Cognome e nome .... **N. matricola** ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 18–19 febbraio ◯ 21–22 febbraio ◯ 27 febbraio – 1 marzo ◯ in un appello successivo.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-|x-1|}(x^2+1)\,,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

---

2. Calcolare l'area della regione piana

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x \geq 0\,,\ \ln(1+x^2) \leq y \leq \ln(7+x)\Big\}\,.$$

---

3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$16(z-2i)^4 = z^4\ , \qquad (\operatorname{Im} w)^3 = 2\operatorname{Im}(w^3)\ .$$

---

4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}} - 1 \quad (\text{per } x \to +\infty)\,, \qquad g(x) = \operatorname{sh}(x+x^\alpha) - x \quad (\text{per } x \to 0^+, \text{al variare di } \alpha > 0)\,.$$

---

5. Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza (semplice e assoluta) della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \Big(\ln(3n^\alpha+1) - \ln(3n^\alpha+n)\Big)\,.$$

Punteggi: 1: 8 punti; **2:** 7 punti; **3:** 7 punti; **4:** 7 punti; **5:** 6 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-|x-1|}(x^2+1),$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo della funzione.

Dominio: $\mathbb{R}$. f è positiva nel suo dominio. f è continua nel suo dominio.

Limiti significativi: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

Derivabilità: f è derivabile per $x \neq 1$. Si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-1}(x+1)^2 & x < 1 \\ -e^{1-x}(x-1)^2 & x > 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \left(-e^{1-x}(x-1)^2\right) = 0$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} e^{x-1}(x+1)^2 = 4$$

Pertanto $x = 1$ è pto angoloso.

$f'(x) = 0 \iff x = -1$ pto di flesso a tg. orizzontale

$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$

$f'(x) < 0 \iff x \in (1, +\infty)$

f è strettamente crescente in $(-\infty, 1]$

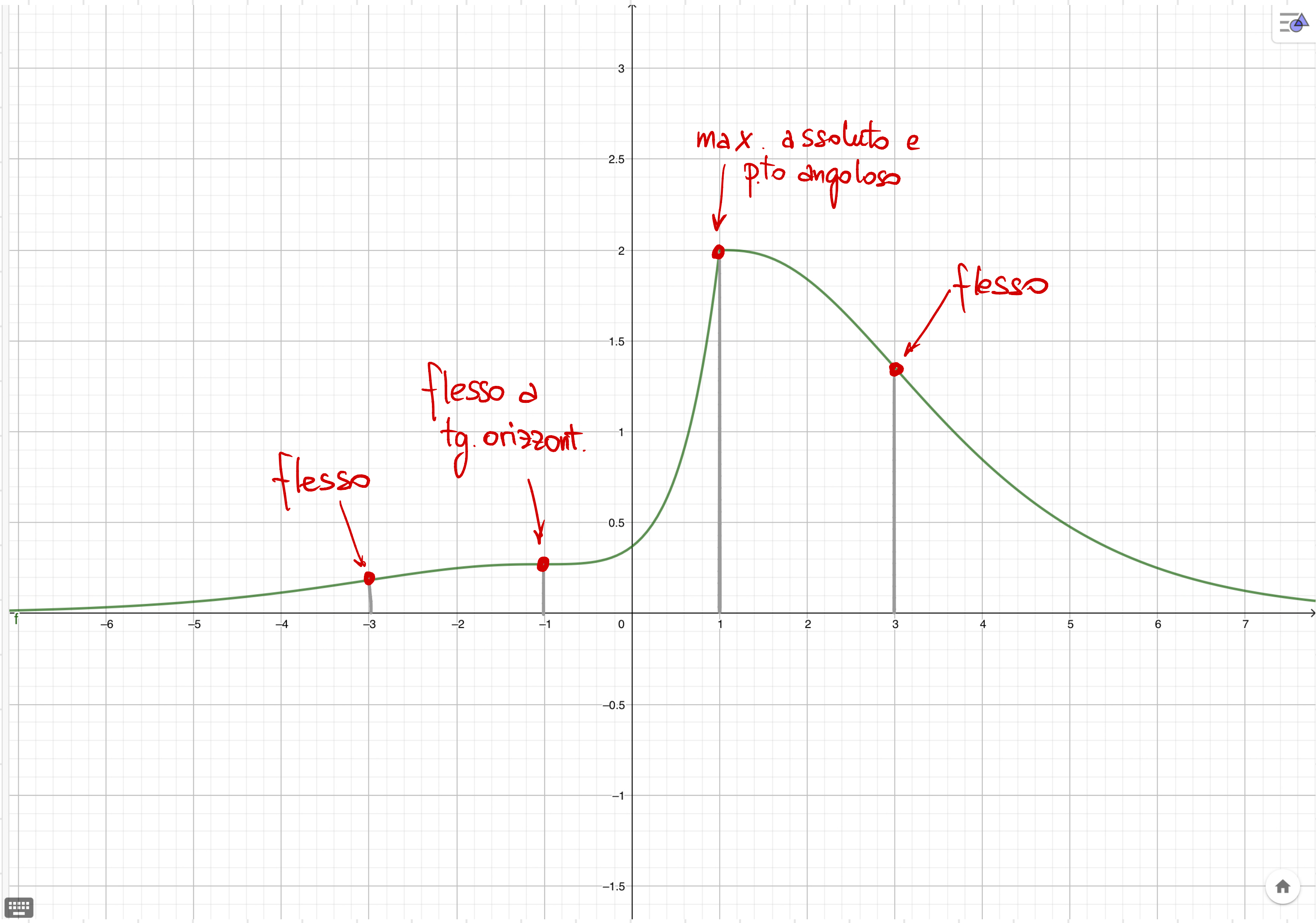
strettamente decrescente in $[1, +\infty)$.

