Cognome e nome .... **N. matricola** ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 18–19 febbraio ◯ 21–22 febbraio ◯ 27 febbraio – 1 marzo ◯ in un appello successivo.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione
$$f(x) = e^{-|x|}(x^2 + 2x + 2)\,,$$
e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

---

2. Calcolare l'area della regione piana
$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0\,,\; \ln(3 + x^2) \leq y \leq \ln(3 + 2x)\Big\}\,.$$

---

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso
$$(z - 2i)^4 = -4z^4\;, \qquad (\mathrm{Re}\,w)^3 = 2\mathrm{Re}\,(w^3)\;.$$

---

4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:
$$f(x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{\sqrt{x}} \quad (\text{per } x \to +\infty)\,, \qquad g(x) = e^{x+x^\alpha} - 1 - x \quad (\text{per } x \to 0^+, \text{al variare di } \alpha > 0)\,.$$

---

5. Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza (semplice e assoluta) della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \Big(\ln(2n^\alpha + 3) - \ln(2n^\alpha + n)\Big)\,.$$

Punteggi: 1: 8 punti; **2:** 7 punti; **3:** 7 punti; **4:** 7 punti; **5:** 6 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-|x|}(x^2 + 2x + 2)\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

Dominio: $\mathbb{R}$. f è positiva nel suo dominio. f è continua nel suo dominio.

Limiti significativi: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. $y=0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

Derivabilità: f è derivabile per $x \neq 0$. Si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x (x+2)^2 & x<0 \\ -x^2 e^{-x} & x>0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} (-x^2 e^{-x}) = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} e^x (x+2)^2 = 4$$

Pertanto $x=0$ è p.to angoloso.

$f'(x) = 0 \iff x=-2$ p.to di flesso a tg. orizzontale

$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

$f'(x) < 0 \iff x \in (0, +\infty)$

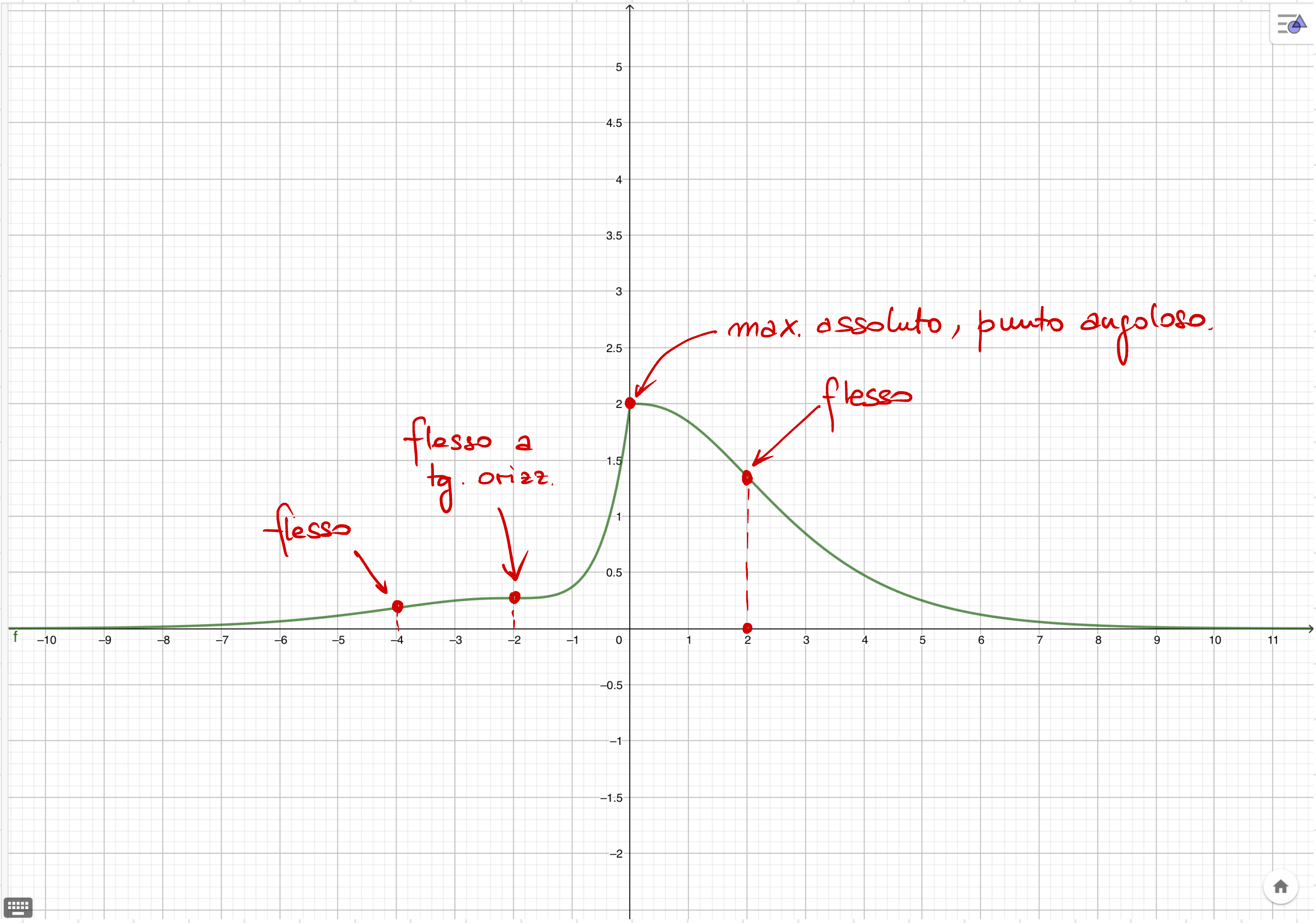
f è strettamente crescente in $(-\infty, 0]$,
strettamente decrescente in $[0, +\infty)$.

