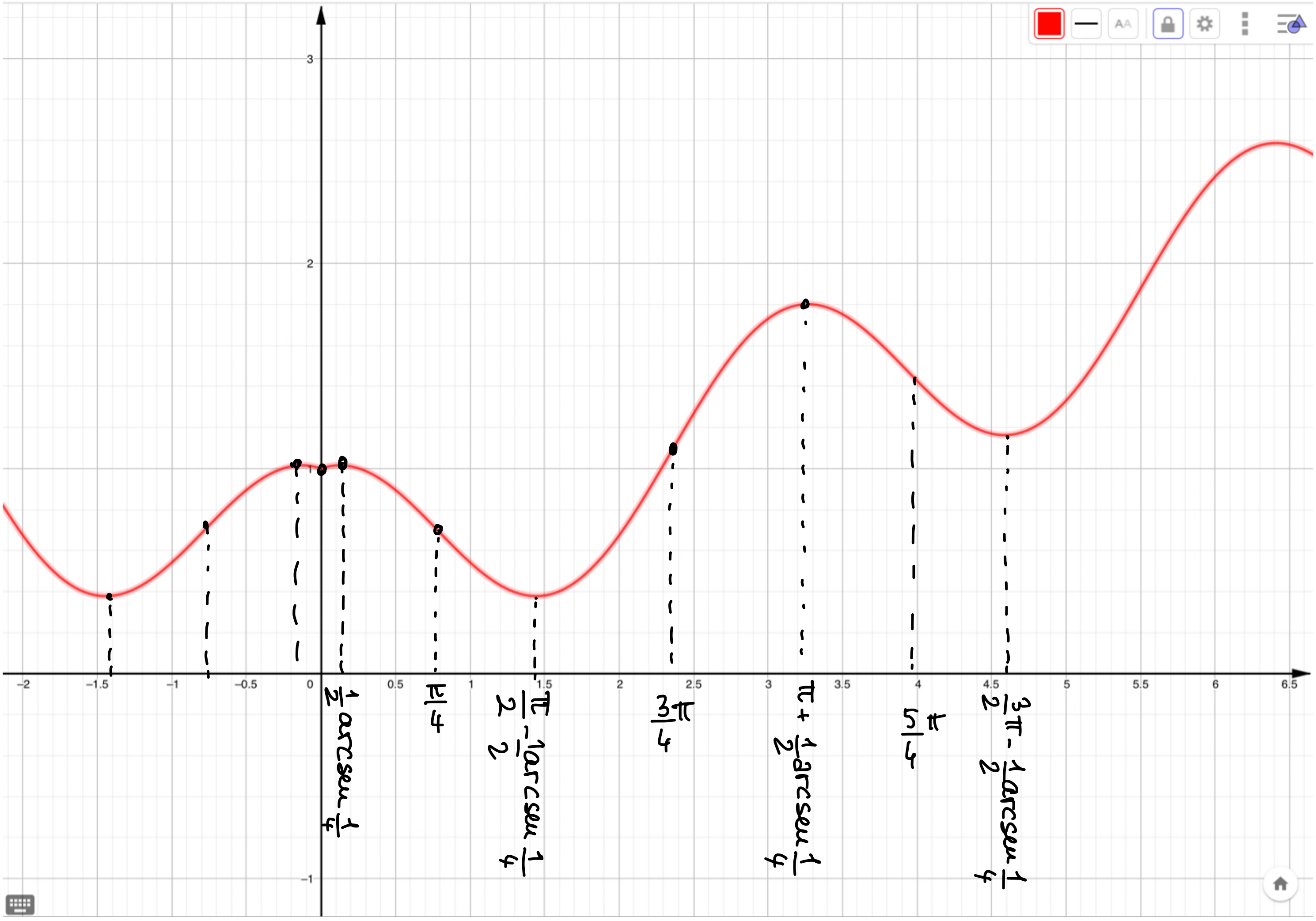
f strettamente convessa negli intervalli

$$\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \frac{3}{4}\pi+k\pi\right] \qquad (k\in\mathbb{N})$$

f strettamente concava negli intervalli

$$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\ ,\quad \left[\frac{3}{4}\pi+k\pi\,,\ \frac{5}{4}\pi+k\pi\right]\quad (k\in\mathbb{N})$$

I punti $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ sono pti di flesso.