$x = 1$ è p.to di massimo assoluto (non regolare).

$$f''(x) = \begin{cases} e^{x-1}(x+1)(x+3) & \text{se } x < 1 \\ e^{1-x}(x-1)(x-3) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

f è strettamente convessa in $(-\infty, -3]$, in $[-1, 1]$ e in $[3, +\infty)$, strettamente concava in $[-3, -1]$ e in $[1, 3]$.

I punti $x = -3$, $x = -1$, $x = 3$ sono pti di flesso.



2. Calcolare l'area della regione piana

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0 \, , \ \ln(1+x^2) \leq y \leq \ln(7+x) \right\}.$$

Si ha $\ln(1+x^2) \leq \ln(7+x)$ per $x \in [-2,3]$, quindi

$$\text{Area } E = \int_0^3 \left(\ln(7+x) - \ln(1+x^2) \right) dx .$$

$$\int_0^3 \ln(7+x)\,dx \underset{\text{[per parti]}}{=} x \ln(7+x) \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{x}{7+x}\,dx =$$

$$= 3 \ln 10 - \int_0^3 \left(1 - \frac{7}{7+x} \right) dx =$$

$$= 3 \ln 10 - 3 + 7 \ln(7+x) \Big|_0^3$$

$$= 3 \ln 10 - 3 + 7 \ln\left(\frac{10}{7} \right)$$

$$\int_0^3 \ln(1+x^2)\,dx \underset{\text{[per parti]}}{=} x \ln(1+x^2) \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx =$$