$x=0$ è p.to di massimo assoluto (non regolare).

$$f''(x) = \begin{cases} e^x (x+2)(x+4) & \text{se } x<0 \\ e^{-x} x(x-2) & \text{se } x>0 \end{cases}$$

f è strettamente convessa in $(-\infty, -4]$, in $[-2, 0]$ e in $[2, +\infty)$, strettamente concava in $[-4, -2]$ e in $[0, 2]$.

I punti $x = -4$, $x = -2$, $x = 2$ sono pti di flesso.



2. Calcolare l'area della regione piana

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0\,,\ \ln(3+x^2) \leq y \leq \ln(3+2x)\right\}.$$

Si ha $\ln(3+x^2) \leq \ln(3+2x)$ per $x \in [0,2]$,
quindi

$$\text{Area } E = \int_0^2 \left(\ln(3+2x) - \ln(3+x^2)\right) dx.$$

$$\int_0^2 \ln(3+2x)\,dx \underset{\text{[per parti]}}{=} x\ln(3+2x)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x}{3+2x}\,dx =$$

$$= 2\ln 7 - \int_0^2 \left(1 - \frac{3}{3+2x}\right) dx =$$

$$= 2\ln 7 - 2 + \frac{3}{2}\ln(3+2x)\Big|_0^2 =$$

$$= 2\ln 7 - 2 + \frac{3}{2}(\ln 7 - \ln 3)$$

$$\int_0^2 \ln(3+x^2)\,dx \underset{\text{[per parti]}}{=} x\ln(3+x^2)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2}{3+x^2}\,dx =$$