3
2
1
−1
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
$\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{4}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\pi+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{4}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{1}{4}$

2. Per $n \in \mathbb{N}$, sia ♣

$$I_n = \int_0^1 (x^4 - 2)^n \, dx \, .$$

Trovare una formula iterativa che esprima I_n in funzione di I_{n-1}

$$I_n = \int_0^1 (x^4 - 2)^n \, dx = \text{[per parti]}$$

$$= x(x^4-2)^n \Big|_0^1 - 4n \int_0^1 x^4 (x^4-2)^{n-1} dx =$$

$$= (-1)^n - 4n \int_0^1 (x^4 - 2 + 2)(x^4-2)^{n-1} \, dx =$$

$$= (-1)^n - 4n \, I_n - 8n \, I_{n-1}$$

Pertanto

$$I_n = \frac{(-1)^n}{4n+1} - \frac{8n}{4n+1} I_{n-1}$$

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$\frac{z^2|\bar{z}|}{|z|-8} = 4iz\ , \qquad w^8 + 12w^4 - 64 = 0\ .$$

♣

(A) Ovviamente $z=0$ è una soluzione. Dividendo per z (e seguendo la C.E. $|z|\neq 8$) l'eq^{ne} diventa

$$z|\bar{z}| = 4i(|z|-8).$$

$\Rightarrow$ $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$ (z immaginario puro)

y deve risolvere

$$y|y| = 4(|y|-8)$$

Studiando separatamente $y \geq 0$ e $y<0$ si trova

$y=-4$

Quindi le soluzioni sono $z_1 = 0$ e $z_2 = -4i$

(B) Ponendo $w^4 = z$, si ottiene un'eq^{ne} di $2°$ grado che ha per soluzioni

$$w^4 = 4 \quad , \quad w^4 = -16$$

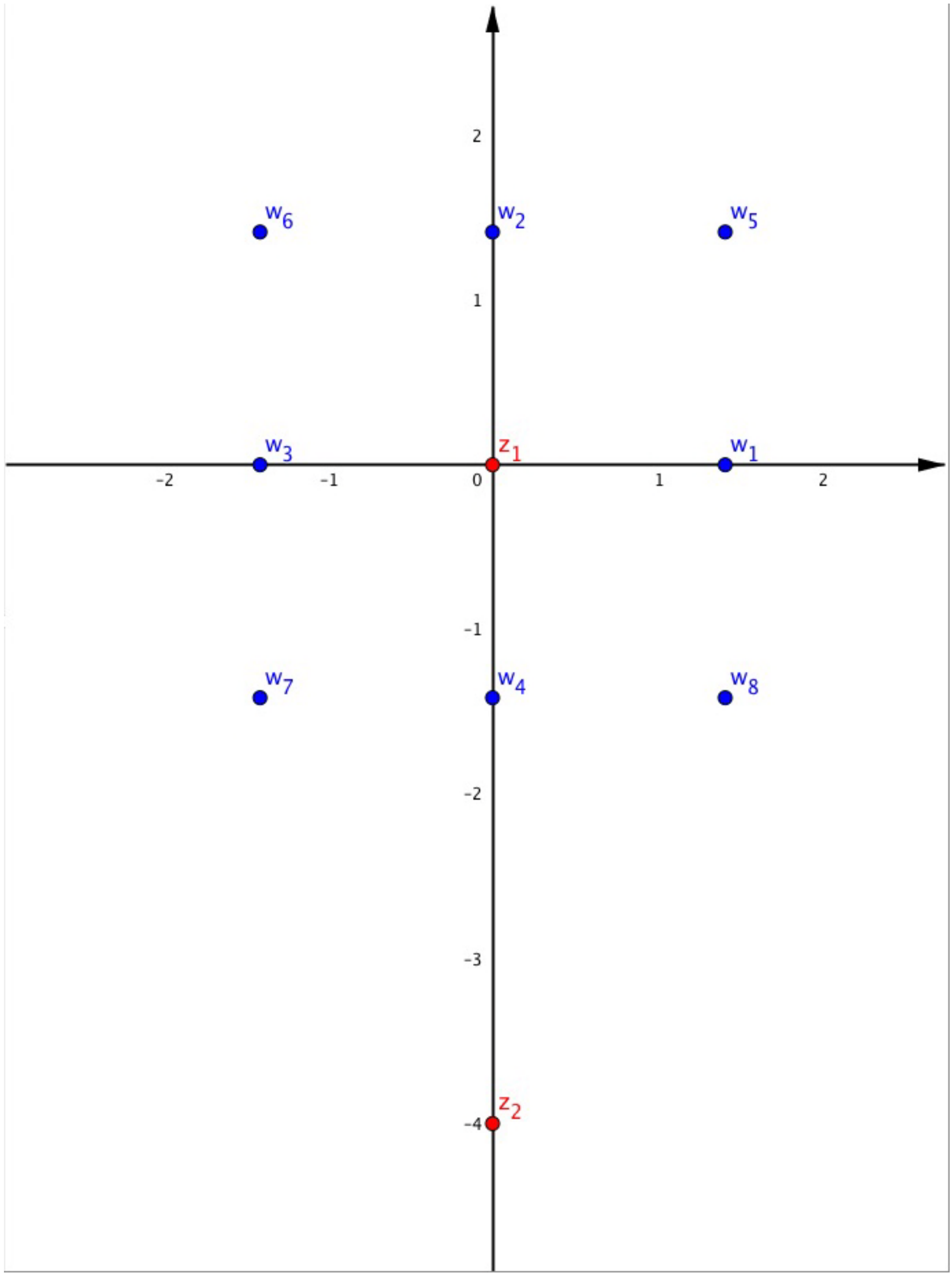
$w^4 = 4 \iff w = \sqrt{2}\, e^{i\frac{k\pi}{2}}$ $(k=0,1,2,3) \iff$