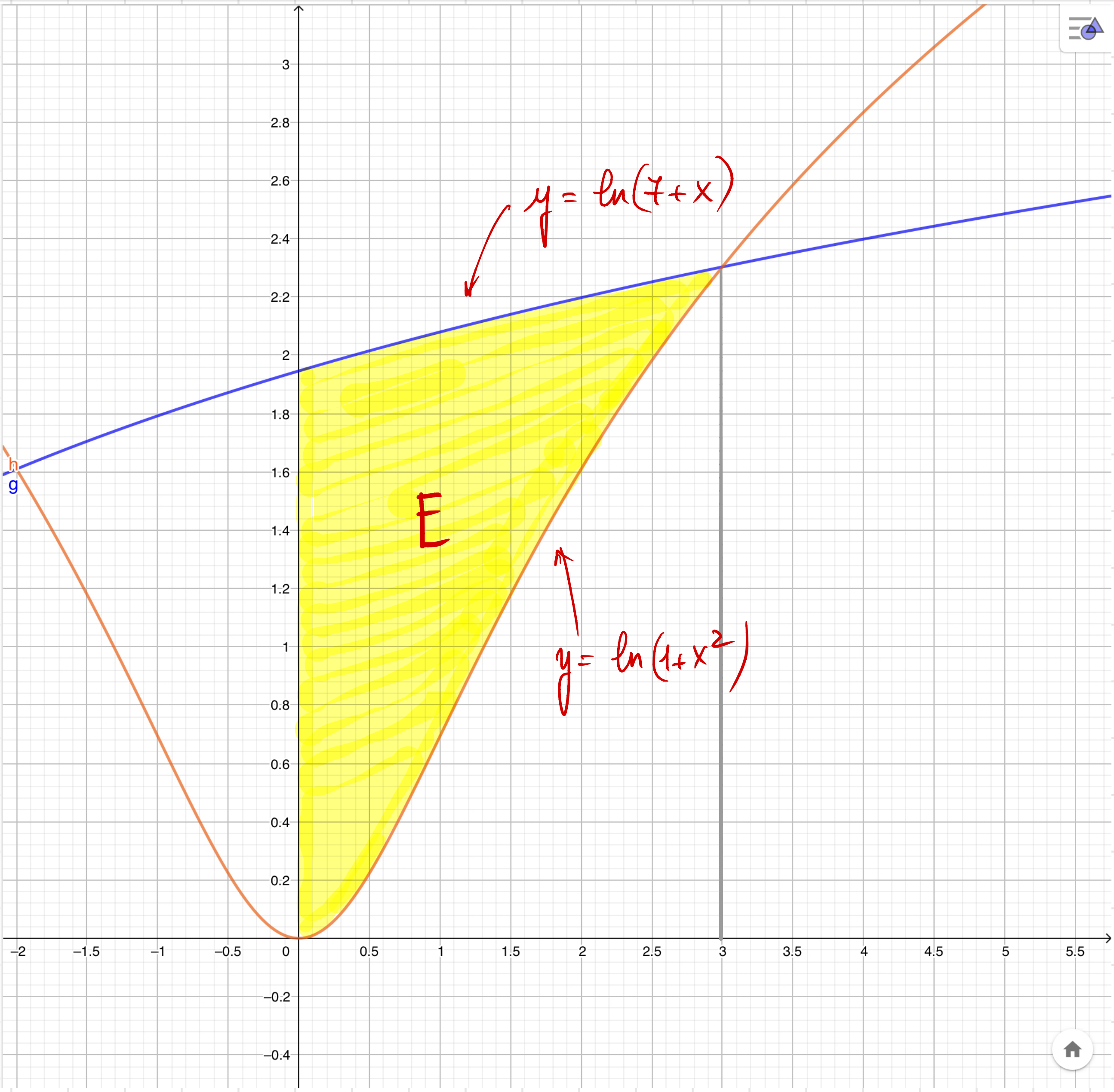
$$= 3 \ln 10 - \int_0^3 \left(2 - \frac{2}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= 3 \ln 10 - 6 + 2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^3 = 3 \ln 10 - 6 + 2 \operatorname{arctg} 3$$

Pertanto

$$\text{Area } E = 3 + 7\ln\left(\frac{10}{7}\right) - 2\,\text{arctg}\,3 .$$

[verificato con Mathematica]



3. Risolvere ciascuna delle seguenti equazioni e disegnarne le soluzioni nel piano complesso

$$16(z-2i)^4 = z^4 \;, \qquad (\mathrm{Im}\, w)^3 = 2\mathrm{Im}\,(w^3) \;.$$

1) Dopo aver osservato che $z = 2i$ non è soluzione, basta porre $\frac{z}{z-2i} = v$ e l'eq^{ne} diventa