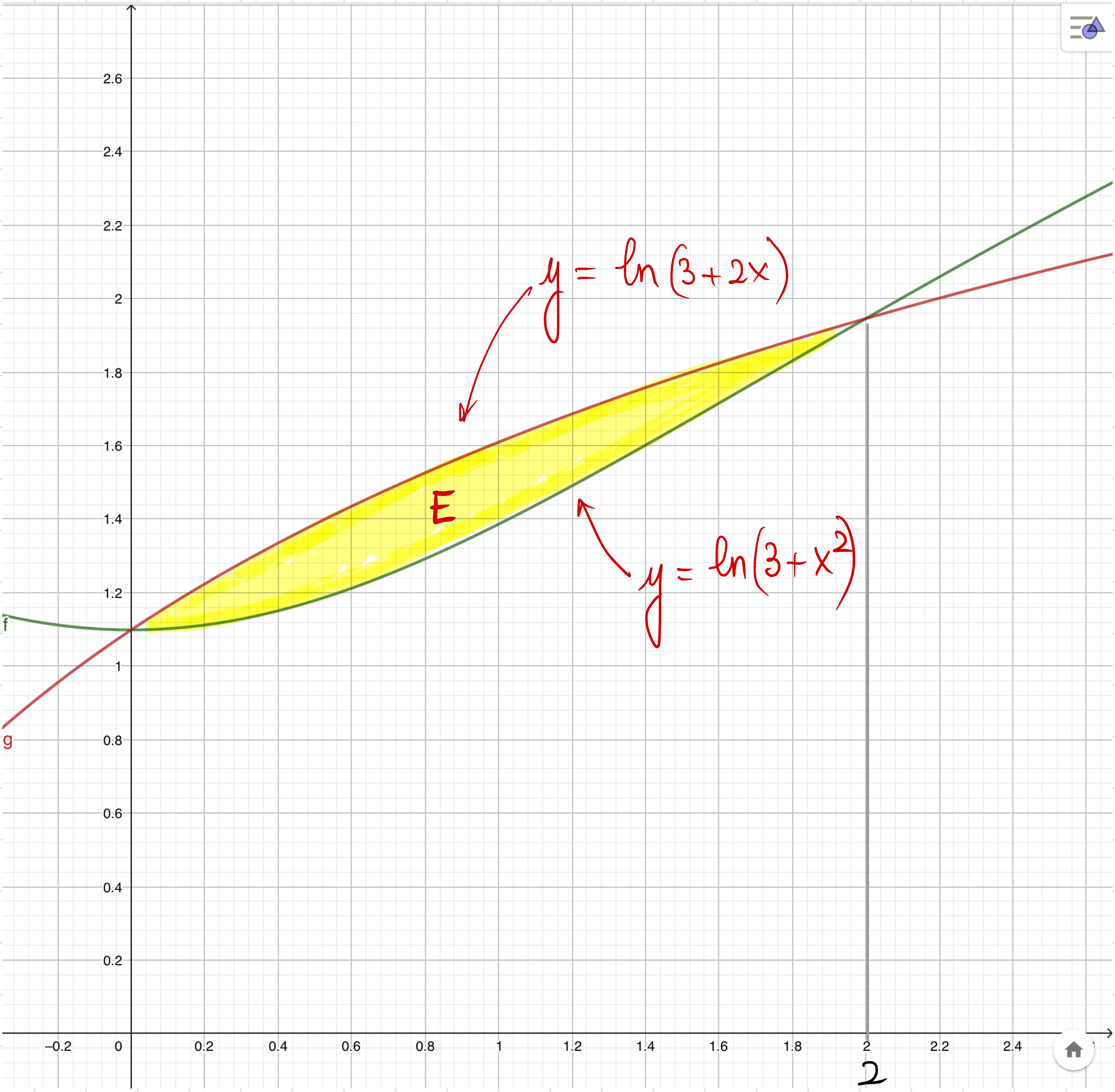
$$= 2\ln 7 - \int_0^2 \left(2 - \frac{6}{3+x^2}\right) dx =$$

$$= 2\ln 7 - 4 + 2\sqrt{3}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^2 = 2\ln 7 - 4 + 2\sqrt{3}\,\text{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Pertanto

$$\text{Area } E = 2 + \frac{3}{2}\ln\frac{7}{3} - 2\sqrt{3}\,\arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

[verificato con Mathematica]



3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$(z-2i)^4 = -4z^4 \,, \qquad (\operatorname{Re} w)^3 = 2\operatorname{Re}(w^3) \,.$$