$\iff (w = \pm\sqrt{2}) \vee (w = \pm\sqrt{2}\, i)$

$$w^4 = -16 \iff w = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)} \iff$$

$$\iff \quad w = \sqrt{2}\,(\pm 1 \pm i)$$

segni presi a piacimento: 4 soluzioni.



4. Calcolare l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni: ♣

$f(x) = \ln(x^3 - 26)$ (per $x \to 3^+$), $\qquad g(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x} - \frac{1}{x^\alpha}$ (per $x \to +\infty$, al variare di $\alpha > 0$).

(A) per $x \to 3^+$ si ha

$$f(x) = \ln(x^3 - 26) = \ln(1 + \underbrace{(x^3 - 27)}_{\to 0}) \sim x^3 - 27 =$$

$$= (x-3)\underbrace{(x^2 + 3x + 9)}_{\to 27} \sim 27\,(x-3)$$

$\Rightarrow f(x)$ è un infinitesimo di ordine 1.

(B) per $x \to +\infty$ si ha:

$$g(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1\right) - \frac{1}{x^\alpha} =$$

$$\left[\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2) \quad \text{per } t \to 0\right]$$

$$= \sqrt{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - \frac{1}{x^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\,x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) - \frac{1}{x^\alpha}$$

Quindi: • se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $g(x) \sim -\frac{1}{x^\alpha}$

(infinitesimo di ordine α.)

- Se $\alpha = \frac{1}{2}$, $g(x) \sim -\frac{1}{2x^{3/2}}$

  infinitesimo di ordine $3/2$

- Se $\alpha > \frac{1}{2}$, $g(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$

  infinitesimo di ordine $1/2$.

5. Al variare dei parametri $\alpha > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^\alpha + 3}{n^\alpha + \sqrt{n}}\right), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + \sqrt{n}}\right)(x+1)^n. \qquad \clubsuit$$

A

$$\frac{n^\alpha + 3}{n^\alpha + \sqrt{n}} \xrightarrow{n} \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \alpha > 1/2 \\ 1/2 & \text{se} \quad \alpha = 1/2 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < \alpha < 1/2. \end{cases}$$

Ne segue che per $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ il termine della serie non è infinitesimo $\Rightarrow$ la serie non converge (diverge a $-\infty$).

Se $\alpha > \frac{1}{2}$, allora

$$\ln\left(\frac{n^\alpha + 3}{n^\alpha + \sqrt{n}}\right) = \ln\left(1 - \underbrace{\frac{\sqrt{n} - 3}{n^\alpha + \sqrt{n}}}_{\downarrow\, 0}\right) \sim -\frac{\sqrt{n} - 3}{n^\alpha + \sqrt{n}} \sim -\frac{1}{n^{\alpha - 1/2}}$$

Quindi la serie è definitivamente a termini negativi, e converge se e solo se $\alpha - 1/2 > 1 \iff \alpha > \frac{3}{2}$ (confronto con la serie armonica generalizzata)

In definitiva la serie converge $\iff$ $\alpha > \frac{3}{2}$.

(B) Si tratta di una serie di potenze.

Poiché, per l'analisi precedente,

$$a_n := \ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{1}{n^{3/2}}, \quad \text{si ha}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1,$$ pertanto il raggio di convergenza vale 1.

$\Rightarrow$ La serie converge per $|x+1|<1 \Leftrightarrow -2<x<0$

La serie non converge per $|x+1|>1 \Leftrightarrow (x<-2) \vee (x>0)$

Per $x=0$ e $x=-2$ la serie converge assolutam., in quanto

$$|a_n| \sim \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Pertanto la serie converge se e solo se $-2 \leq x \leq 0$.