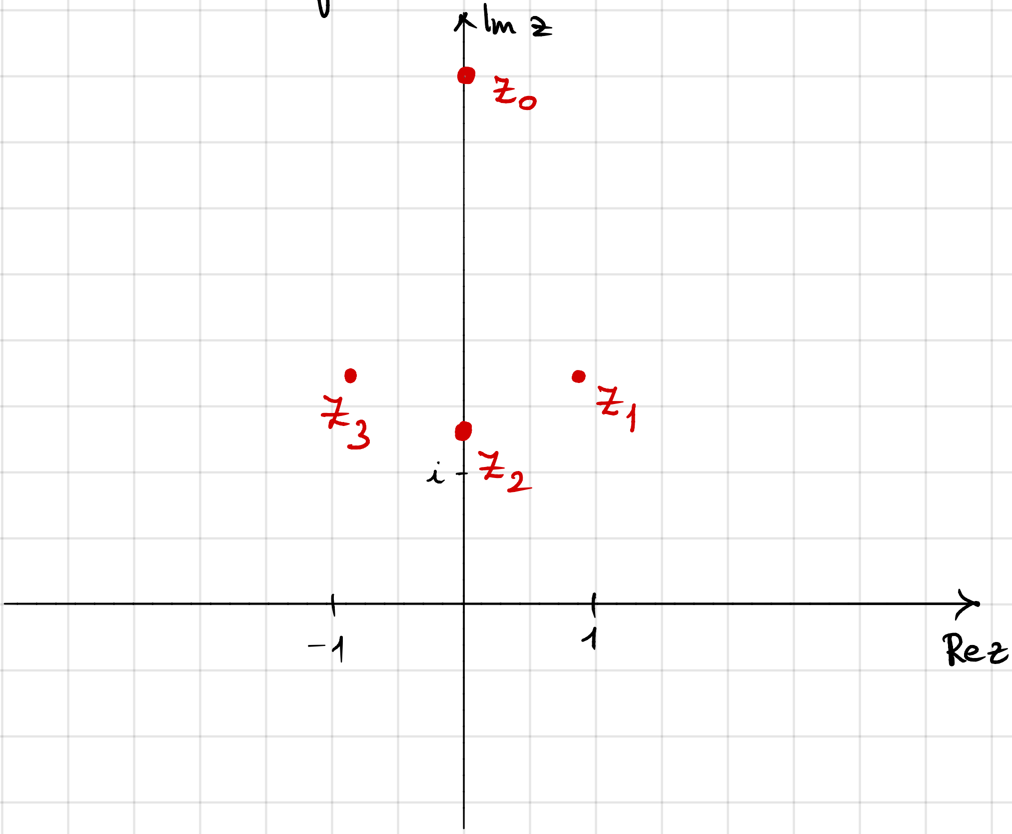
$$v^4 = 16$$

Quindi v ha 4 valori:

$$v_0 = 2$$
$$v_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$
$$v_2 = 2e^{i\pi} = -2$$
$$v_3 = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = -2i$$