1) Dopo aver osservato che $z=0$ non è soluzione, basta porre $\frac{z-2i}{z} = v$ e l'eq^{ne} diventa

$$v^4 = -4 = 4\,e^{i\pi}$$

Quindi v ha 4 valori.

$$v_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = 1+i$$

$$v_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1+i$$

$$v_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1-i$$

$$v_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}} = 1-i$$

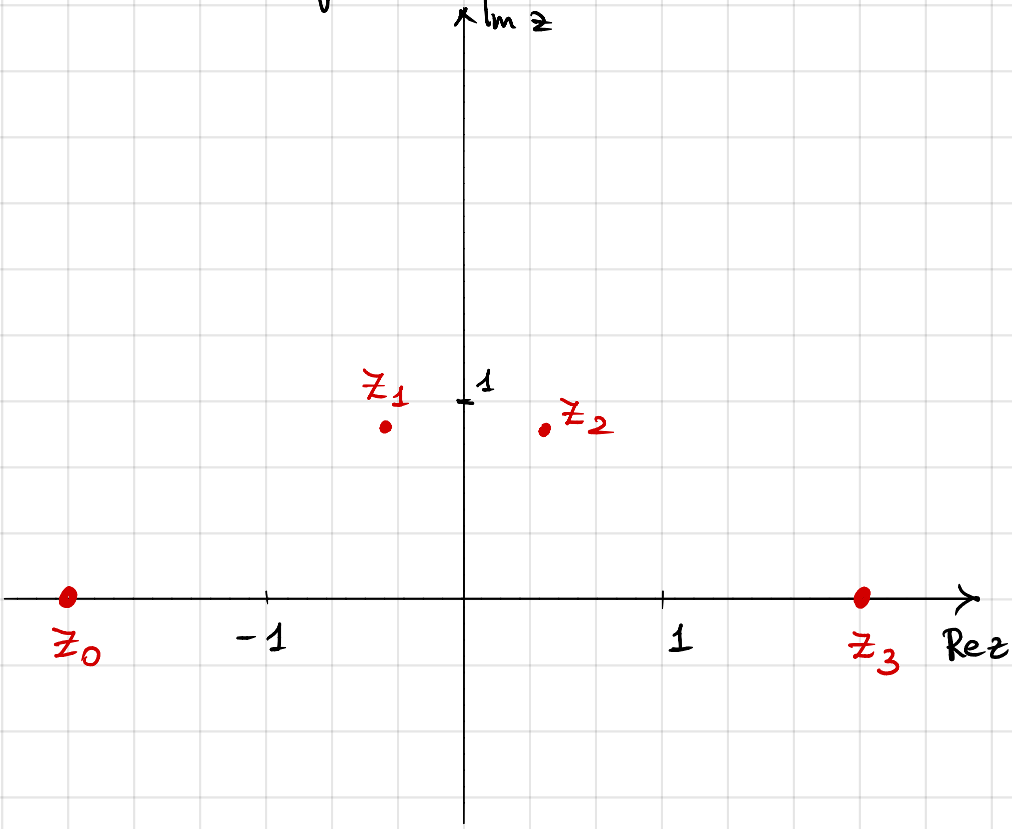
Poiché $z = \frac{2i}{1-v}$, si ottengono le soluzioni