Poiché $z = \frac{2iv}{v-1}$, si ottengono le soluzioni

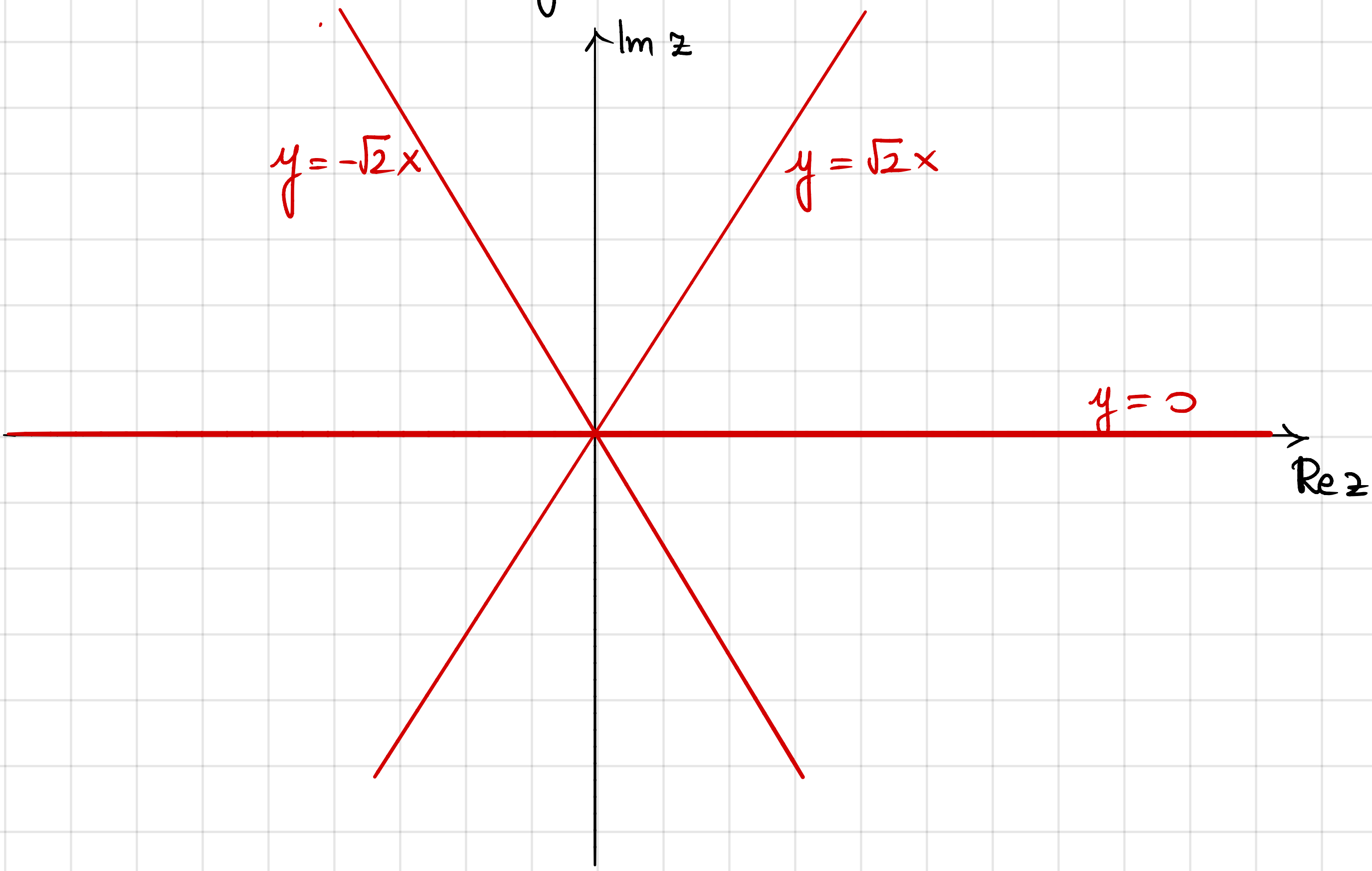
$$z_0 = 4i$$
$$z_1 = \frac{4}{5}(1+2i)$$
$$z_2 = \frac{4}{3}i$$
$$z_3 = \frac{4}{5}(-1+2i)$$



2) Posto $w = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, l'eq^{ne} diventa:

$$y^3 = 2\left(3x^2y - y^3\right), \quad \text{cioè} \quad y\left(y - \sqrt{2}x\right)\left(y + \sqrt{2}x\right) = 0$$

Le soluzioni sono tutti i pti delle rette $y = 0$ (cioè i numeri reali), $y = \pm\sqrt{2}x$.