$$z_0 = -2$$

$$z_1 = \frac{2}{5}(-1+2i)$$

$$z_2 \;\; \frac{2}{5}(1+2i)$$

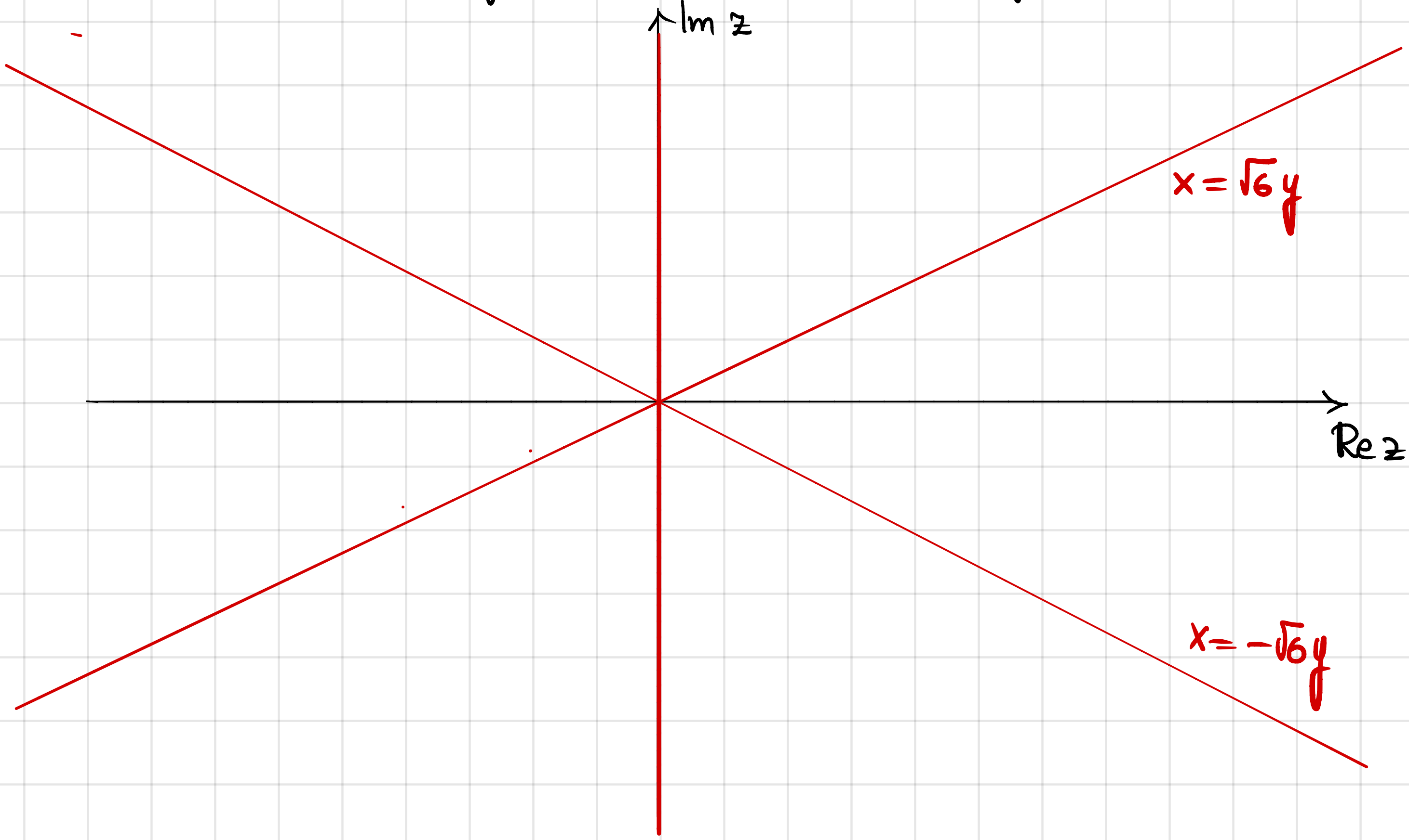
$$z_3 = 2$$



2) Posto $w = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, l'eq^ne^ diventa:

$$x^3 = 2x^3 - 6xy^2 , \quad \text{cioè} \quad x(x - \sqrt{6}\,y)(x + \sqrt{6}\,y) = 0$$

Le soluzioni sono tutti i pti delle rette $x = 0$ (cioè i numeri immaginari puri), $x = \pm\sqrt{6}\,y$.



4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{\sqrt{x}} \quad (\text{per } x \to +\infty), \qquad g(x) = e^{x+x^\alpha} - 1 - x \quad (\text{per } x \to 0^+, \text{al variare di } \alpha > 0).$$

1) $1 - \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{\sqrt{x}} = 1 - e^{\sqrt{x}\ln\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)} = (*)$

<u>OSS</u> $\sqrt{x}\ln\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) \sim -\frac{\sqrt{x}}{x^3} = -\frac{1}{x^{5/2}} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$, quindi

$(*) \sim -\sqrt{x}\ln\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) \sim \frac{1}{x^{5/2}}$

$\Rightarrow f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\frac{5}{2}$ per $x \to +\infty$

2) Per lo sviluppo di Maclaurin di e^t, si ha

$$g(x) = \cancel{1} + (\cancel{x} + x^\alpha) + \frac{(x+x^\alpha)^2}{2} + o((x+x^\alpha)^2) - \cancel{1} - \cancel{x} =$$

$$= x^\alpha + \frac{x^2}{2} + x^{\alpha+1} + \frac{x^{2\alpha}}{2} + o((x+x^\alpha)^2)$$

Pertanto se $\alpha < 2$ si ha

$g(x) = x^\alpha + o(x^\alpha) \sim x^\alpha$ per $x \to 0^+$

Infatti $o((x+x^\alpha)^2) = \begin{cases} o(x^{2\alpha}) & \text{se } \alpha < 1 \\ o(x^2) & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Se $\alpha = 2$, $g(x) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \sim x^2$ per $x \to 0^+$

Se $\alpha > 2$, $g(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$ "

Pertanto $g(x)$ è infinitesimo di ordine $\beta = \min\{2, \alpha\}$ per $x \to 0^+$.

Se $0 < \alpha < 1$, è possibile rispondere anche senza usare il polinomio di Taylor, tramite i limiti notevoli.

$\sim$

5. Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza (semplice e assoluta) della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\Big(\ln(2n^\alpha+3)-\ln(2n^\alpha+n)\Big).$$

Poniamo $b_n = \ln(2n^\alpha+3) - \ln(2n^\alpha+n) = \ln\left(\frac{2n^\alpha+3}{2n^\alpha+n}\right)$.

Se $\alpha < 1$, allora $b_n \longrightarrow -\infty$

quindi il termine della serie non è infinitesimo $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ la serie non converge.

Se $\alpha = 1$, allora $\ln\left(\frac{2n+3}{3n}\right) \longrightarrow \ln\frac{2}{3}$,

quindi anche in questo caso la serie non converge.

Se $\alpha > 1$, allora

$$b_n = \ln\Big(1 - \underbrace{\frac{n-3}{2n^\alpha+n}}_{\to 0}\Big) \sim -\frac{n-3}{2n^\alpha+n} \sim -\frac{1}{2n^{\alpha-1}}$$

Quindi, per $\alpha > 1$, si ha

$$|(-1)^n b_n| \sim \frac{1}{2n^{\alpha-1}}.$$

La serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 2$.

Il caso $1 < \alpha \leq 2$ si può studiare con il criterio di Leibniz. Osservato che b_n è definitivamente negativo, dobbiamo controllare che

$(-1)^n b_n = (-1)^{n+1}(-b_n)$ verifichi:

1) $- b_n \to 0$ vero se $\alpha > 1$.

2) $- b_n$ definitivamente decrescente.

Questo equivale a dire che

$$\frac{2n^\alpha + n}{2n^\alpha + 3} = 1 + \frac{n-3}{2n^\alpha+3}$$ sia def^te decrescente,

cioè che $\frac{n-3}{2n^\alpha+3}$ sia def^te decrescente.

Posto $f(x) = \frac{x-3}{2x^\alpha+3}$, si ha

$2(1-\alpha)x^\alpha < 0$ def^te per $x \to +\infty$

$$f'(x) = \frac{2x^\alpha + 3 - (x-3)\, 2\alpha x^{\alpha-1}}{(2x^\alpha+3)^2} = \frac{2(1-\alpha)x^\alpha + 6\alpha x^{\alpha-1} + 3}{(2x^\alpha+3)^2}$$

$(2x^\alpha+3)^2 > 0$

Quindi $f'(x) < 0$ def^te per $x \to +\infty$. Le ipotesi del criterio di Leibniz sono verificate.

In definitiva:

La serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 2$

La serie converge semplicemente se e solo se $\alpha > 1$.