4. Calcolare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}} - 1 \quad (\text{per } x \to +\infty), \qquad g(x) = \operatorname{sh}(x + x^\alpha) - x \quad (\text{per } x \to 0^+, \text{al variare di } \alpha > 0).$$

1) $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}} - 1 = e^{\sqrt{x}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} - 1 = (*)$

OSS $\sqrt{x}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \sim -\frac{\sqrt{x}}{x^2} = -\frac{1}{x^{3/2}} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$, quindi

$(*) \sim \sqrt{x}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \sim -\frac{1}{x^{3/2}}$

$\Rightarrow f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\frac{3}{2}$ per $x \to +\infty$

2) Per lo sviluppo di MacLaurin di sh t, si ha:

$$g(x) = (\cancel{x} + x^\alpha) + \frac{(x+x^\alpha)^3}{6} + o\left((x+x^\alpha)^3\right) - \cancel{x} =$$

$$= x^\alpha + \frac{x^3}{6} + \frac{x^{2+\alpha}}{2} + \frac{x^{1+2\alpha}}{2} + \frac{x^{3\alpha}}{6} + o\left((x+x^\alpha)^3\right)$$

Pertanto se $\alpha < 3$ si ha

$$g(x) = x^\alpha + o(x^\alpha) \sim x^\alpha \quad \text{per } x \to 0^+$$

Infatti $o\left((x+x^\alpha)^3\right) = \begin{cases} o(x^{3\alpha}) & \text{se } \alpha < 1 \\ o(x^3) & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Se $\alpha = 3$, $g(x) = \frac{7}{6}x^3 + o(x^3) \sim \frac{7}{6}x^3$ per $x \to 0^+$

Se $\alpha > 3$, $g(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6}$ "

Pertanto $g(x)$ è infinitesimo di ordine $\beta = \min\{3, \alpha\}$ per $x \to 0^+$

Se $0 < \alpha < 1$, è possibile rispondere anche senza usare il polinomio di Taylor, tramite i limiti notevoli.

5. Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza (semplice e assoluta) della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\Big(\ln(3n^\alpha+1)-\ln(3n^\alpha+n)\Big).$$

Poniamo $b_n = \ln(3n^\alpha+1) - \ln(3n^\alpha+n) = \ln\left(\frac{3n^\alpha+1}{3n^\alpha+n}\right)$.

Se $\alpha < 1$, allora $b_n \to -\infty$

quindi il termine della serie non è infinitesimo $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ la serie non converge.

Se $\alpha = 1$, allora $\ln\left(\frac{3n+1}{4n}\right) \to \ln\frac{3}{4}$

quindi anche in questo caso la serie non converge.

Se $\alpha > 1$, allora

$$b_n = \ln\Bigg(1 - \underbrace{\frac{n-1}{3n^\alpha+n}}_{\downarrow \atop 0}\Bigg) \sim -\frac{n-1}{3n^\alpha+n} \sim -\frac{1}{3n^{\alpha-1}}$$

Quindi, per $\alpha > 1$, si ha

$$|(-1)^n b_n| \sim \frac{1}{3n^{\alpha-1}}.$$

La serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 2$.

Il caso $1 < \alpha \leq 2$ si può studiare con il criterio di Leibniz. Osservato che b_n è definitivamente negativo, dobbiamo controllare che

$(-1)^n b_n = (-1)^{n+1}(-b_n)$ verifichi:

1) $-b_n \to 0$ (vero se $\alpha > 1$).

2) $-b_n$ definitivamente decrescente.

Questo equivale a dire che

$$\frac{3n^\alpha + n}{3n^\alpha + 1} = 1 + \frac{n-1}{3n^\alpha+1} \text{ sia def}^{te} \text{ decrescente,}$$

cioè che $\dfrac{n-1}{3n^\alpha+1}$ sia def^{te} decrescente.

Posto $f(x) = \dfrac{x-1}{3x^\alpha+1}$, si ha

$$f'(x) = \frac{3x^\alpha + 1 - (x-1)3\alpha x^{\alpha-1}}{(3x^\alpha+1)^2} = \frac{\overbrace{3(1-\alpha)x^\alpha + 3\alpha x^{\alpha-1} + 1}^{\sim\, 3(1-\alpha)x^\alpha < 0 \text{ def}^{te} \text{ per } x \to +\infty}}{\underbrace{(3x^\alpha+1)^2}_{>0}}$$

Quindi $f'(x) < 0$ def^{te} per $x \to +\infty$. Le ipotesi del criterio di Leibniz sono verificate.

In definitiva:

La serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 2$

La serie converge semplicemente se e solo se $\alpha > 1$.